

경계요소법의 탄소성문제에 대한 초기응력법의 적용

이수룡^{†*}

동명대학교 조선공학과*

Application of Initial Stress Method on Elasto-plastic Problem in Boundary Element Method

Soo Lyong Lee^{†*}

Department of naval Architecture, Tongmyong University*

Abstract

The BEM, known as solving boundary value problems, could have some advantages in solving domain problems which are mostly solved by FEM and FDM. Lately, in the elastic-plastic nonlinear problems, BEM could provide the subdomain approach for the region where the plastic deformation could occur and the unknown nodal displacement of this region are added as the unknown of the boundary integral equation for this approach. In this paper, initial stress method was used to establish the formulation of such BEM approach. And a simple rectangular plate having a circular hole was analyzed to verify the suggested method and the result is compared with that from FEM. It is shown that the result of two methods are showing similar stress-strain curves at the root of perforated plate and furthermore the plastic deformation obtained by BEM shows more reasonable behavior than that of FEM.

※Keywords: Boundary element method(경계요소법), Initial stress method(초기응력법), Boundary integral equation(경계적분방정식)

1. 서론

구조물의 거동을 해석하는 방법 중의 하나인 수치해석적인 방법에는 해석 대상 구조물의 모델링

치해석적인 방법에는 해석 대상 구조물의 모델링 수법에 따라서 크게 두 가지로 나눌 수 있다.

그 중 하나는 구조물의 지배 방정식에 대한 기본해(fundamental solution)를 이용하여 적분 방정식을 유도하고, 이것을 경계적분방정식으로 유도한 다음 경계만을 이산화하는 방법으로 경계요소법(Boundary Element Method : BEM) 이라고 부른

접수일: 2006년 5월 26일, 승인일: 2006년 11월 22일

† 교신저자: lsyong@tu.ac.kr, 051-620-3404

다(Rizzo 1967, Rizzo and Shippy 1968).

이러한 경계요소법의 정식화에는 직접법(direct method)과 간접법(indirect method) 두 가지가 있으나, 취급하는 변수의 물리적인 의미가 명백한 직접법이 많이 이용되고 있으며(장창두와 이성훈 1986, 김상철과 임원균 1988), Rizzo(1967) 이후 Telles and Brebbia(1976, 1981), Brebbia et al.(1984)에 의해서 해법의 효율화 이루어졌다.

특히 Brebbia(1980)는 가중잔차법(method of weighted residual)과 경계요소법의 등가성을 나타내었으며, Lachat and Watson(1976)은 고차의 경계요소를 이용함으로써 보다 일반적인 해법을 확립했다.

최근에는 유한요소법과의 결합에 관한 연구도 나타나고 있으며, 탄소성과 같은 비선형 문제의 경우에는 소성변형이 예상되는 영역을 유한요소법과 같이 내부를 분할하고 이 영역에서의 미지 절점 변위를 이산화 방정식의 미지수에 첨가하여 처리하는 수법이 제안되었다(김창렬 등 1987).

본 연구에서는 이러한 경계요소법에 있어서 재료적 비선형 문제인 탄소성 문제에 대한 정식화를 초기응력법을 이용하여 행하고, 이를 균일 인장력을 받는 유공평판의 해석에 적용하여 유한요소법의 해석 결과와 비교해 봄으로써 그 유용성을 확인하고자 한다.

2. 탄소성문제에 대한 경계요소법의 정식화

2.1 지배 방정식 및 적분방정식

탄소성체의 평형방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \dot{f}_i = 0 \quad (1)$$

여기서 σ_{ij} 는 응력 증분이며, \dot{f}_i 는 물체력 증분이며 표면력 성분은 무시하였다.

미소한 외력 증분에 대한 변형률 증분은 탄성 변형률 증분과 소성 변형률 증분의 합으로 된다.

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2)$$

여기서 $\dot{\epsilon}_{ij}$: 전 변형률 증분

$\dot{\epsilon}_{ij}^e$: 탄성변형률 증분

$\dot{\epsilon}_{ij}^p$: 소성 변형률 증분이다.

응력과 변형률의 관계는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij} &= \delta_{ij} \cdot \lambda \cdot \dot{\epsilon}_{kk}^e + 2\mu \cdot \dot{\epsilon}_{ij}^e \\ &= \delta_{ij} \lambda (\dot{\epsilon}_{kk} - \dot{\epsilon}_{kk}^p) + 2\mu (\dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}_{ij}^p) \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 λ 와 μ 는 탄성재료상수로서, 종탄성 계수를 E , 포와송비를 ν 라고 하면

$$\lambda = \frac{E \cdot \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \text{ 이다.}$$

식(3)을 식(1)에 대입하고, 식(2)를 이용하여 물체력을 무시하여 정리하면 다음과 같다.

$$\mu \frac{\partial^2 \dot{u}_i}{\partial x_i \cdot \partial x_j} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \dot{u}_i}{\partial x_i \cdot \partial x_j} + \dot{f}_i = 0 \quad (4)$$

여기서 $\dot{f}_i = -(\delta_{ij} \lambda \frac{\partial \dot{\epsilon}_{kk}^e}{\partial x_j} + 2\mu \frac{\partial \dot{\epsilon}_{ij}^p}{\partial x_j})$ 이

다. 여기서 δ_{ij} 는 Kronecker delta이며, 식(4)를 Lamé'의 방정식이라 부르며, 그 해 \dot{u}_i 는 다음과 같이 두 부분으로 나누어 생각할 수 있다.

$$\dot{u}_i = \dot{u}_i^e + \dot{u}_i^p \quad (5)$$

여기서 첫째 항 \dot{u}_i^e 는 $\dot{f}_i = 0$ 일 때의 Homogeneous Solution 으로서 탄성해에 해당하며, 둘째 항 \dot{u}_i^p 는 Particular Solution 으로서 탄소성 상태의 해이다.

먼저 변위장에서 단위 집중 하중의 증분 $\dot{e}_j(\xi)$ 에 대한 탄성 상태의 변위 증분 \dot{u}_i^e 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\dot{u}_i^e = u_{ij}^*(x, \xi) \dot{e}_j(\xi) \quad (6)$$

여기서 $u_{ij}^*(x, \xi)$ 는 탄성문제에 있어서의 기본해이다.

탄성 변위 증분에 대한 변형률 증분은 식(6)을 식(2)에 대입함으로써 구할 수 있다.

식(6)을 식(2)에 대입하여 정리하면, 다음과 같이 된다.

$$\tilde{\epsilon}_{ij}^e(x) = B_{ijk}(x, \xi) \dot{e}_k(\xi) \quad (7)$$

여기서 $B_{ijk}(x, \xi)$ 는 다음과 같다.

$$B_{ijk}(x, \xi) = -\frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} [(1-2\nu) (\delta_{ik} \frac{\partial r}{\partial x_j} + \delta_{jk} \frac{\partial r}{\partial x_i}) + 2 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \frac{\partial r}{\partial x_k} - \delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial x_k}] \quad (8)$$

탄성 상태에서는 $\tilde{\epsilon}_{ij}^p = 0$ 이므로 식(7)의 변형을 증분에 대한 응력 증분은 응력-변형을 관계 식으로부터 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\dot{\sigma}_{ij}(x) = \delta_{ij} \lambda \tilde{\epsilon}_{kk} + 2\mu \tilde{\epsilon}_{ij} \quad (9)$$

또, 표면력 증분 $\dot{p}_i(x)$ 는 역학적인 경계조건 으로부터 구할 수 있다.

식(7), 식(8), 식(9)으로부터

$$\begin{aligned} \dot{p}_i(x) &= \dot{\sigma}_{ij}(x) \cdot n_j(x) \\ &= (\delta_{ij} \cdot \lambda \cdot \tilde{\epsilon}_{kk} + 2\mu \cdot \tilde{\epsilon}_{ij}) n_j(x) \\ &= p_{ij}^*(x, \xi) \dot{e}_j(\xi) \end{aligned} \quad (10)$$

여기서 $p_{ij}^*(x, \xi)$ 는 식(6)의 $u_{ij}^*(x, \xi)$ 에 대한 traction 이다.

적분방정식은 Maxwell 의 상반정리를 이용하여 구할 수 있다.

두 개의 시스템에서 물체력, 표면력, 그리고 변위의 증분을 각각 \dot{f}_i , \dot{p}_i , \dot{u}_i 및 \dot{f}_i^* , \dot{p}_i^* , \dot{u}_i^* 라고 하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \int_s \dot{p}_i^*(x) \dot{u}_i(x) ds + \int_v \dot{f}_i^*(z) \dot{u}_i(z) dv \\ = \int_s \dot{p}_i(x) \dot{u}_i^*(x) ds + \int_v \dot{f}_i(z) \dot{u}_i^*(z) dv \end{aligned} \quad (11)$$

First System 에서의 물체력 증분을 무시하고 Second System 에서의 물체력 증분을 단위하중 이라고 가정한다. 즉, $\dot{f}_i = 0$, $\dot{f}_i^* = e$ 로 두고 식(6)과 식(10)을 이용하여 식(11)을 변형시킨다.

$$\int_s p_{ij}^*(x, \xi) \dot{u}_i(x) ds + \dot{u}_j(\xi)$$

$$= \int_s \dot{p}_i(x) u_{ij}^*(x, \xi) ds \quad (12)$$

식(12)를 다시 고쳐 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{u}_j(\xi) &= \int_s (u_{ij}^*(x, \xi) \dot{p}_i(x) \\ &\quad - p_{ij}^*(x, \xi) \dot{u}_i(x)) ds \end{aligned} \quad (13)$$

이 식은 탄성문제에 있어서의 적분방정식과 같은 형태이며, \dot{u}_i^e 에 해당한다.

2.2 초기 응력에 의한 경계적분방정식

일반적으로 해석하고자 하는 구조물은 열응력, 물체력 또는 탄소성 거동에 의해서 초기 응력이 존재하며, 이 초기 응력의 영향 때문에 식(13)으로 주어져 있는 적분방정식의 변위 증분은 수정이 필요하다.

물체 내부의 미소 가상변위의 증분에 대한 표면력, 물체력 및 변형률의 증분을 각각 \dot{p}_i^* , \dot{f}_i^* , $\tilde{\epsilon}_{ij}^*$ 라 하고, 변위 및 초기응력의 증분을 \dot{u}_i^* , $\dot{\sigma}_{ij}^*$ 라 하면, 가상일의 원리에 의하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \int_s \dot{p}_i^*(x) \dot{u}_i^*(x) ds + \int_v \dot{f}_i^*(x) \dot{u}_i^*(x) dv \\ = \int_v \tilde{\epsilon}_{ij}^*(x) \dot{\sigma}_{ij}^*(x) dv \end{aligned} \quad (14)$$

여기서 물체력 증분을 단위하중으로 취한다. 즉, $\dot{f}_i^* = \delta_{ij}(x-\xi) \dot{e}_j$ 로 두고 식(7)과 식(10)을 식(14)에 대입하면

$$\dot{u}_k^*(\xi) = \int_v B_{ijk}(x, \xi) \dot{\sigma}_{ij}^*(x) dv \quad (15)$$

이 값은 초기 응력으로 인한 변위의 증분으로서 \dot{u}_i^p 에 해당한다. 따라서 전체의 변위 증분은 식(13)과 식(15)의 합으로 주어진다. 즉,

$$\begin{aligned} \dot{u}_j(\xi) &= \int_s (u_{ij}^*(x, \xi) \dot{p}_i(x) \\ &\quad - p_{ij}^*(x, \xi) \dot{u}_i(x)) ds \\ &\quad + \int_v B_{ijk}(x, \xi) \dot{\sigma}_{ij}^*(x) dv \end{aligned} \quad (16)$$

식(16)은 탄소성 거동을 고려한 적분방정식이다. 식(16)에서 알 수 있는 바와 같이 물체력을

무시해도 우변 제2항의 체적적분을 수행하지 않으면 안 된다. 따라서 탄소성 문제에 경계요소법을 적용하기 위해서는 유한요소법과 같이 영역 내부를 분할하여 체적적분을 수행하여야 한다. 그러나 유한요소법과 같이 전 영역을 분할할 필요는 없고 소성변형이 예상되는 영역만 분할하면 되므로 유한요소법보다는 모델링이 쉽다.

식(16)을 영역 내의 점 ξ 를 ξ_0 로 이동시켜 경계적분방정식으로 변환시킨다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \dot{u}_i(\xi_0) = & \int_s (u_{ij}^*(x, \xi_0) \dot{p}_i(x) \\ & - p_{ij}^*(x, \xi_0) \cdot \dot{u}_i(x)) ds \\ & + \int_v B_{ikj}(x, \xi_0) \dot{\sigma}_{ij}(x) dv \end{aligned} \quad (17)$$

Fig. 1과 같이 영역을 N 개의 경계요소와 M 개의 내부 영역으로 분할 한 다음 식(17)을 이산화 하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \dot{u}_j(\xi^p) = & \sum_{q=1}^N [\dot{p}_i(x^q) \int_{\Delta S_q} u_{ij}^*(x^q, \xi^q) ds_q \\ & - \dot{u}_i(x^q) \int_{\Delta S_q} p_{ij}^*(x^q, \xi^q) ds_q] \\ & + \sum_{l=1}^M \dot{\sigma}_{ij}(x^l) \int_{\Delta V_l} B_{ikj}(x^l, \xi^p) dV_l \end{aligned} \quad (18)$$

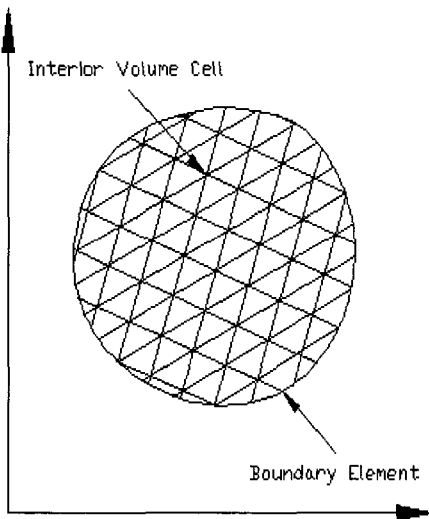


Fig. 1 Discrete of problem

여기서, ξ^p : p 번째 경계요소의 대표적인 Field point

x^q : q 번째 경계요소의 Load Point

x^l : l 번째 내부요소의 Load Point 이다.

식(18)을 matrix로 표시하면 다음과 같다.

$$\frac{1}{2} [\dot{u}] = [G][\dot{p}] - [H][\dot{u}] + [B][\dot{\sigma}] \quad (19)$$

여기서, $[G]$, $[H]$: 2N X 2N matrix

$[B]$: 2N X 3M matrix

$[\dot{\sigma}]$: 3M X 1 vector

$[\dot{u}]$, $[\dot{p}]$: 2N X 1 vector 이다.

2.3. 내부 영역에서의 변위 및 응력

식(19)의 경계적분방정식으로부터 미지의 경계 값이 구해지면 내부 영역에서의 변위 및 이에 대응하는 변형을 증분을 구할 수 있으며, 또한 응력-변형을 관계로부터 응력 증분을 구할 수 있다.

$$[\dot{\sigma}] = [D^e][\dot{\epsilon}] \text{ for elastic cell}$$

$$[\dot{\sigma}] = [D^{ep}][\dot{\epsilon}] \text{ for elasto-plastic cell} \quad (20)$$

식(19)의 $[G]$, $[H]$ matrix 는 탄성문제에서의 matrix와 동일하며, $[B]$ matrix는 식(19)의 우변 3항을 적분한다.

$$[B] = \int_{\Delta V_l} B_{ikj} dV_l \quad (21)$$

식(21)의 적분을 수행하기 위하여 Fig. 2와 같이 Local Axis $X_1 - Y_1$ 축을 정의하고, 식(21)을 극좌표에 대한 적분식으로 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \int_{\Delta V_l} B_{ikj} dV_l = & n_{ri} n_{sk} n_{tj} \int_{\Delta V_l} B_{rst} dV_l \\ = & [n_{1i} n_{1k} n_{1j} \Delta B_{111} + n_{1i} n_{1k} n_{2j} \Delta B_{112} \\ & + n_{1i} n_{2k} n_{1j} \Delta B_{121} + n_{1i} n_{2k} n_{2j} \Delta B_{122} \\ & + n_{2i} n_{1k} n_{1j} \Delta B_{211} + n_{2i} n_{1k} n_{2j} \Delta B_{212} \\ & + n_{2i} n_{2k} n_{1j} \Delta B_{221} \\ & + n_{2i} n_{2k} n_{2j} \Delta B_{222}]_{\Theta_{A, r_A}^B, \gamma_B} \end{aligned} \quad (22)$$

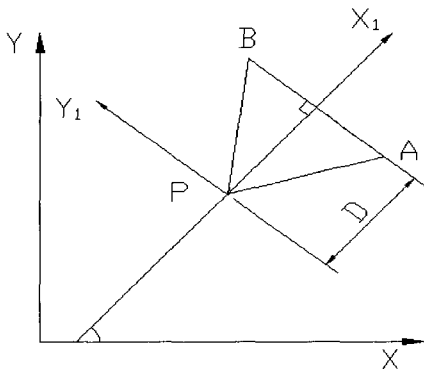


Fig. 2 Polar coordinate for volume integral

여기서 n_{ij} 는 Global Axis $X-Y$ 대한 X_1-Y_1 축의 Transformation 이며, 식(22)의 각 성분은 다음과 같다.(Appendix I)

$$\begin{aligned} \Delta B'_{111} &= \frac{1}{2} C_1 D [(C_2 - 1)\theta + \sin\theta \cos\theta] \\ \Delta B'_{112} &= \frac{1}{2} C_1 D [\sin^2\theta - \ln(\frac{R}{D})] \\ \Delta B'_{121} &= \Delta B'_{211} \\ &= \frac{1}{2} C_1 D [\frac{(C_2 - 1)}{2} \ln(\frac{R}{D}) + \sin^2\theta] \\ \Delta B'_{122} &= \Delta B'_{212} \\ &= \frac{1}{2} C_1 D [\frac{(C_2 + 1)}{2} \theta - \sin\theta \cos\theta] \\ \Delta B'_{221} &= -\frac{1}{2} C_1 D [\sin\theta \cos\theta] \\ \Delta B'_{222} &= \frac{1}{2} C_1 D [C_2 \ln(\frac{R}{D}) - \sin^2\theta] \end{aligned} \quad (23)$$

여기서 $C_1 = -\frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)}$, $C_2 = (3-4\nu)$ 이다. 식(23)을 식(22)에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} [B] &= [n_{1j} n_{1k} n_{1j} \Delta B'_{111} \\ &+ n_{1i} n_{1k} n_{2j} \Delta B'_{112} \\ &+ n_{1j} (n_{1i} n_{2k} + n_{2i} n_{1k}) \Delta B'_{121} \\ &+ n_{2j} (n_{1i} n_{2k} + n_{2i} n_{1k}) \Delta B'_{122} \\ &+ n_{2i} n_{2k} n_{1j} \Delta B'_{221} \\ &+ n_{2i} n_{2k} n_{2j} \Delta B'_{222}]_{\theta_{\alpha}, r_{\beta}}^{\theta_{B^*}, r_B} \end{aligned} \quad (24)$$

여기서 Transformation n_{ij} 는 다음 식으로 주어진다.

$$\begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \quad (25)$$

식(24) 및 식(25)를 이용하면 $[B]$ 의 성분을 구할 수 있다.(Appendix II)

2.4 증분 이론에 의한 탄소성 해석

식(19)를 변위 및 표면력에 관한 미지함수 형태로 변형시키면 다음과 같다.

$$[A][\dot{x}] = [f] + [B][\dot{\sigma}] \quad (26)$$

이 식을 다음과 같은 순서로 증분 이론을 이용하여 해석한다.

1) 1단계

초기응력 $[\dot{\sigma}] = 0$ 으로 두고 초기 하중 증분 $[f]$ 에 대한 식(26)을 푼다.

2) 2단계

가장 높은 응력을 받는 요소가 항복할 수 있는 Scale Factor를 곱한다. 이때, 다른 내부의 응력을 $[\sigma_c]$ 라 한다.

3) 3단계

$[\dot{\sigma}] = 0$ 으로 두고 새로운 하중 증분 $[f]$ 에 대한 식(26)을 푼 후 이때의 응력 및 변형을 증분을 $[\dot{\sigma}^e]$, $[\dot{\epsilon}]$ 라 한다.

4) 4단계

내부 점에서의 응력 $[\sigma_c] + [\dot{\sigma}^e]$ 에서 소성요소에 대한 응력 수정값을 구한다. 즉, 소성요소의 경우 $[\dot{\sigma}^{ep}] = [D^{ep}][\dot{\epsilon}]$ 에 의해서 $[\dot{\sigma}^{ep}]$ 를 구한다.

5) 5단계

초기 응력 $[\dot{\sigma}] = [\dot{\sigma}^e] - [\dot{\sigma}^{ep}]$ 를 구한다. 최종적으로 요소의 응력은 다음과 같다.

탄성요소 : $[\sigma_c] + [\dot{\sigma}^e]$

소성요소 : $[\sigma_c] + [\dot{\sigma}^{ep}]$

6) 6단계

$[f] = 0$ 으로 두고 초기응력 $[\dot{\sigma}]$ 를 고려하

여 식(26)을 풀어서 내부점의 응력 및 변형을 증분 $[\dot{\sigma}^e]$ 및 $[\dot{\epsilon}]$ 를 구한다. 이때의 $[\dot{\sigma}^e]$ 및 $[\dot{\epsilon}]$ 값을 3단계에서 구한 값으로 대치한 후 5단계까지의 계산을 반복수행하여 $[\dot{\sigma}^e]$ 를 구한다.

7) 7단계

6단계에서 구해진 $[\dot{\sigma}^e]$ 가 규정된 값보다 적을 때에는 다시 새로운 하중 증분 $[f]$ 에 대하여 계산을 수행한다.

이 계산 알고리즘을 흐름도로 나타내면 Fig. 3과 같다.

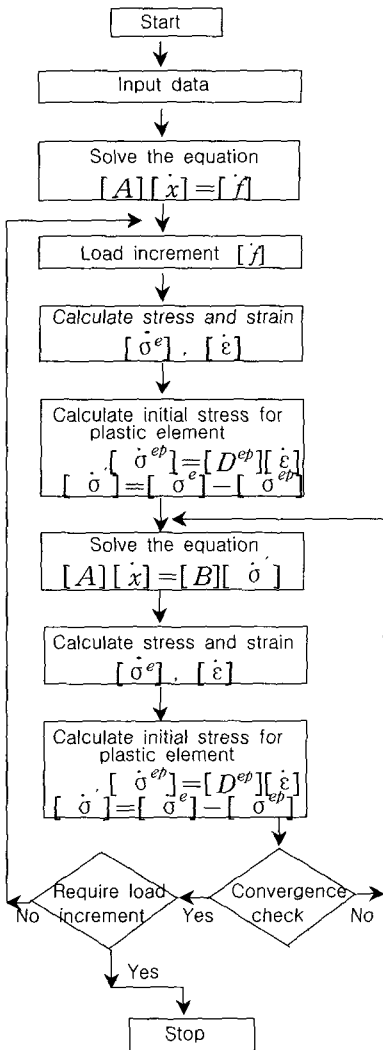


Fig. 3 Flow chart for analysis

3. 수치해석

3.1 해석모델

Fig. 4와 같이 길이 $L=30\text{mm}$, 폭 $B=20\text{mm}$, 지름 $D=6\text{mm}$, 두께 $t=1\text{mm}$ 인 유공평판에 균일인장력이 작용하고 있는 경우를 해석한다. 이 재료의 탄성계수 $E=2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$, 포와송비 $\nu=0.3$ 이다. 유한요소법과 경계요소법의 모델링은 각각 Fig. 5, Fig. 6과 같다.

또, 유한요소법과 경계요소법 각 경우에 있어서 요소 수 및 절점 수는 Table 1 과 같으며, 항복응력 $\bar{\sigma}_y=24.0 \text{ kgf/mm}^2$ 으로 하였다.

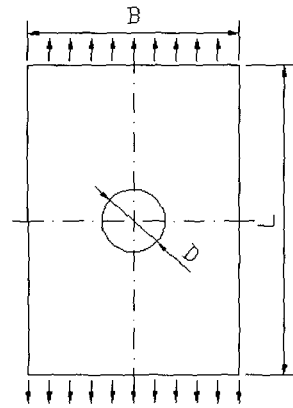


Fig. 4 Shape of model

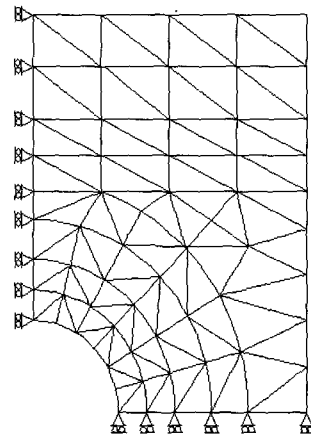


Fig. 5 Finite element modeling

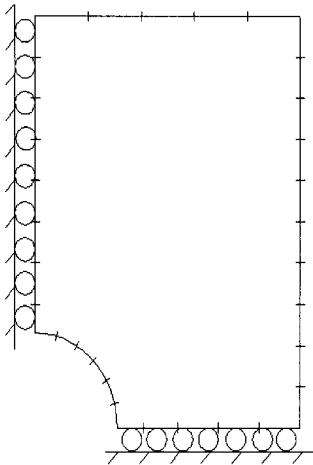


Fig. 6 Boundary element modeling

그러나 보다 더 세밀하게 요소를 분할하거나 고차의 형상함수를 사용하여 해석하면 소성요소의 진전문제도 매우 잘 일치할 것으로 예상된다.

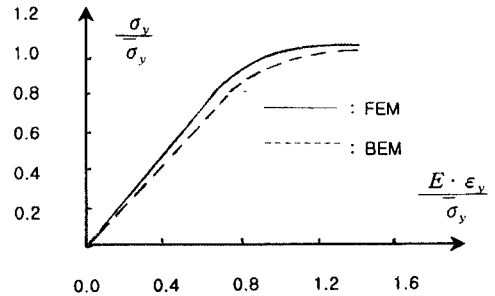


Fig. 7 Stress-strain curves at root of perforated plate

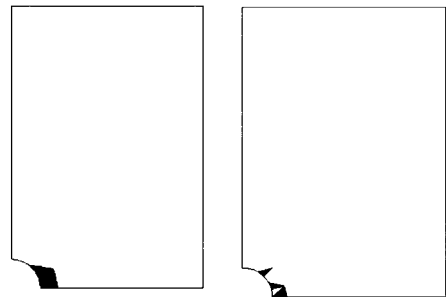
Table 1 Number of Node and Element

CASE	No. of node	No. of element	Remarks
FEM	65	96	
BEM	25	25	Inner cell = 40

3.2 수치해석 결과 비교 및 검토

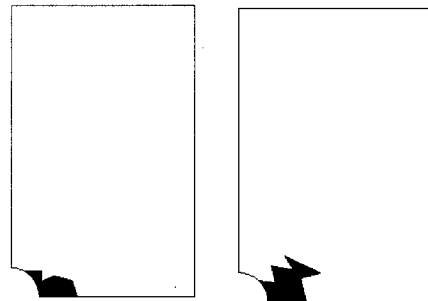
원형 구멍 Root 부의 응력-변형을 관계를 Fig. 7에 나타내었다. 이 그림으로부터 알 수 있는 바와 같이 경계요소법과 유한요소법의 결과는 매우 좋은 일치를 보여주고 있다. 즉, 소성상태가 발생하는 시점과 그 이후의 응력변화를 살펴보면 유한요소법의 경우가 경계요소법의 경우보다 약간 큰 값을 보이지만, 그 경향은 매우 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

그리고 하중 증분 단계별 소성요소의 진전 상태를 살펴보면, 유한요소법에서는 초기에 매우 넓은 범위에서 소성변형이 시작되어 점점 날카롭게 (약 30°) 진전해 나감을 알 수 있고(Fig. 8의 a 및 Fig. 9의 a), 경계요소법에서는 초기 소성변형이 발생한 각도를 비교적 유지하면서(약 60°) 진전해 나감을 알 수 있다.(Fig. 8의 b, 및 Fig. 9의 b)



(a) FEM (b) BEM

Fig. 8 Development of plastic elements at F=115 kgf



(a) FEM (b) BEM

Fig. 9 Development of plastic elements at F=145 kgf

4. 결론

초기 응력 증분을 이용하여 경계요소법의 탄소성 문제를 정식화하고, 이를 유공평판의 해석에 적용하여 유한요소법의 해석 결과와 비교해 봄으로써 다음과 같은 결론을 얻었다.

1) 본 연구에서 정식화한 경계요소법의 탄소성 문제 정식화의 해석 결과도 유한요소법의 해석 결과와 같이 매우 양호한 해석 결과를 얻을 수 있었다.

2) 구조물의 경계조건과 하중조건 등이 비교적 단순하여 소성변형의 영역을 어느 정도 미리 예상할 수 있는 경우에는 이 영역을 내부 영역으로 분할하여 경계요소법을 적용할 수 있을 것이다. 이 경우에는 미지수가 절대적으로 감소하여 계산시간을 크게 단축시킬 수 있을 것이다.

3) 탄소성 문제에 대한 경계요소법의 보다 일반적인 적용을 위해서는 복잡한 구조물의 적용에 대한 연구가 계속되어야 할 것이며, 그 방안의 하나로 경계요소법과 유한요소법을 결합하는 방법이 있을 수 있다.

참 고 문 헌

- 김상철, 임원균, 1988, "경계요소법에 의한 균열 진전경로 예측," 대한조선학회 논문집, 제 25권, 제 4호, pp. 39-46.
- 김창렬, 이수룡, 제정신, 1987, "유한요소법과 경계요소법의 결합해법에 의한 HATCH CORNER 해석," 대한조선학회 논문집, 제 24권, 제 3호, pp. 25-34.
- 장창두, 이성훈, 1986, "경계요소법에 의한 2차원 응력해석," 대한조선학회 논문집, 제 23권, 제 4호, pp. 11-18.
- Brebbia, C.A., 1980, The Boundary Element Method for Engineers, Pentech press.
- Brebbia, C.A. and Telles, J.C.F. and Wrobel, L.C., 1984, Boundary Element Techniques, Springer Verlag.
- Lachat, J.C. and Watson, J.O., 1976,

- "Effective Numerical Treatment of Boundary Integral Equations : A Formulation for Three-dimensional Elastostatics," Int. J. Num. Mech. Eng., Vol. 10.
- Rizzo, F.J., 1967, "An Integral Equation Approach to Boundary Value Problems of Classical Elastostatics," Quart. Appl. Math. Vol. 25(1).
- Rizzo, F.J. and Shippy, D.J., 1968, "A Formulation and Solution Procedures for the General Non-homogeneous Elastic Inclusion Problem," Int. J. Solids Structure, Vol. 4.
- Telles, J.C.F. and Brebbia, C.A., 1976, "On the Application of Boundary Element Method to Plasticity," Appl. Math. Modelling, Vol. 10.
- Telles, J.C.F. and Brebbia, C.A., 1981, "Boundary Element : New Developments in Elastoplastic Analysis," Appl. Math. Modelling, Vol. 5.

Appendix I

식(8)로부터

$$B_{ijk}(x, \xi) = -\frac{1}{8\pi r \mu (1-\nu)} [(1-2\nu) (\delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial x_k} + \delta_{jk} \frac{\partial r}{\partial x_i}) + 2 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \frac{\partial r}{\partial x_k} - \delta_{ik} \frac{\partial r}{\partial x_j}] \quad (I-1)$$

Fig. 2로부터

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \theta = D \\ y_1 &= r \sin \theta = D \tan \theta \end{aligned} \quad (I-2)$$

$$r = D \sec \theta$$

$$dV = t dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

를 이용하여 적분을 수행한다.

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{1}{8\pi \mu (1-\nu)}, \quad C_2 = (3-4\nu) \text{ 로 두면} \\ \Delta B_{III} &= \int B_{III} dV \\ &= \int \left[\frac{C_1}{r^2} \right] \{(1-2\nu)(2D) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2rD \left[\frac{r^2 \cos^2 \theta}{r^3} - D \right] \frac{1}{2} r^2 d\theta \\
 = & \frac{1}{2} C_1 D \{ (C_2 - 1)\theta + \sin \theta \cos \theta \} \\
 \Delta B'_{112} = & \int B_{112} dV \\
 = & \int \left[\frac{C_1}{r^2} \left(2rD \frac{r^2 \cos \theta \sin \theta}{r^3} \right. \right. \\
 & \left. \left. - D \tan \theta \right) \frac{1}{2} r^2 d\theta \right. \\
 = & \frac{1}{2} C_1 D \{ \sin^2 \theta - \ln \left(\frac{R}{D} \right) \} \\
 \Delta B'_{121} = & \int B_{121} dV \\
 = & \int \left[\frac{C_1}{r^2} \left\{ (1 - 2\nu)(D \tan \theta) \right. \right. \\
 & \left. \left. + 2rD \frac{r^2 \sin \theta \cos \theta}{r^3} \right\} \right] \frac{1}{2} r^2 d\theta \\
 = & \frac{1}{2} C_1 D \left[-\frac{C_2 - 1}{2} \ln \left(\frac{R}{D} \right) + \sin^2 \theta \right] \\
 \Delta B'_{211} = & \int B_{211} dV \\
 = & \int \left[\frac{C_1}{r^2} \left\{ (1 - 2\nu)(D \tan \theta) \right. \right. \\
 & \left. \left. + 2rD \frac{r^2 \sin \theta \cos \theta}{r^3} \right\} \right] \frac{1}{2} r^2 d\theta \\
 = & \Delta B'_{121} \\
 \Delta B'_{212} = & \int B_{212} dV \\
 = & \int \left[\frac{C_1}{r^2} \left\{ (1 - 2\nu)(D) \right. \right. \\
 & \left. \left. + 2rD \frac{r^2 \sin^2 \theta}{r^3} \right\} \right] \frac{1}{2} r^2 d\theta \\
 = & \frac{1}{2} C_1 D \left\{ -\frac{C_2 + 1}{2} \theta - \sin \theta \cos \theta \right\} \\
 \Delta B'_{122} = & \int B_{122} dV \\
 = & \int \left[\frac{C_1}{r^2} \left\{ (1 - 2\nu)(D) \right. \right. \\
 & \left. \left. + 2rD \frac{r^2 \sin^2 \theta}{r^3} \right\} \right] \frac{1}{2} r^2 d\theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & = \Delta B'_{212} \\
 \Delta B'_{221} = & \int B_{221} dV \\
 = & \int \left[\frac{C_1}{r^2} \left\{ 2rD \frac{r^2 \sin^2 \theta}{r^3} \right. \right. \\
 & \left. \left. - D \right\} \right] \frac{1}{2} r^2 d\theta \\
 = & -\frac{1}{2} C_1 D \sin \theta \cos \theta \\
 \Delta B'_{222} = & \int B_{222} dV \\
 = & \int \left[\frac{C_1}{r^2} \left\{ (1 - 2\nu)(2D \tan \theta) \right. \right. \\
 & \left. \left. + 2rD \frac{\tan \theta r^2 \sin^2 \theta}{r^3} \right. \right. \\
 & \left. \left. - D \tan \theta \right\} \right] \frac{1}{2} r^2 d\theta \\
 = & \frac{1}{2} C_1 D \left\{ C_2 \ln \left(\frac{R}{D} \right) - \sin^2 \theta \right\}
 \end{aligned}$$

Appendix II

식(24)로부터

$$\begin{aligned}
 [B] = & \left[\begin{array}{ccc} n_{1i} & n_{1k} & n_{1j} \end{array} \Delta B'_{111} \right. \\
 & + n_{1i} n_{1k} n_{2j} \Delta B'_{112} \\
 & + n_{1j} (n_{1i} n_{2k} + n_{2i} n_{1k}) \Delta B'_{121} \\
 & + n_{2j} (n_{1i} n_{2k} + n_{2i} n_{1k}) \Delta B'_{122} \\
 & \left. + n_{2i} n_{2k} n_{1j} \Delta B'_{221} \right. \\
 & \left. + n_{2i} n_{2k} n_{2j} \Delta B'_{222} \right]_{\theta_A, \gamma_A}^{\theta_B, \gamma_B} \quad (II-1)
 \end{aligned}$$

[B] 는 2 X 3 matrix 이므로

$$[B] = \begin{bmatrix} B_{111} & B_{121} & B_{221} \\ B_{112} & B_{122} & B_{222} \end{bmatrix} \quad (II-2)$$

또 Transformation n_{ij} 는 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \quad (II-3)$$

이를 이용하여 [B] 의 성분을 정리하면 다음과 같다.

$$B_{111} = [\cos^3 \beta \Delta B'_{111}$$

$$\begin{aligned}
 & - \cos^2 \beta \sin \beta \Delta B'_{112} \\
 & - 2 \sin \beta \cos^2 \beta \Delta B'_{121} \\
 & + 2 \sin^2 \beta \cos \beta \Delta B'_{122} \\
 & + \sin^2 \beta \cos \beta \Delta B'_{221} \\
 & - \sin^3 \beta \Delta B'_{222}]_{\theta_A, r_A}^{\theta_B, r_B} \\
 B_{121} = & [\cos^2 \beta \sin \beta \Delta B'_{111} \\
 & - \sin^2 \beta \cos \beta \Delta B'_{112} \\
 & + \cos \beta (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) \Delta B'_{121} \\
 & - \sin \beta (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) \Delta B'_{122} \\
 & - \sin \beta \cos^2 \beta \Delta B'_{221} \\
 & + \sin^2 \beta \cos \beta \Delta B'_{222}]_{\theta_A, r_A}^{\theta_B, r_B} \\
 B_{112} = & [\cos^2 \beta \sin \beta \Delta B'_{111} \\
 & + \cos^3 \beta \Delta B'_{112} \\
 & - 2 \sin^2 \beta \cos \beta \Delta B'_{121} \\
 & - 2 \sin \beta \cos^2 \beta \Delta B'_{122} \\
 & + \sin^3 \beta \Delta B'_{221} \\
 & + \sin^2 \beta \cos \beta \Delta B'_{222}]_{\theta_A, r_A}^{\theta_B, r_B}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{122} = & [\cos \beta \sin^2 \beta \Delta B'_{111} \\
 & + \cos^2 \beta \sin \beta \Delta B'_{112} \\
 & + \sin \beta (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) \Delta B'_{121} \\
 & + \cos \beta (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) \Delta B'_{122} \\
 & - \sin^2 \beta \cos \beta \Delta B'_{221} \\
 & - \sin \beta \cos^2 \beta \Delta B'_{222}]_{\theta_A, r_A}^{\theta_B, r_B} \\
 B_{221} = & [\sin^2 \beta \cos \beta \Delta B'_{111} \\
 & - \sin^3 \beta \Delta B'_{112} \\
 & + 2 \sin \beta \cos^2 \beta \Delta B'_{121} \\
 & - 2 \sin^2 \beta \cos \beta \Delta B'_{122} \\
 & + \cos^3 \beta \Delta B'_{221} \\
 & - \sin \beta \cos^2 \beta \Delta B'_{222}]_{\theta_A, r_A}^{\theta_B, r_B}
 \end{aligned}$$



< 이 수 록 >