

축대칭 함몰지형 위를 진행하는 파의 변형에 관한 완경사 방정식의 해석 해 Analytic Solution to Mild Slope Equation for Transformation of Waves Propagating over an Axi-symmetric Pit

정태화* · 서경덕**
Tae-Hwa Jung* and Kyung-Duck Suh**

요 지 : 축대칭 함몰지형 위를 진행하는 파에 관한 완경사 방정식의 해석 해를 유도하였다. 함몰지형 내부에서의 수심은 함몰지형 중심으로부터의 거리의 멱에 비례하여 변한다. 변수 분리법을 사용하여 지배 방정식을 상미분 방정식으로 전환하였으며, Hunt(1979)의 근사식을 사용하여 방정식의 계수들을 양함수의 형태로 변환하였다. 마지막으로 Frobenius 급수를 사용하여 해석 해를 유도하였다. Hunt 근사식의 특성 상 본 연구에서 유도된 해석 해는 천해와 심해에서는 정확하고 중간수심에서는 덜 정확하다. 해석 해의 타당성을 검토하기 위하여 수치 모델 결과와 비교하였다. 또한 해석 해를 이용하여 함몰지형의 형상과 상대수심 등을 변화시키면서 다양한 조건에 대한 파랑 변형을 검토하였다.

핵심용어 : 함몰지형, 해석 해, 완경사 방정식, 파랑 변형

Abstract : An analytic solution to the mild-slope equation is derived for waves propagating over an axi-symmetric pit. The water depth inside the pit varies in proportion to a power of radial distance from the pit center. The governing equation is transformed into ordinary differential equations by using separation of variables, and the coefficients of the equations are transformed into explicit forms by using Hunt's (1979) approximate solution. Finally, by using the Frobenius series, the analytic solution is derived. Due to the feature of Hunt's equation, the present analytic solution is accurate in shallow and deep waters, while it is less accurate in intermediate depth water. The validity of the analytic solution is demonstrated by comparison with numerical solutions. The analytic solution is also used to examine the effects of pit geometry and relative depth on wave transformation.

Keywords: pit, analytic solution, mild slope equation, wave transformation

1. 서 론

심해에서 천해로 진행하는 파랑은 굴절, 회절, 반사, 천수 등을 겪으면서 변형을 일으킨다. 이러한 파랑 변형을 모의하기 위해 많은 수치 모델들이 개발되었다. 그러나 수치 모델들은 근사에 의해 해를 구하기 때문에 별도의 검증 과정을 거쳐야 한다. 주로 이용되는 검증 방법은 실험 결과나 해석 해와 비교하는 것이다. 실험의 경우 실제의 물리

현상을 그대로 재현한다는 장점이 있지만 실험을 하기 위한 준비 과정이 길고 많은 비용이 든다는 단점이 있다. 또한 측정 기기나 방법에 대한 오차를 고려해야 하는 번거로움이 있다. 이에 대한 대안으로 적은 시간과 비용으로 구할 수 있는 해석 해에 대한 연구가 수행되어져 왔다. Homma (1950), Vastano and Reid(1967), 그리고 Jonsson *et al.*(1976)은 포물선형 천퇴 위에 원형의 섬이 있는 경우에 대한 장파의 해석 해를 제안하였고, Zhu and Zhang(1996)은 원

*서울대학교 지구환경시스템공학부 (Corresponding author: Tae-Hwa Jung, School of Civil, Urban and Geosystem Engineering, Seoul National University, Seoul 151-744, Korea, togye176@snu.ac.kr)

**서울대학교 지구환경시스템공학부 및 공학연구소 (School of Civil, Urban and Geosystem Engineering & Engineering Research Institute, Seoul National University)

빨 모양의 천퇴위에 원형의 섬이 있는 경우에 대한 장파의 해석 해를 제시하였다. Yu and Zhang(2003)은 기존의 연구를 확장하여 다양한 형태를 갖는 천퇴 위에 원형 섬이 있는 경우에 대한 장파의 해석 해를 제시하였다. 천퇴의 중심이 천퇴 중심으로부터의 거리의 제곱에 비례하여 증가하는 경우 Homma(1950)가 제시한 지형이 되며, 천퇴 중심으로부터의 거리에 비례하여 증가하는 경우에는 Zhu and Zhang(1996)이 제시한 지형이 된다. 한편 Liu et al. (2004)는 Hunt(1979)의 근사식을 이용하여 Homma(1950)가 제시한 지형에 대해 더 큰 상대수심까지 적용이 가능하도록 확장된 해석 해를 제시하였다.

한편, Suh et al.(2005)은 기존의 돌출 지형에 대한 연구와는 달리 함몰 지형에 대한 연구를 수행하여 수심이 함몰지형의 중심으로부터의 거리의 제곱에 비례하여 감소하는 경우 그 위를 지나는 장파의 해석 해를 제시하였다. 본 연구에서는 Suh et al.(2005)의 연구를 확장하여 더 큰 상대수심까지 적용이 가능하며 다양한 형태를 갖는 함몰지형에 대한 환경사 방정식의 해석 해를 구하였다. 유도된 해석 해는 Coplenad(1995)가 제시한 쌍곡선형 환경사 방정식의 수치 해석 결과와 비교함으로써 타당성을 검증하였다.

2. 수학적 모델

회절과 굴절을 동시에 모의할 수 있는 환경사 방정식을 지배 방정식으로 사용하였으며 다음과 같이 표현된다.

$$\nabla \cdot (CC_g \nabla \eta) + \sigma^2 \frac{C_g}{C} \eta = 0 \quad (1)$$

여기서, ∇ 는 수평미분연산자, η 는 복소수로 표현되는 수면 변위이며, C 는 파속, C_g 는 군속도, σ 는 각주파수를 의미한다. 계산상의 편의를 위해 식 (1)을 극 좌표계의 형태로 바꾸면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$CC_g \frac{\partial^2 \eta}{\partial r^2} + \frac{d(CC_g)}{dr} \frac{\partial \eta}{\partial r} + \frac{1}{r} CC_g \frac{\partial \eta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} CC_g \frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta^2} + \sigma^2 \frac{C_g}{C} \eta = 0 \quad (2)$$

식 (2)의 해를 해석적으로 구하기 위해 선형 분산관계식 대신에 아래와 같이 Hunt(1979)가 제안한 근사식을 사용하였다.

$$(kh)^2 = \nu^2 + \frac{\nu}{\bar{P}(\nu)} \quad (3)$$

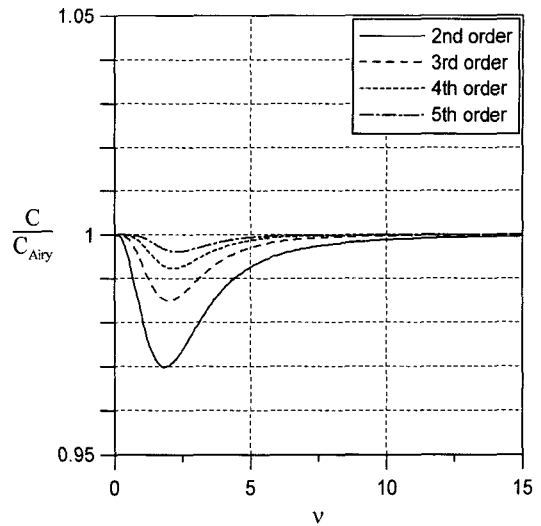


Fig. 1. Comparison of normalized phase speeds for different orders of $P(\nu)$ of Hunt formula.

$$P(\nu) = 1 + \frac{2}{3}\nu + \frac{16}{45}\nu^2 + \frac{152}{945}\nu^3 + \frac{896}{1417}\nu^4 + \dots \quad (4)$$

여기서, $\nu = \sigma^2 h/g$, k 는 파수, h 는 수심, g 는 중력가속도이며, 다항식 $P(\nu)$ 의 2차 이상의 항을 사용하면 식 (3)은 $\nu \rightarrow 0$ 인 경우와 $\nu \rightarrow \infty$ 인 경우의 선형 분산관계식의 근사식인 $\sigma^2 = gk^2 h$ 와 $\sigma^2 = gk$ 를 모두 만족한다. Fig. 1은 Hunt(1979)의 근사식을 이용하여 구한 파속과 선형 분산관계식으로부터 구한 파속을 비교한 것이다. $P(\nu)$ 의 차수가 증가할수록 선형 분산관계식의 결과와 가까워지지만 5차 이상의 항을 사용하면 본 논문에서 유도된 해석 해의 수렴성을 해석적으로 판단할 수 없기 때문에 본 연구에서는 4차까지의 다항식을 사용하였다. 이 경우 모든 ν 값에 대해서 상대오차가 1% 이내가 된다. 식 (3)을 사용하면 CC_g , C_g/C 그리고 $d(CC_g)/dr$ 를 다음과 같이 양함수의 형태로 표현할 수 있다(Liu et al., 2004).

$$CC_g = \frac{g^2 \nu(P(\nu)+1)}{2\sigma^2 P(\nu)+1} \approx \frac{g^2 \nu(\bar{P}(\nu)+1)}{2\sigma^2 \bar{P}(\nu)\nu+1} \quad (5)$$

$$\frac{C_g}{C} = \frac{P(\nu)+1}{2P(\nu)} \approx \frac{\bar{P}(\nu)+1}{2\bar{P}(\nu)} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{d(CC_g)}{dr} &= \frac{g^3(P(\nu)+1) - 2(P(\nu)\nu+1)dh}{2(P(\nu)\nu+1)(P(\nu)+1) dr} \\ &\approx \frac{g^3(\bar{P}(\nu)+1) - 2(\bar{P}(\nu)\nu+1)dh}{2(\bar{P}(\nu)\nu+1)(\bar{P}(\nu)+1) dr} \quad (7) \end{aligned}$$

여기서, $\bar{P}(\nu)$ 는 해석 해를 유도하기 위해 $P(\nu)$ 의 5차 이상의 항을 절삭한 식이다. 식 (5)~(7)을 식 (2)에 대입하면 다음과 같은 편미분방정식 형태의 근사식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 &g^2 \bar{P}(\nu) \nu (\bar{P}(\nu) + 1)^2 r^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial r^2} \\
 &+ g \sigma^2 \bar{P}(\nu) (3\bar{P}(\nu) + 1) - (2(\bar{P}(\nu) \nu + 1)) r^2 \frac{dh}{dr} \frac{\partial \eta}{\partial r} \\
 &+ g^2 \bar{P}(\nu) \nu (\bar{P}(\nu) + 1)^2 r \frac{\partial \eta}{\partial r} + g^2 \bar{P}(\nu) \nu (\bar{P}(\nu) + 1)^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta^2} \\
 &+ \sigma^4 (\bar{P}(\nu) + 1) (\bar{P}(\nu) + 1)^2 r^2 \eta = 0 \tag{8}
 \end{aligned}$$

본 연구에서 사용한 함몰지형의 모양은 Figs. 2 및 3과 같으며 다음과 같이 표현된다.

$$h = \begin{cases} h_0 \left(1 - \frac{r^\alpha}{a^\alpha}\right) & r < b \\ h_1 = h_0 \left(1 - \frac{b^\alpha}{a^\alpha}\right) & r \geq b \end{cases} \tag{9}$$

여기에서, h_0 은 함몰지형 중심에서의 수심, h_1 은 함몰지형 밖에서의 일정 수심, b 는 함몰지형의 반지름, 그리고 a 는 함몰지형을 자유수면까지 연장했을 경우 자유수면에서의 반지름에 해당되며 $a = b/\alpha \sqrt{1 - h_1/h_0}$ 의 관계식으로부터 구할 수 있다. Fig. 3에서 보듯이, $\alpha = 1$ 인 경우 원뿔 형태의 함몰지형이 되며, α 가 증가함에 따라 원통 형태에 접근한다.

해의 형태를 다음과 같이 가정하여 변수분리법과 Frobenius 급수를 사용하여 해를 구한다.

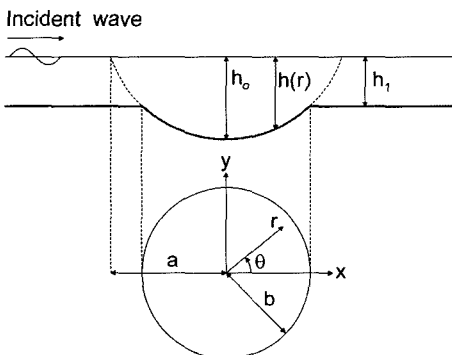


Fig. 2. Definition sketch of an axis-symmetric pit located in an otherwise constant depth region.

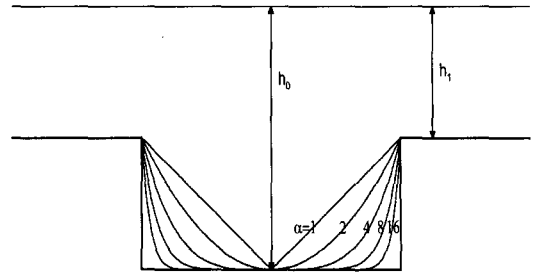


Fig. 3. Cross-sectional views along the x-axis of axis-symmetric pits of various values of α .

$$\eta_1(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(r) \cos n\theta \tag{10}$$

여기서, 아래첨자 1은 함몰지형의 내부($r < b$)를 의미하며,

$$R_n(r) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n} r^{m+c} \tag{11}$$

은 Frobenius 급수이다. 식 (9)~(11)을 식 (8)에 대입하여 정리하면 다음과 같이 변수 계수를 갖는 다항식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 &A(r) \sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n} (m+c)(m+c-1) r^{m+c} + \\
 &+ B(r) \sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n} (m+c) r^{m+c} \\
 &+ \{C(r) - n^2 D(r)\} \sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n} r^{m+c} = 0 \tag{12}
 \end{aligned}$$

변수 계수 $A(r)$, $B(r)$, $C(r)$, $D(r)$ 은 부록에 주어져 있다.

식 (12)에서 c 의 값을 구하기 위해 결정방정식(indicial equation)을 구해보면 다음과 같이 되며,

$$A_1 c(c-1) r^c + B_1 c r^c - n^2 D_1 r^c = 0 \tag{13}$$

A_1 , B_1 , D_1 이 모두 동일한 값을 가지기 때문에 $c = \pm n$ 의 값을 가진다. 따라서 해는 다음과 같이 두 개의 형태가 가능하다.

$$R_{1,n} = \sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n} r^{m+n} \tag{14}$$

$$R_{2,n} = R_{1,n} \ln r + \sum_{m=0}^{\infty} b_{m,n} r^{m-n} \tag{15}$$

실제의 물리 현상을 고려할 때, 함몰지형 중심($r = 0$)에

서의 파고는 유한한 값을 가지기 때문에 식 (15)은 본 연구의 해석 해로 적합하지 않다. 따라서 본 연구에서는 식 (14)의 해를 사용한다. 식 (14)를 식 (12)에 대입하여 동차 항들을 모아서 정리하면 $a_{m,n}$ 의 관계식을 구할 수 있고 이 값을 이용하면 함몰지형 내부에서의 해석 해의 형태를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\eta_1 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n R_n \cos n\theta \quad (16)$$

여기서, A_n 은 임의의 값을 가지는 상수이다. 함몰지형을 둘러싸고 있는 일정 수심 영역에서의 해는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\eta_2 = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n i^n \varepsilon_n J_n(kr) + D_n H_n^{(1)}(kr)] \cos n\theta \quad (17)$$

여기서, a_n 는 입사파의 파고, i^n 는 단위 허수, J_n 은 제 1종 n 차 Bessel함수, $H_n^{(1)}$ 은 제 1종 n 차 Hankel 함수, D_n 은 미지 상수이다. ε_n 은 Jacobian symbol을 의미하며 다음과 같이 정의된다.

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 2, & n \geq 1 \end{cases} \quad (18)$$

식 (16) 및 (17)에 있는 미지수를 구하기 위해 $r = b$ 인 지점에서 다음과 같은 정합 조건을 사용한다.

$$\eta_1 = \eta_2 \quad \text{at} \quad r = b \quad (19)$$

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial r} = \frac{\partial \eta_2}{\partial r} \quad \text{at} \quad r = b \quad (20)$$

식 (16)과 (17)을 식 (19) 및 (20)에 대입하여 정리하면 다음과 같이 미지수 값이 결정된다.

$$A_n = a_n k i^n \varepsilon_n \frac{J_n(kb)H_n^{(1)}(kb) - J_n'(kb)H_n^{(1)}(kb)}{kR_n(b)H_n^{(1)}(kb) - R_n'(b)H_n^{(1)}(kb)} \quad (21)$$

$$D_n = a_n i^n \varepsilon_n \frac{kJ_n'(kb)R_n(b) - J_n(kb)R_n'(b)}{H_n^{(1)}(kb)R_n'(b) - kH_n^{(1)}(kb)R_n(b)} \quad (22)$$

마지막으로 식 (21)과 (22)을 식 (16) 및 (17)에 대입하면 전체 영역에서의 해를 구할 수 있다.

3. 결과 및 토의

3.1 해석 해의 수렴성

Frobenius 이론에 의하면 Frobenius 급수가 수렴하는 범

위는 원점에서부터 가장 가까이에 있는 특이점(singular point)까지의 거리 이내이다. 특이점을 구하기 위해 식 (8)의 편미분 방정식에서 이차 미분항의 계수 $\bar{P}(\nu)\nu(\bar{P}(\nu)+1)^2 r^2$ 또는 $A(r)r^2$ 가 0이 되는 r 의 값을 구해보면 다음과 같다.

$$r = 0, a \quad (23)$$

$$r = \frac{\alpha}{\sqrt{a^\alpha + \frac{1.63009 \pm 1.10252i}{\delta}}} \quad (24)$$

$$r = \frac{\alpha}{\sqrt{a^\alpha - \frac{0.357769 \pm 1.98923i}{\delta}}} \quad (25)$$

$$r = \frac{\alpha}{\sqrt{a^\alpha + \frac{1.9903 \pm 1.55755i}{\delta}}} \quad (26)$$

$$r = \frac{\alpha}{\sqrt{a^\alpha - \frac{0.717978 \pm 2.10671i}{\delta}}} \quad (27)$$

여기서, $\delta = \sigma^2 h_0 / g a^\alpha$ 이다.

δa 양의 값을 갖기 때문에 식 (23), (24) 및 (26)의 값들은 모두 a 보다 같거나 크다. 식 (23)의 0은 본 연구에서 사용한 Frobenius 급수의 원점이기 때문에 특이점에서 제외한다. 식 (25)와 (27)의 경우 δ 값에 따라 r 의 값이 변하면서 $\alpha = 1$ 인 경우에 $\delta = 0.69$ 에서 $r = 0.94655a$ 의 최소값을 갖는다. 본 연구에서 Frobenius 급수를 사용하는 영역은 $0 \leq r < b$ 의 범위에 있기 때문에 $b = a^\alpha \sqrt{1 - h_1/h_0}$ 의 정의로부터 b 가 $0.94655a$ 보다 커지기 위해서는 h_1/h_0 이 1보다 훨씬 작아야 한다. 하지만 이러한 경우는 매우 드문 경우이며 함몰지형 주변부의 경사가 매우 커서 환경사 방정식을 적용할 수 없다. 따라서 환경사 방정식을 적용할 수 있는 영역에서는 본 연구의 해석 해가 수렴한다고 할 수 있다.

식 (16) 및 (17)의 해석 해는 무한 급수로 표시되지만, 실제 계산에서는 적당한 항까지만 포함시켜야 한다. 즉, 식 (16) 및 (17)의 무한 급수가 원하는 정밀도를 나타낼 수 있도록 충분히 큰 정수 N 을 찾아야 한다. 식 (14)의 Frobenius 급수에 대해서도 정확한 해를 줄 수 있도록 항의 개수, M 을 충분히 크게 잡아야 한다. 다양한 테스트를 통해서 $N = 70$ 이면 식 (16) 및 (17)이 N 에 대해서는 수렴하는 값을 보이는 것을 알 수 있었으며, M 에 관해서는 다음의 식을 만족하면 수렴한다는 것을 알 수 있었다. 따라서 본 논문에서 구한 모든 해석 해는 $N = 70$ 및 식 (28)을 만족할 때까지 계산하였다.

$$\left| \frac{a_{M,40} b^{M+40}}{\sum_{m=0}^M a_{m,40} b^{m+40}} \right| \quad (28)$$

3.2 기존 해와의 비교

해의 타당성을 검토하기 위해 본 연구에서 구한 해석 해와 기존의 결과를 비교해 보았다. 일정 수심 영역에서의 수심(h_1)은 3.2 m, 함몰지형 중심에서의 수심(h_0)는 6.4 m, 함몰지형의 반지름(b)은 $0.5 L_1$ 으로 고정하고, 일정 수심 영역에서의 상대수심($k_1 h_1$)을 0.083부터 10.0까지 변화시켜 천해조건을 만족하는 경우와 만족하지 않는 경우에 대해 비교해 보았다. 이 경우 함몰지형 중심에서의 상대수심($k_0 h_0$)은 0.118에서 20.0까지 변화한다. 여기서, L_1 과 k_1 은 각각 수심 h_1 에 해당하는 파장과 파수이며, k_0 는 수심 h_0 에 해당하는 파수이다. 함몰지형의 형상은 $\alpha=2$ 를 사용하여

반지름 방향으로 포물선 형태가 되도록 하였다. Figs. 4~11은 원점을 통과하는 종단면과 횡단면에 대해 본 연구에서 구한 해석 해와 Suh et al.(2005)가 제시한 장파의 해석 해, 그리고 Copeland(1985)가 개발한 쌍곡선형 완경사 방정식을 유한차분법으로 풀 결과를 비교한 것이다. 이 그림들에서 y 축의 K_d 는 해당 지점에서의 파고를 입사파고로 나눈 회절계수이다. 본 연구에서 구한 해석 해는 $P(\nu)$ 를 3차 항까지만 고려한 경우와 4차 항까지 고려한 경우에 대하여 제시하였다.

장파의 조건($k_1 h_1 < \pi/10$)을 만족시키는 Figs. 4 및 5에서는 4개의 그래프가 거의 동일한 값을 나타낸다. 그러나, 장

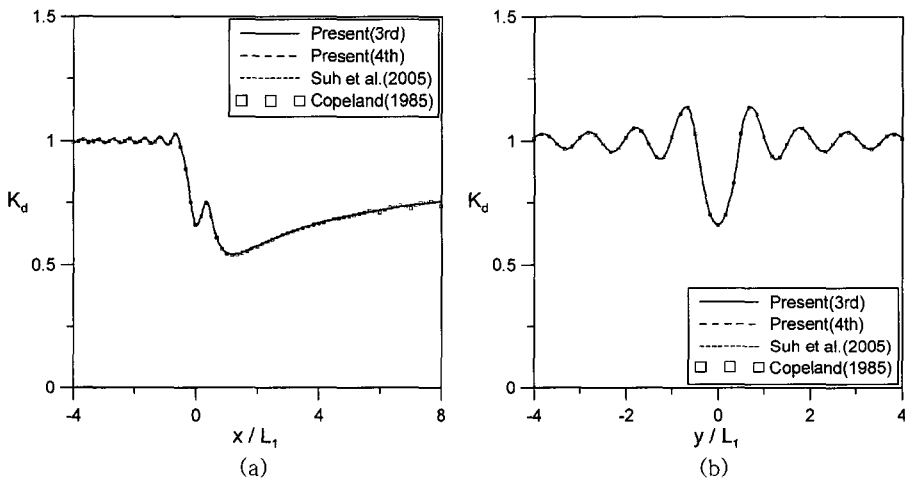


Fig. 4. Comparison among analytic and numerical solutions for diffraction coefficients for an axi-symmetric pit with $h_1 = 3.2$ m, $h_0 = 6.4$ m, $b = 0.5 L_1$, $k_1 h_1 = 0.083$, $k_0 h_0 = 0.118$, and $\alpha = 2$: along (a) x -axis; (b) y -axis.

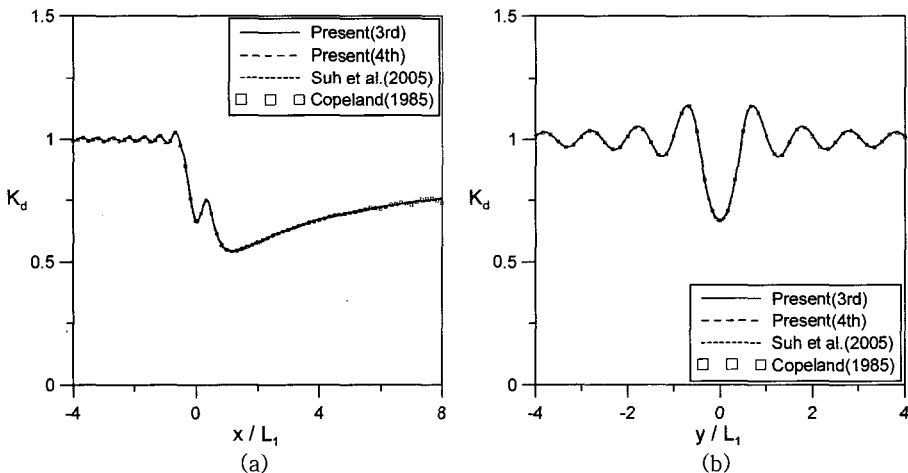


Fig. 5. Same as Fig. 4 except for $k_1 h_1 = 0.167$ and $k_0 h_0 = 0.237$.

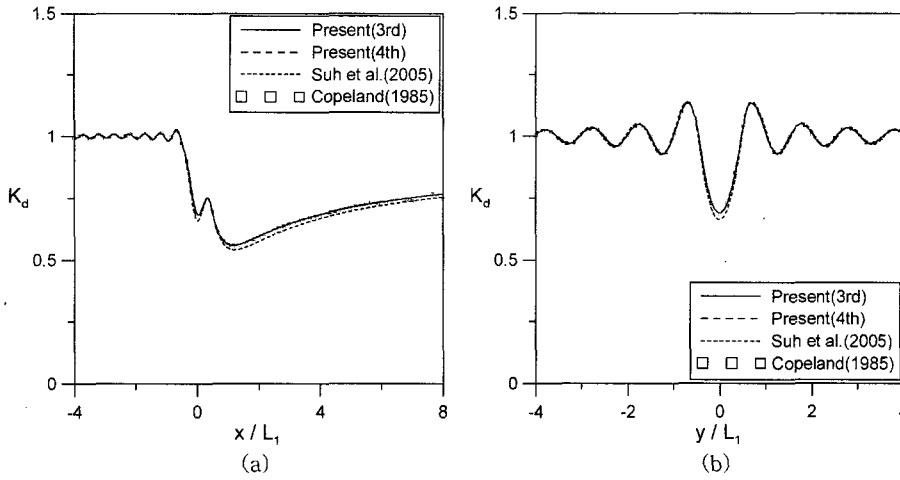


Fig. 6. Same as Fig. 4 except for $k_1 h_1 = 0.334$ and $k_0 h_0 = 0.481$.

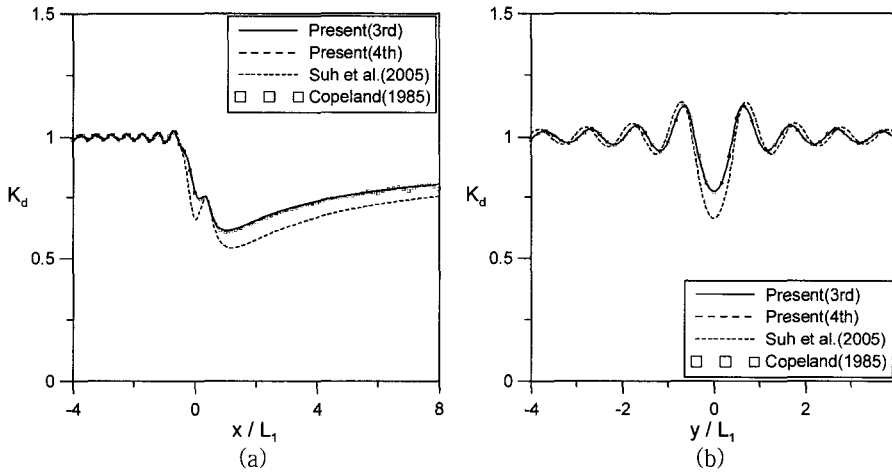


Fig. 7. Same as Fig. 4 except for $k_1 h_1 = 0.668$ and $k_0 h_0 = 1.015$.

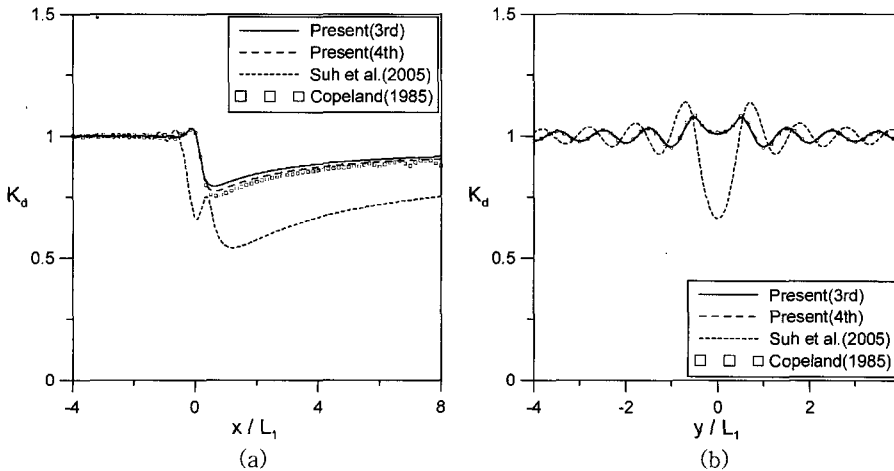


Fig. 8. Same as Fig. 4 except for $k_1 h_1 = 1.336$ and $k_0 h_0 = 2.368$.

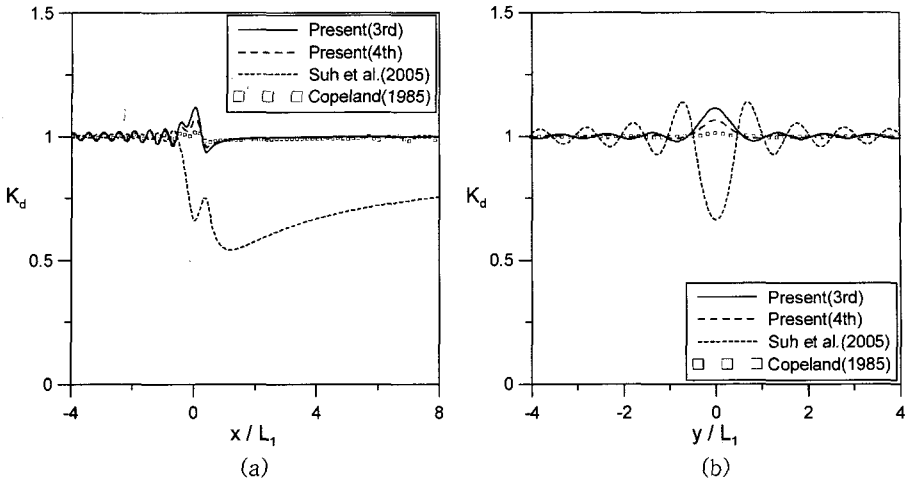


Fig. 9. Same as Fig. 4 except for $k_1 h_1 = 3.0$ and $k_0 h_0 = 5.97$.

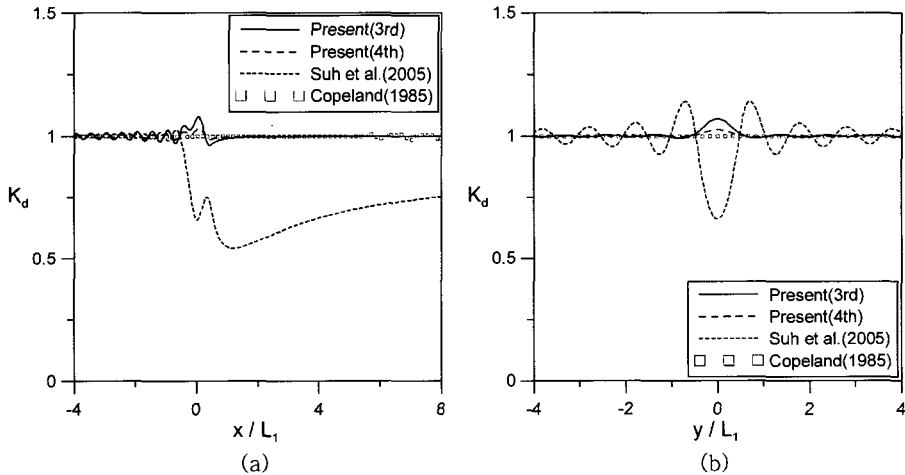


Fig. 10. Same as Fig. 4 except for $k_1 h_1 = 5.0$ and $k_0 h_0 = 10.0$.

파의 조건에서 멀어짐에 따라(Figs. 6~11참조) 본 연구의 해석 해와 Copeland(1985)의 수치 해는 비슷한 값을 보이는 반면, 장파의 가정을 갖는 Suh et al.(2005)의 해석 해는 큰 차이를 보이기 시작한다. 또한, 본 연구에서 구한 해석 해의 경우, $P(\nu)$ 를 4차 항까지 포함한 해석 해가 3차 항까지만 포함한 해석 해보다 더 정확한 결과를 주는 것을 볼 수 있다. x/L_1 이 5 이상 되는 지역에서 x 축을 따라 수치 모델의 결과가 약간 진동하는 것은 하류 경계 조건에서 사용한 스폰지 경계층이 파를 완전히 흡수하지 못하여 파의 일부가 반사되어 생긴 현상이다. 전체적으로 함몰지형의 앞쪽에서는 함몰지형에서 반사된 파와 입사파가 중첩되어 부분 정상파를 형성하며, 함몰지형의 양 옆쪽으로

는 함몰지형 위를 통과하며 굴절된 파와 입사파가 중첩되어 역시 부분 정상파를 형성하는 것을 알 수 있다. 상대수심이 증가할수록 함몰지형에 의한 파의 굴절, 회절 및 반사가 줄어들어 상대적으로 함몰지형 후면에서의 파고가 증가하는 것을 알 수 있다. 상대수심이 비교적 작은 경우에는 함몰지형 내부의 후반부에(즉, $x/L_1 \approx 0.4$ 부근에) 파고의 작은 침두가 발생하는데, 이는 함몰지형의 후벽에서 파가 반사되어 생기는 현상으로 추정된다. Figs. 8~11에서 보듯이 상대수심이 아주 커지면 이 침두는 사라진다. 본 연구의 해석 해와 Copeland(1985)의 수치 해 사이의 차이는 상대수심이 커질수록 증가하다가 다시 작아지는 것을 관찰할 수 있다. 이 결과는 Fig. 1에서 보는 바와 같이 Hunt

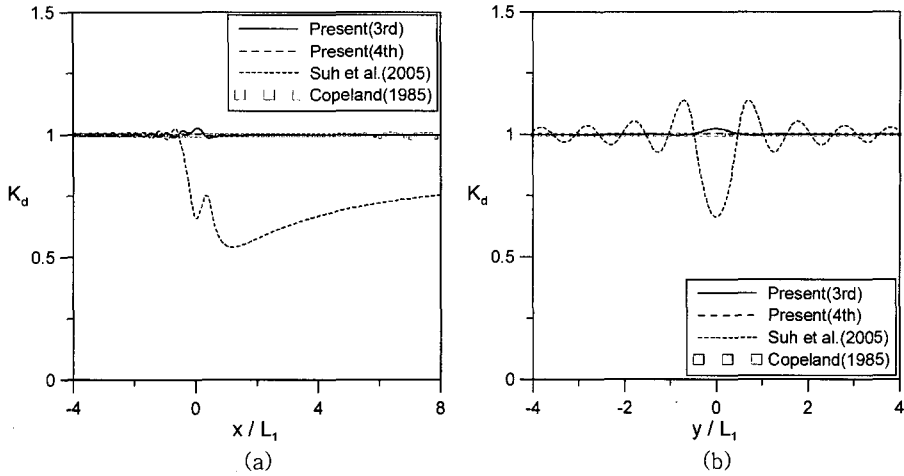


Fig. 11. Same as Fig. 4 except $k_1 h_1 = 10.0$ and $k_0 h_0 = 20.0$.

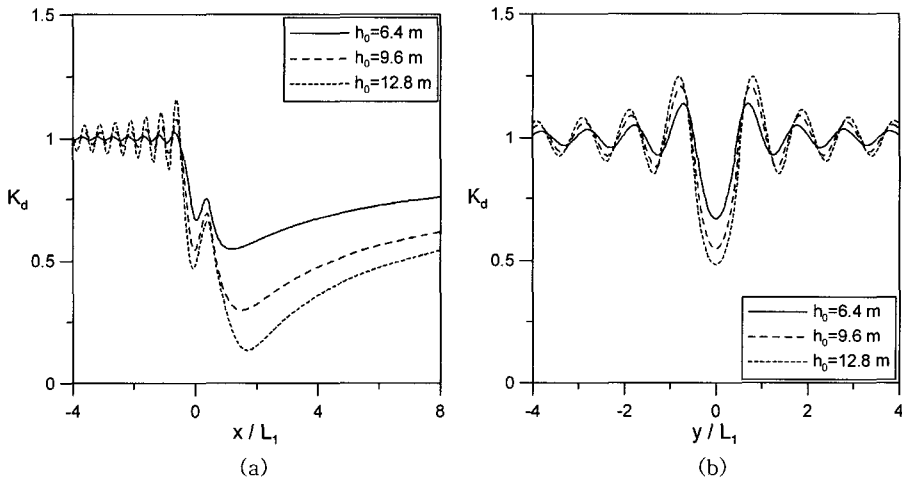


Fig. 12. Comparison of diffraction coefficients among pits with different central depths but with the same radius and $h_1 = 3.2$ m, $b = 0.5 L_1$, $k_1 h_1 = 0.167$, and $\alpha = 2$: along (a) x -axis; (b) y -axis.

(1979)의 근사식이 중간수심에서 가장 큰 오차를 보이며 천해와 심해로 갈수록 오차가 줄어들기 때문이다.

3.3 함몰지형의 형상에 따른 영향

마지막으로 함몰지형의 형상이 파랑 변형에 미치는 영향에 대해 조사해 보았다. Figs. 12 및 13은 $\alpha = 2$ 인 경우에 대하여 함몰지형 중심에서의 수심을 변화시키면서 회절 계수들을 비교한 것이다. $h_1 = 3.2$ m, $b = 0.5 L_1$ 으로 고정하고 $k_1 h_1 = 0.167$ 및 1.336인 경우에 대해 각각 h_0 의 값을 6.4, 9.6, 12.8 m로 변화시키면서 해석 해를 구하였다. 전체적으로, 함몰지형 중앙의 수심이 증가할수록 굴절

과 반사가 크게 일어나, 함몰지형의 앞쪽에 생기는 부분 정상파와 y 축 방향으로 생기는 부분 정상파의 파고 변화가 커지는 반면, 함몰지형의 뒤쪽에서는 파고가 감소한다. $k_1 h_1 = 0.167$ 인 경우 수심이 증가함에 따라 x 축을 따라 파고의 최소값이 파의 진행방향으로 이동하지만 $k_1 h_1 = 1.336$ 인 경우에는 파고의 최소값이 수심의 증가에 상관없이 동일한 위치에 발생하는 것을 알 수 있다. y 축을 따라서는 두 그래프 모두 수심이 증가함에 따라 국부 최소값 및 국부 최대값이 바깥 쪽으로 이동하는 경향을 보이지만 $k_1 h_1 = 1.336$ 인 경우는 그 이동 폭이 미소하다.

Figs. 14 및 15는 $h_0 = 6.4$ m, $h_1 = 3.2$ m, $\alpha = 2$ 로 고정

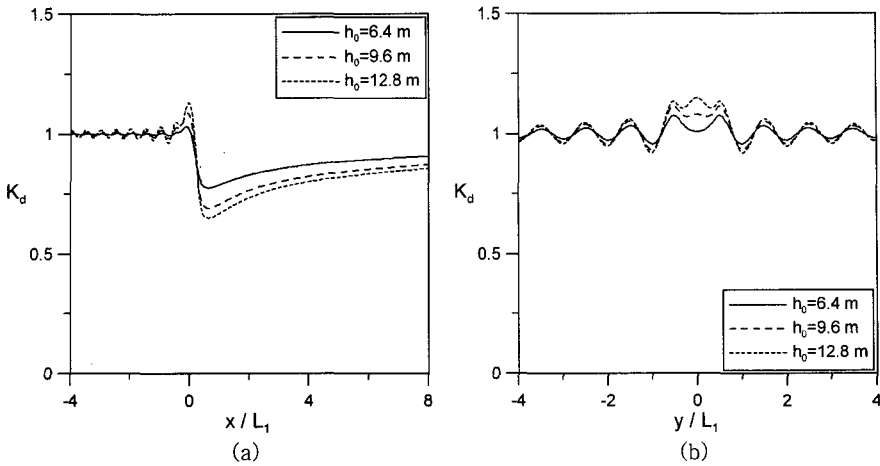


Fig. 13. Same as Fig. 12 except for $k_1 h_1 = 1.336$.

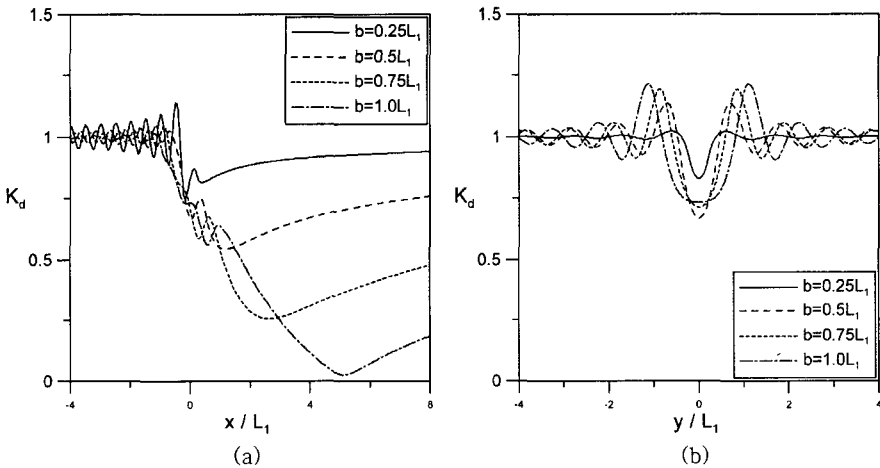


Fig. 14. Comparison of diffraction coefficients among pits with different radii but with the same central depth and $h_0 = 6.4$ m, $h_1 = 3.2$ m, $k_1 h_1 = 0.167$ and $\alpha = 2$; along (a) x-axis; (b) y-axis.

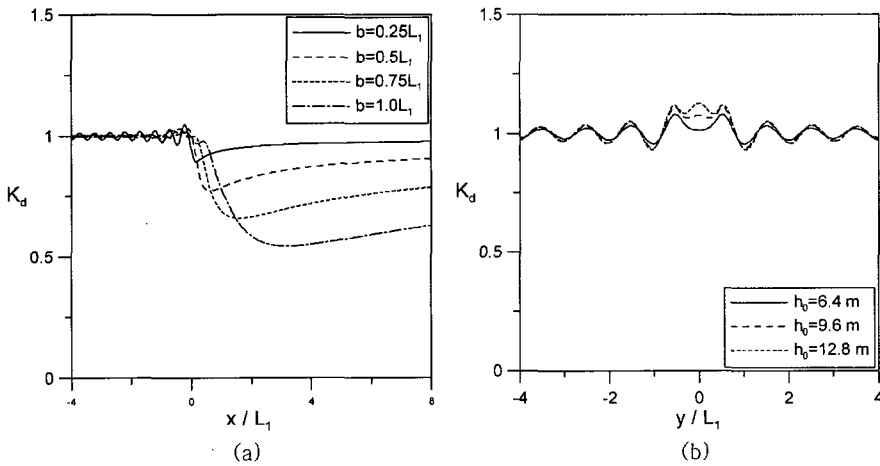


Fig. 15. Same as Fig. 14 except for $k_1 h_1 = 1.336$.

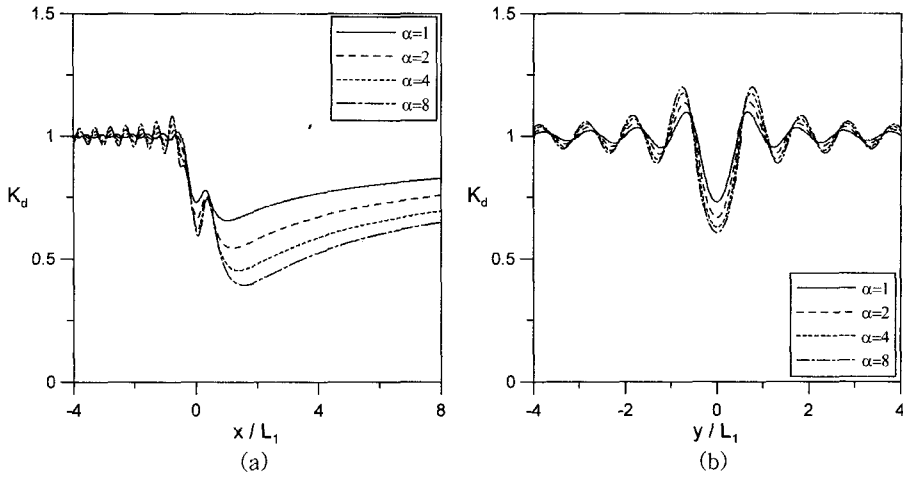


Fig. 16. Comparison of diffraction coefficients among pits with the same central depth and radius but with different α 's and $h_0=6.4$ m, $h_1=3.2$ m, $b=0.5 L_1$ and $k_1 h_1=0.167$: along (a) x-axis; (b) y-axis.

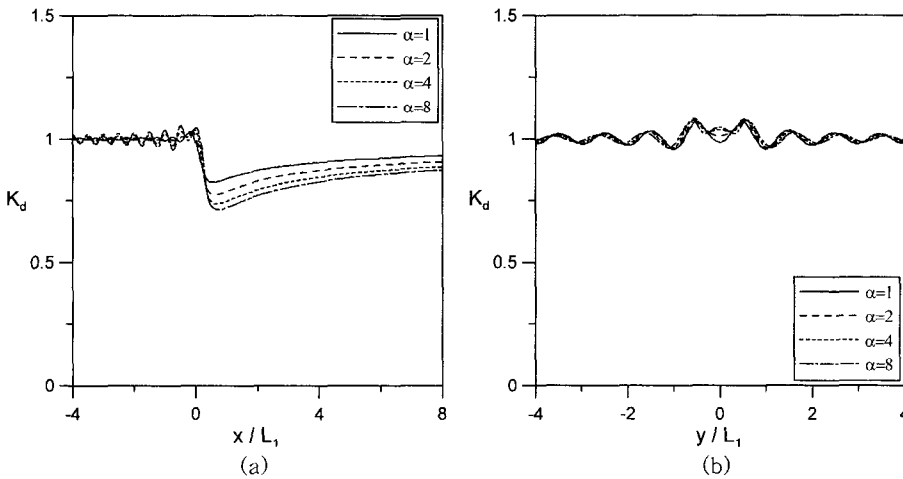


Fig. 17. Same as Fig. 16 except for $k_1 h_1=1.336$.

하고 $k_1 h_1=0.167$ 및 1.336에 대하여 b/L_1 을 0.25, 0.5, 0.75 및 1.0으로 변화시켜서 함몰지형의 반지름을 증가시키면서 파랑 변형을 계산한 것이다. $k_1 h_1=0.167$, 1.336인 두 경우 모두 함몰지형의 반지름이 커질수록 내부 기울기가 감소하여, 반사파가 감소되고 함몰지역 앞쪽의 부분 정상파의 파고 변화가 감소하는 것을 알 수 있다. 한편, 반지름이 커질수록 굴절 현상은 크게 발생하여 함몰지역 뒤쪽에서의 파고는 감소하고 y 축을 따라 생기는 파고의 국부 최대값은 커지는 경향을 보인다.

Figs. 16 및 17은 $h_0=6.4$ m, $h_1=3.2$ m, $b=0.5 L_1$ 으로 고정하고 $k_1 h_1=0.167$ 및 1.336에 대하여 α 값의 변화에 따른 파랑 변형을 조사한 그림이다. Fig. 3에서 알 수

있듯이 α 값이 증가함에 따라 함몰지형 측벽의 기울기가 증가하며, 이에 따라 발생하는 현상들은 함몰지형의 중심에서의 수심이 증가하면서 기울기가 증가하여 생기는 현상들(Figs. 12, 13)과 비슷한 모습을 보인다.

Figs. 18 및 19는 $h_0=6.4$ m, $h_1=3.2$ m, $b=0.5 L_1$ 및 $k_1 h_1=0.167$, 1.336에 대하여 x - y 평면상에 회절계수 값을 그린 그림이다. 앞서 설명한 대로, 함몰지형 앞쪽에서는 반사된 파와 입사파가 중첩되어 부분 정상파가 형성되었으며, 함몰지형 양 옆으로는 굴절파와 입사파가 중첩되어 부분 정상파가 형성되었다. 상대 수심이 커질수록 반사와 회절이 적게 일어나 함몰지형 후면에서의 파고가 증가한 것을 알 수 있다.

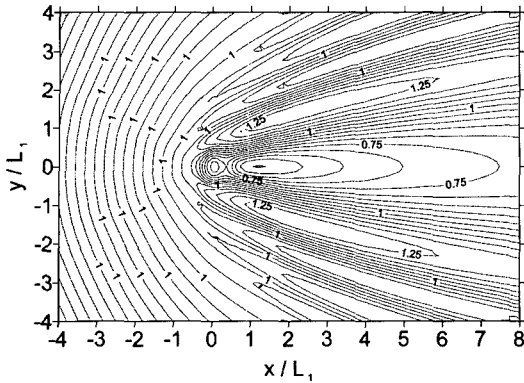


Fig. 18. Contours of diffraction coefficient for a bowl pit with $h_0=6.4$ m, $h_1=3.2$ m, $b=0.5 L_1$ and $k_1 h_1=0.167$.

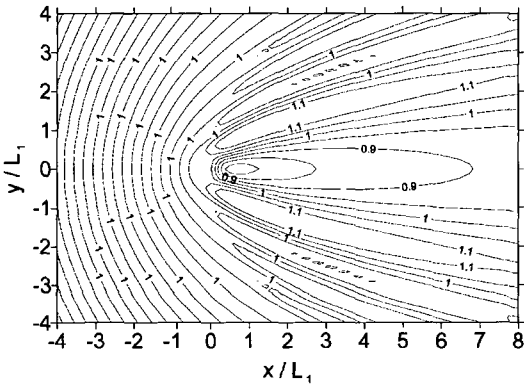


Fig. 19. Same as Fig. 18 except for $k_1 h_1=1.336$.

4. 결 론

본 연구에서는 축대칭 함몰지형 위를 통과하는 파의 변형에 관한 환경사 방정식의 해석 해를 유도하였다. 변수 분리법을 사용하여 지배 방정식을 변수 계수를 갖는 상미분 방정식으로 변환시켰다. Hunt(1979)의 4차 근사식을 사용하여 상미분 방정식의 계수들을 양함수의 형태로 바꾸었으며 Frobenius 급수를 사용하여 해석 해를 구하였다. Frobenius 이론에 의하여 해석 해가 대부분의 파랑과 수심 조건에 대해 수렴성을 보인다는 것을 알 수 있었으며, 수치 모델과의 비교를 통해 천해역과 보다 깊은 수심에 대해 꽤 정확한 결과를 보인다는 것을 알 수 있었다. 더욱 정확한 해석해를 구하기 위해서는 5차 이상의 Hunt(1979)의 근사식을 사용하면 되지만 이 경우 해석해의 적용범위가

가 좁아지며 식이 훨씬 복잡해지는 문제점이 있다. 따라서 중간 수심 영역에서 해석해의 정확성을 높이기 위해서는 단순하면서도 정확한 양함수 형태의 분산관계식을 유도하여 이용할 필요가 있다. 마지막으로 해석 해를 이용하여 함몰지형의 수심, 반지름 및 기울기가 변화하는 경우, 그리고 상대수심이 변화하는 경우에 대한 파랑 변형을 살펴보았다.

감사의 글

이 논문은 두뇌한국 21사업의 지원을 받았다.

참고문헌

- Copeland, G.J.M. (1985). A practical alternative to the mild-slope wave equation, *Coastal Eng.*, 9, 125-149.
- Homma, S. (1950). On the behavior of seismic sea waves around circular island, *Geophys. Mag.*, XXI, 199-208.
- Hunt, J.N. (1979). Direct solution of wave dispersion equation, *J. Waterw., Port, Coast., Ocean Div. Proc. ASCE*, 105, 457-459.
- Jonsson, I.G. and Skovgaard, O. and Brink-Kjaer, O. (1976). Diffraction and refraction calculations for waves incident on an island, *J. Marine Res.*, 34, 469-496.
- Liu, H.-W. Lin, P. and Shankar, N.J. (2004). An analytical solution of the mild-slope equation for waves around a circular island on a paraboloidal shoal, *Coastal Eng.*, 51, 421-437.
- Suh, K.D. Jung, T.H. and Haller, M.C. (2005). Long waves propagating over a circular bowl pit, *Wave Motion*, 42, 143-154.
- Vastano, A.C. and Reid, R.O. (1967). Tsunami response for island: verification of a numerical procedure, *J. Marine Res.*, 25, 129-139.
- Yu, X. and Zhang, B. (2003). An extended analytic solution for combined refraction and diffraction of long waves over circular shoals, *Ocean Eng.*, 30, 1253-1267.
- Zhu, S. and Zhang, Y. (1996). Scattering of long waves around a circular island mounted on a conical shoal, *Wave Motion*, 23, 353-362.

Received September 6, 2006

Accepted November 21, 2006

부록: 변수 계수

$$A(r) = \overline{P}(v)(a^\alpha - r^\alpha)[\overline{P}(v) + 1]^2 \\ = A_1 + A_2 r^\alpha + A_3 r^{2\alpha} + A_4 r^{3\alpha} + A_5 r^{4\alpha} + A_6 r^{5\alpha} + A_7 r^{6\alpha} + A_8 r^{7\alpha} \\ + A_9 r^{8\alpha} + A_{10} r^{9\alpha} + A_{11} r^{10\alpha} + A_{12} r^{11\alpha} + A_{13} r^{12\alpha} + A_{14} r^{13\alpha} \quad (29)$$

$$A_1 = 4a^\alpha + 5.333333333333a^{2\alpha}e + 5.066666667a^{3\alpha}e^2 + 3.953439153a^{4\alpha}e^3 \\ + 2.684162257a^{5\alpha}e^4 + 1.460599647a^{6\alpha}e^5 + 0.7120929425a^{7\alpha}e^6 \\ + 0.3043151834a^{8\alpha}e^7 + 0.112215129a^{9\alpha}e^8 + 0.03384213214a^{10\alpha}e^9 \\ + 0.009167879378a^{11\alpha}e^{10} + 0.001927981749a^{12\alpha}e^{11} \\ + 0.0002525543343a^{13\alpha}e^{12} \quad (30)$$

$$A_2 = -4.0 - 10.66666667a^\alpha e - 15.2a^{2\alpha}e^2 - 15.81375661a^{3\alpha}e^3 \\ - 13.42081129a^{4\alpha}e^4 - 8.763597884a^{5\alpha}e^5 - 4.984650598a^{6\alpha}e^6 \\ - 2.434521467a^{7\alpha}e^7 - 1.009936161a^{8\alpha}e^8 - 0.3384213214a^{9\alpha}e^9 \\ - 0.1008466732a^{10\alpha}e^{10} - 0.02313578099a^{11\alpha}e^{11} \\ - 0.003283206347a^{12\alpha}e^{12} \quad (31)$$

$$A_3 = 5.3333333333e + 15.2a^\alpha e^2 + 23.72063492a^{2\alpha}e^3 + 26.84162257a^{3\alpha}e^4 \\ + 21.90899471a^{4\alpha}e^5 + 14.95395179a^{5\alpha}e^6 + 8.520825136a^{6\alpha}e^7 \\ + 4.039744643a^{7\alpha}e^8 + 1.522895946a^{8\alpha}e^9 + 0.5042333658a^{9\alpha}e^{10} \\ + 0.1272467954a^{10\alpha}e^{11} + 0.01969923808a^{11\alpha}e^{12} \quad (32)$$

$$A_4 = -5.06666667e^2 - 15.81375661a^\alpha e^3 - 26.84162257a^{2\alpha}e^4 \\ - 29.21199295a^{3\alpha}e^5 - 24.92325299a^{4\alpha}e^6 - 17.04165027a^{5\alpha}e^7 \\ - 9.426070834a^{6\alpha}e^8 - 4.061055857a^{7\alpha}e^9 - 1.512700097a^{8\alpha}e^{10} \\ - 0.4241559847a^{9\alpha}e^{11} - 0.07223053962a^{10\alpha}e^{12} \quad (33)$$

$$A_5 = 3.953439153e^3 + 13.42081129a^\alpha e^4 + 21.90899471a^{2\alpha}e^5 \\ + 24.92325299a^{3\alpha}e^6 + 21.30206284a^{4\alpha}e^7 + 14.13910625a^{5\alpha}e^8 \\ + 7.106847749a^{6\alpha}e^9 + 3.025400195a^{7\alpha}e^{10} + 0.954350657a^{8\alpha}e^{11} \\ + 0.1805763491a^{9\alpha}e^{12} \quad (34)$$

$$A_6 = -2.684162257e^4 - 8.763597884a^\alpha e^5 - 14.95395179a^{2\alpha}e^6 \\ - 17.04165027a^{3\alpha}e^7 - 14.13910625a^{4\alpha}e^8 - 8.528217299a^{5\alpha}e^9 \\ - 4.235560273a^{6\alpha}e^{10} - 1.526961545a^{7\alpha}e^{11} - 0.3250374283a^{8\alpha}e^{12} \quad (35)$$

$$A_7 = 1.460599647e^5 + 4.984650598a^\alpha e^6 + 8.520825136a^{2\alpha}e^7 \\ + 9.426070834a^{3\alpha}e^8 + 7.106847749a^{4\alpha}e^9 + 4.235560273a^{5\alpha}e^{10} \\ + 1.781455136a^{6\alpha}e^{11} + 0.4333832377a^{7\alpha}e^{12} \quad (36)$$

$$A_8 = -0.7120929425e^6 - 2.434521467a^\alpha e^7 - 4.039744643a^{2\alpha}e^8 \\ - 4.061055857a^{3\alpha}e^9 - 3.025400195a^{4\alpha}e^{10} - 1.526961545a^{5\alpha}e^{11} \\ - 0.4333832377a^{6\alpha}e^{12} \quad (37)$$

$$A_9 = 0.3043151834e^7 + 1.009936161a^\alpha e^8 + 1.522895946a^{2\alpha}e^9 \\ + 1.512700097a^{3\alpha}e^{10} + 0.9543509657a^{4\alpha}e^{11} + 0.3250374283a^{5\alpha}e^{12} \quad (38)$$

$$A_{10} = -0.112215129e^8 - 0.3384213214a^\alpha e^9 - 0.5042333658a^{2\alpha}e^{10} \\ - 0.4241559847a^{3\alpha}e^{11} - 0.1805753491a^{4\alpha}e^{12} \quad (39)$$

$$A_{11} = 0.03384213214e^9 + 0.1008466732a^\alpha e^{10} + 0.1272467954a^{2\alpha}e^{11} \\ + 0.07223053962a^{3\alpha}e^{12} \quad (40)$$

$$A_{12} = -0.009167879378e^{10} - 0.02313578099a^\alpha e^{11} - 0.01969923808a^{2\alpha}e^{12} \quad (41)$$

$$A_{13} = 0.001927981749e^{11} + 0.003283206347a^\alpha e^{12} \quad (42)$$

$$A_{14} = 0.0002525543343e^{12} \quad (43)$$

$$B(r) = \overline{P}(v)\{-\alpha(3\overline{P}(v) - 2\overline{P}(v)\nu + 1)r^\alpha + (a^\alpha - r^\alpha)(\overline{P}(v) + 1)^2\} \\ = B_1 + B_2 r^\alpha + B_3 r^{2\alpha} + B_4 r^{3\alpha} + B_5 r^{4\alpha} + B_6 r^{5\alpha} + B_7 r^{6\alpha} + B_8 r^{7\alpha} \\ + B_9 r^{8\alpha} + B_{10} r^{9\alpha} + B_{11} r^{10\alpha} + B_{12} r^{11\alpha} + B_{13} r^{12\alpha} + B_{14} r^{13\alpha} \quad (44)$$

$$B_1 = 4a^\alpha + 5.333333333333a^{2\alpha}e + 5.066666667a^{3\alpha}e^2 \\ + 3.953439153a^{4\alpha}e^3 + 2.684162257a^{5\alpha}e^4 + 1.460599647a^{6\alpha}e^5 \\ + 0.7120929425a^{7\alpha}e^6 + 0.304315834a^{8\alpha}e^7 + 0.112215129a^{9\alpha}e^8 \\ + 0.03384213214a^{10\alpha}e^9 + 0.009167879378a^{11\alpha}e^{10} + 0.001927981749a^{12\alpha}e^{11} \\ + 0.0002525543343a^{13\alpha}e^{12} \quad (45)$$

$$B_2 = -4.0 - 4\alpha - 10.66666667a^\alpha e - 2.666666667a^{2\alpha}e^2 \\ - 15.22222222a^{2\alpha}e^2 - 1.155555556a^{2\alpha}e^3 - 15.81375661a^{3\alpha}e^3 \\ - 0.237037037a^{3\alpha}e^3 - 13.42081129a^{4\alpha}e^4 + 0.1264197531a^{4\alpha}e^4 \\ - 8.763597884a^{5\alpha}e^5 + 0.3386243386a^{5\alpha}e^5 - 4.984650598a^{6\alpha}e^6 \\ + 0.184856639a^{6\alpha}e^6 - 2.434521467a^{7\alpha}e^7 + 0.08063917583a^{7\alpha}e^7 \\ - 1.009936161a^{8\alpha}e^8 + 0.02868189954a^{8\alpha}e^8 - 0.3384213214a^{9\alpha}e^9 \\ + 0.007990976985a^{9\alpha}e^9 - 0.1008466732a^{10\alpha}e^{10} - 0.02313578099a^{11\alpha}e^{11} \\ - 0.003283206347a^{12\alpha}e^{12} \quad (46)$$

$$B_3 = 5.3333333333e + 2.666666667a^\alpha e + 15.2a^{2\alpha}e^2 \\ + 2.311111111a^\alpha e^2 + 23.72063492a^{2\alpha}e^3 + 0.711111111a^{2\alpha}e^3 \\ + 26.84162257a^{3\alpha}e^4 - 0.5056790123a^{3\alpha}e^4 + 21.90899471a^{4\alpha}e^5 \\ - 1.693121693a^{4\alpha}e^5 + 14.95395179a^{5\alpha}e^6 - 1.109139834a^{5\alpha}e^6 \\ + 8.520825136a^{6\alpha}e^7 - 0.5644742308a^{6\alpha}e^7 + 4.039744643a^{7\alpha}e^8 \\ - 0.2294551963a^{7\alpha}e^8 + 1.522895946a^{8\alpha}e^9 - 0.07191879287a^{8\alpha}e^9 \\ + 0.5042333658a^{9\alpha}e^{10} + 0.1272467954a^{10\alpha}e^{11} + 0.01969923808a^{11\alpha}e^{12} \quad (47)$$

$$B_4 = -5.066666667e^2 - 1.155555556a^\alpha e^3 - 15.81375661a^{2\alpha}e^3 \\ - 0.711111111a^\alpha e^3 - 26.84162257a^{2\alpha}e^4 + 0.7585185185a^{2\alpha}e^4 \\ - 29.21199295a^{3\alpha}e^5 + 3.386243386a^{3\alpha}e^5 - 24.92325299a^{4\alpha}e^6 \\ + 2.772849584a^{4\alpha}e^6 - 17.04165027a^{5\alpha}e^7 + 1.693422693a^{5\alpha}e^7 \\ - 9.426070834a^{6\alpha}e^8 + 0.803093187a^{6\alpha}e^8 - 4.061055857a^{7\alpha}e^9 \\ + 0.2876751715a^{7\alpha}e^9 - 1.512700097a^{8\alpha}e^{10} - 0.4241559847a^{9\alpha}e^{11} \\ - 0.07223053962a^{10\alpha}e^{12} \quad (48)$$

$$B_5 = 3.953439153e^3 + 0.237037037a^\alpha e^3 + 13.420881129a^{2\alpha}e^4 \\ - 0.5056790123a^\alpha e^4 + 21.90899471a^{2\alpha}e^5 - 3.386243386a^{2\alpha}e^5 \\ + 24.92325299a^{3\alpha}e^6 - 3.697132779a^{3\alpha}e^6 + 21.30206284a^{4\alpha}e^7 \\ - 2.822371154a^{4\alpha}e^7 + 14.13910625a^{5\alpha}e^8 - 1.606186374a^{5\alpha}e^8 \\ + 7.106847749a^{6\alpha}e^9 - 0.6712420668a^{6\alpha}e^9 + 3.025400195a^{7\alpha}e^{10} \\ + 0.9543509657a^{8\alpha}e^{11} + 0.1805763491a^{9\alpha}e^{12} \quad (49)$$

$$B_6 = -2.684162257e^4 + 0.1264197531a^\alpha e^4 - 8.763597884a^\alpha e^5 \\ + 1.693121693a^\alpha e^5 - 14.95395179a^{2\alpha}e^6 + 2.772849584a^{2\alpha}e^6 \\ - 17.04165027a^{3\alpha}e^7 + 2.822371154a^{3\alpha}e^7 - 14.13910625a^{4\alpha}e^8 \\ + 2.007732968a^{4\alpha}e^8 - 8.528217299a^{5\alpha}e^9 + 1.0068631a^{5\alpha}e^9 \\ - 4.235560273a^{6\alpha}e^{10} - 1.526961545a^{7\alpha}e^{11} - 0.3250374283a^{8\alpha}e^{12} \quad (50)$$

$$\begin{aligned}
B_7 = & 1.460599647e^5 - 0.3386243386\alpha e^5 + 4.984650598a^\alpha e^6 \\
& - 1.109139834a^\alpha \alpha e^6 + 8.520825136a^{2\alpha} e^7 - 1.693422693a^{2\alpha} \alpha e^7 \\
& + 9.426070834a^{3\alpha} e^8 - 1.606186374a^{3\alpha} \alpha e^8 + 7.106847749a^{4\alpha} e^9 \\
& - 1.00686314a^{4\alpha} \alpha e^9 + 4.235560272a^{5\alpha} e^{10} + 1.781455136a^{6\alpha} e^{11} \\
& + 0.4333832377a^{7\alpha} e^{12}
\end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned}
B_8 = & -0.7120929425e^6 + 0.184856639\alpha e^6 - 2.434521467a^\alpha e^7 \\
& + 0.5644742308a^\alpha \alpha e^7 - 4.039744743a^{2\alpha} e^8 + 0.803093187a^{2\alpha} \alpha e^8 \\
& - 4.061055857a^{3\alpha} e^9 + 0.6712420668a^{3\alpha} \alpha e^9 - 3.025400195a^{4\alpha} e^{10} \\
& - 1.526961545a^{4\alpha} \alpha e^{10} - 0.4333832377a^{6\alpha} e^{12}
\end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned}
B_9 = & 0.3043151834e^7 - 0.08063917583\alpha e^7 + 1.009936161a^\alpha e^8 \\
& - 0.2294551963a^\alpha \alpha e^8 + 1.522895946a^{2\alpha} e^9 - 0.2876751715a^{2\alpha} \alpha e^9 \\
& + 1.512700097a^{3\alpha} e^{10} + 0.9543509657a^{4\alpha} e^{11} + 0.3250374283a^{5\alpha} e^{12}
\end{aligned} \tag{53}$$

$$\begin{aligned}
B_{10} = & -0.112215129e^8 + 0.02868189954\alpha e^8 - 0.3384213214a^\alpha e^9 \\
& + 0.07191879287a^\alpha \alpha e^9 - 0.5042333658a^{2\alpha} e^{10} - 0.4241559847a^{2\alpha} \alpha e^{10} \\
& - 0.1805763491a^{4\alpha} e^{12}
\end{aligned} \tag{54}$$

$$\begin{aligned}
B_{11} = & 0.03384213214e^9 - 0.007990976985\alpha e^9 + 0.1008466732a^\alpha e^{10} \\
& + 0.1272467954a^{2\alpha} e^{11} + 0.07223053962a^{3\alpha} e^{12}
\end{aligned} \tag{55}$$

$$\begin{aligned}
B_{12} = & -0.009167879378e^{10} - 0.02313578098a^\alpha e^{11} - 0.01969923808a^{2\alpha} e^{12}
\end{aligned} \tag{56}$$

$$B_{13} = 0.001927981749e^{11} + 0.003283206347a^\alpha e^{12} \tag{57}$$

$$B_{14} = 0.0002525543343e^{12} \tag{58}$$

$$\begin{aligned}
C(r) = & \frac{\sigma^2 a^\alpha}{gh_0} [\bar{P}(v) + 1] [\bar{P}(v) + 1]^2 r^2 \\
= & C_0(C_1 r^2 + C_2 r^{2+2\alpha} + C_3 r^{2+2\alpha} + C_4 r^{2+3\alpha} + C_5 r^{2+4\alpha} + C_6 r^{2+5\alpha} + C_7 r^{2+6\alpha} + C_8 r^{2+7\alpha} \\
& + C_9 r^{2+8\alpha} + C_{10} r^{2+9\alpha} + C_{11} r^{2+10\alpha} + C_{12} r^{2+11\alpha} + C_{13} r^{2+12\alpha} + C_{14} r^{2+13\alpha})
\end{aligned} \tag{59}$$

$$C_0 = \frac{\sigma^2 a^\alpha}{gh_0} \tag{60}$$

$$\begin{aligned}
C_1 = & 4.0 + 6.666666667a^\alpha e + 7.199999999a^{2\alpha} e^2 \\
& + 6.184126984a^{3\alpha} e^3 + 4.547160494a^{4\alpha} e^4 + 2.882821869a^{5\alpha} e^5 \\
& + 1.531420509a^{6\alpha} e^6 + 0.732427125a^{7\alpha} e^7 + 0.3083106719a^{8\alpha} e^8 \\
& + 0.112215129a^{9\alpha} e^9 + 0.03384213214a^{10\alpha} e^{10} + 0.009167879378a^{11\alpha} e^{11} \\
& + 0.001927981749a^{12\alpha} e^{12} + 0.0002525543343a^{13\alpha} e^{13}
\end{aligned} \tag{61}$$

$$\begin{aligned}
C_2 = & -6.666666667e - 14.4a^\alpha e^2 - 18.55238095a^{2\alpha} e^3 \\
& - 18.18864198a^{3\alpha} e^4 - 14.41410935a^{4\alpha} e^5 - 9.188523054a^{5\alpha} e^6 \\
& - 5.126989875a^{6\alpha} e^7 - 2.466485375a^{7\alpha} e^8 - 1.009936161a^{8\alpha} e^9 \\
& - 0.3384213214a^{9\alpha} e^{10} - 0.1008466732a^{10\alpha} e^{11} - 0.02313578099a^{11\alpha} e^{12} \\
& - 0.003283206347a^{12\alpha} e^{13}
\end{aligned} \tag{62}$$

$$\begin{aligned}
C_3 = & 7.199999999e^2 + 18.55238095a^\alpha e^3 + 27.28296296a^{2\alpha} e^4 \\
& + 28.82821869a^{3\alpha} e^5 + 22.97130763a^{4\alpha} e^6 + 15.38096963a^{5\alpha} e^7 \\
& + 8.632698813a^{6\alpha} e^8 + 4.039744643a^{7\alpha} e^9 + 1.522895946a^{8\alpha} e^{10} \\
& + 0.5042333658a^{9\alpha} e^{11} + 0.1272467954a^{10\alpha} e^{12} + 0.01969923808a^{11\alpha} e^{13}
\end{aligned} \tag{63}$$

$$\begin{aligned}
C_4 = & -6.184126984e^3 - 18.18864198a^\alpha e^4 - 28.82821869a^{2\alpha} e^5 \\
& - 30.62841018a^{3\alpha} e^6 - 25.63494938a^{4\alpha} e^7 - 17.26539763a^{5\alpha} e^8 \\
& - 9.426070834a^{6\alpha} e^9 - 4.061055857a^{7\alpha} e^{10} - 1.512700097a^{8\alpha} e^{11} \\
& - 0.4241559847a^{9\alpha} e^{12} - 0.07223053962a^{10\alpha} e^{13}
\end{aligned} \tag{64}$$

$$\begin{aligned}
C_5 = & 4.547160494e^4 + 14.41410935a^\alpha e^5 + 22.97130763a^{2\alpha} e^6 \\
& + 25.63494938a^{3\alpha} e^7 + 21.58174703a^{4\alpha} e^8 + 14.13910625a^{5\alpha} e^9 \\
& + 7.106847749a^{6\alpha} e^{10} + 3.025400195a^{7\alpha} e^{11} + 0.9543409657a^{8\alpha} e^{12} \\
& + 0.1805763491a^{9\alpha} e^{13}
\end{aligned} \tag{65}$$

$$\begin{aligned}
C_6 = & -2.882821869e^5 - 9.188523054a^\alpha e^6 - 15.38096963a^{2\alpha} e^7 \\
& - 17.26539763a^{3\alpha} e^8 - 14.13910625a^{4\alpha} e^9 - 8.528217299a^{5\alpha} e^{10} \\
& - 4.235560273a^{6\alpha} e^{11} - 1.526961545a^{7\alpha} e^{12} - 0.3250374283a^{8\alpha} e^{13}
\end{aligned} \tag{66}$$

$$\begin{aligned}
C_7 = & 1.531420509e^6 + 5.126989875a^\alpha e^7 + 8.632698813a^{2\alpha} e^8 \\
& + 9.426070834a^{3\alpha} e^9 + 7.106847749a^{4\alpha} e^{10} + 4.235560273a^{5\alpha} e^{11} \\
& + 1.781455136a^{6\alpha} e^{12} + 0.4333832377a^{7\alpha} e^{13}
\end{aligned} \tag{67}$$

$$\begin{aligned}
C_8 = & -0.732427125e^7 - 2.466485375a^\alpha e^8 - 4.039744643a^{2\alpha} e^9 \\
& - 4.061055857a^{3\alpha} e^{10} - 3.025400195a^{4\alpha} e^{11} - 1.526961545a^{5\alpha} e^{12} \\
& - 0.4333832377a^{6\alpha} e^{13}
\end{aligned} \tag{68}$$

$$\begin{aligned}
C_9 = & 0.3083106719e^8 + 1.009936161a^\alpha e^9 + 1.522895946a^{2\alpha} e^{10} \\
& + 1.512700097a^{3\alpha} e^{11} + 0.9543509657a^{4\alpha} e^{12} + 0.3250374283a^{5\alpha} e^{13}
\end{aligned} \tag{69}$$

$$\begin{aligned}
C_{10} = & -0.112215129e^9 - 0.3384213214a^\alpha e^{10} - 0.5042333658a^{2\alpha} e^{11} \\
& - 0.4241559847a^{3\alpha} e^{12} - 0.1805763491a^{4\alpha} e^{13}
\end{aligned} \tag{70}$$

$$\begin{aligned}
C_{11} = & 0.03384213214e^{10} + 0.1008466732a^\alpha e^{11} + 0.1272467954a^{2\alpha} e^{12} \\
& + 0.07223053962a^{3\alpha} e^{13}
\end{aligned} \tag{71}$$

$$\begin{aligned}
C_{12} = & -0.009167879378e^{11} - 0.02313578099a^\alpha e^{12} - 0.01969923808a^{2\alpha} e^{13}
\end{aligned} \tag{72}$$

$$C_{13} = 0.001927981749e^{12} + 0.003283206347a^\alpha e^{13} \tag{73}$$

$$C_{14} = 0.0002525543343e^{13} \tag{74}$$

$$D(r) = \bar{P}(v)(a^n - r^n) [\bar{P}(v) + 1]^2 = A(r) \tag{75}$$