

‘컴퓨터와 수학교육’ 학습-지도 환경에 관한 연구¹⁾

김 화 경*

본 논문에서는 구성주의 교육관의 관점에서 컴퓨터와 수학교육의 관계를 바라보는 ‘컴퓨터와 수학교육’에 대해 다룬다. ‘컴퓨터와 수학교육’은 그 필요성에 비해 최근까지 원활히 이루어지지 못했다. 그 이유는 먼저 그 구성요소들 사이의 관계가 명확하게 이해되지 못하였고, 이에 따라 구성주의에 대한 명확한 실천적 전략이 부족하였고, 서로 다른 컴퓨터 하드웨어-소프트웨어 환경들이 유기적으로 연결되지 못했기 때문이다. 이에 바람직한 ‘컴퓨터와 수학교육’을 위해서는 먼저 구성요소들 사이의 관계를 이해하고, 이를 바탕으로 ‘컴퓨터와 수학교육’의 실천적 설계 전략을 모색하며, 개별적인 소프트웨어 환경을 마이크로월드의 관점에서 통합적으로 연계시켜야 할 필요가 있다.

본 논문에서는 이러한 문제의식을 가지고 ‘컴퓨터와 수학교육’의 구성요소인 학생, 수학, 컴퓨터를 중심으로 관계된 이론을 고찰하여 각각에 대한 구체적 실천적 전략으로 구성주의, 함수화, 인터넷 상호작용의 원리를 도출한다. 또한 역사적으로 가장 성공적이고 대표적인 ‘컴퓨터와 수학교육’ 환경인 Logo와 동적 기하 환경(DGS)을 이러한 관점으로 분석·고찰하여, Logo를 행동 문자 명령과 대수적 문자 조작을 통해 재귀적 패턴의 탐구가 가능한 환경으로 발전시키고, 점들 사이의 기하적 관계를 다루던 DGS를 관계식과 대수기하적 탐구가 가능한 환경으로 설계, 구현한다. 나아가 Logo와 DGS의 이러한 수준 상승이 가지는 수학교육적 의미를 고찰하고, 타일 및 전개도 등의 새로운 대상을 도입하여 통합 마이크로월드를 구현한다. 본 논문에서는 Logo와 DGS, 그리고 통합 환경을 하나의 JavaMAL 인터넷 환경 속에서 통합 설계하고 이를 구현하며 나아가 그 의미를 논의한다.

1. 서 론

교육과정을 생각하는 관점은 전통주의적 입장과 진보주의적 입장으로 나뉘볼 수 있다(황윤환, 2003). 이러한 관점의 차이는 ET(educational technology)를 바라보는 관점의 차이로 나타나며, 이러한 관점의 차이는 교육에서 컴퓨터의 위치를 결정하게 된다. 첫 번째 관점은

전통주의적 관점으로 ‘컴퓨터로부터의 학습(learning from computers)’을 강조하는 입장이다. Jonassen(1996)은 이러한 관점을 컴퓨터 보조 교수(CAI)로 분류한다. CAI에서 컴퓨터에는 학생들을 가르치는 소프트웨어들이 담겨있고, 미리 지정된 지식이나 기술을 학생들이 습득하는 것을 목표로 한다. 다시 CAI의 형태는 시대별로 반복과 연습(drill and practice), 개인지도(tutorials), intelligent tutoring systems(ITS)로 나뉘

* KICE, hkkim@kice.re.kr

1) 이 글은 김화경의 박사 학위 논문을 요약·정리한 것이다.

볼 수 있다. 먼저 ‘반복과 연습’은 1970년에서 1980년대에 널리 퍼져 있던 ET의 형태로, 주어진 문제를 풀어 학습자는 답을 입력하고 컴퓨터는 답에 대한 피드백을 제공한다. 이는 행동주의자의 자극-반응이론과 강화이론에 이론적 기반을 두고 설계된 ET이다. 1970년대에 시작된 ‘개인지도’는 학습자의 틀린 답에 대해 교정하는 설명을 개인에 따라 다르게 제공한다. 1980년대와 1990년대에 등장한 ITS는 인공지능(AI)의 연구로부터 영향을 받아 기존의 개인지도 방식에 학생 모델, 전문가 모델, 처방 모델이 추가되어 있다. 여기서 학생들의 반응이 학생 모델이고 그 반응이 정확하지 않을 때, 전문가들은 어떻게 문제를 푸는 지의 전문가 모델과 비교하여 그에 대한 처방 모델이 학생들에게 제시된다. 각각의 CAI들은 그 형태는 다르지만 처방이 컴퓨터로부터의 학생에게 전달된다는 공통점을 가지고 있어, 보통 ‘반복과 연습’, ‘개인지도’, ‘ITS’를 ‘컴퓨터로부터의 학습’이라는 관점으로 설계된 컴퓨터 환경이라고 분류한다.

두 번째 관점은 진보주의적 관점이라고 볼 수 있는 ‘컴퓨터와 함께 학습(learning with computers)’를 강조하는 입장이다. 특별히 Jonassen(1996)은 이러한 관점을 구성주의적 시각이라고 부르고 있다. 여기서 구성주의적 시각이란 학생들은 컴퓨터로부터 배우는 것이 아니라 학생들이 지식과 기술을 구성하려고 할 때 컴퓨터가 도움을 줄 수 있다는 점을 강조하는 것이다. 즉 교사로서의 컴퓨터가 아닌 협력자로서의 컴퓨터를 강조하는 구성주의적 시각에서는 지식이나 기술 습득이라는 ‘Know-what’, ‘Know-how’보다는 사고 도구와 함께 지식의 구

성이라는 ‘Know-with’(조한혁, 2003) 관점이 보다 중요하게 된다. 이 관점에서 학생들은 컴퓨터와 함께 구성활동, 탐구활동, 체험활동, 의사소통 활동, 반성활동 등을 통해서 지식을 구성하게 된다.

앞서 살펴본 ET를 바라보는 두 가지 관점 중 ‘컴퓨터로부터의 학습’의 입장은 학습(learning)보다는 교수(teaching)를 보다 강조하며, ‘컴퓨터와 함께 학습’의 입장은 학습을 보다 강조한다. 즉, ‘컴퓨터로부터의 학습’의 관점에서는 효과적인 교수를 중시하며, ‘컴퓨터와 함께 학습’의 관점에서는 의미 있는 지식의 구성을 강조한다.

또한 Papert(1993)는 교육에 대한 접근 관점을 교수주의(instructionism)와 constructionism²⁾으로 구별한다. 교수주의에서는 더 나은 학습을 위해서는 교수법의 개선이 필수적이라고 여기고 교수법 개발을 중시하는 데 비해, constructionism에서는 학습이 일어날 수 있고 의미 있는 지식 구성이 가능한 환경의 설계를 더 중요시 한다. 일찍이 Papert(1980)는 constructionism은 ‘아이들이 전에 학습할 수 있었던 것보다 더 많이 행동으로 학습할 수 있도록 좋은 환경을 아이들에게 제공하는 것’이라 정의한 바 있다. 나아가 이와 같은 차이는 컴퓨터를 보는 관점, 컴퓨터의 역할에 대한 시각에서도 나타난다. 교수주의 관점에서는 정보나 지식 전달 수단인 컴퓨터 소프트웨어의 기능을 강조하고, constructionism 관점에서는 의미 있는 지식 구성 환경인 컴퓨터 마이크로월드(microworld)의 구조를 강조한다.

수학교육과 컴퓨터를 연결할 때 앞서 살펴본 두 가지 관점은 모두 중요한 의미를 가진다. 그

2) constructionism은 우리말로 구성주의로 번역될 수 있겠으나 constructivism과 구별하기 위하여 영어로 제시한다. II장에서 두 이론을 비교한 후 constructionism은 ‘구성주의’로 번역하여 사용하고 constructivism은 영어로 표기하도록 할 것이다.

중 이 글은 진보적 입장, ‘컴퓨터와 함께 학습’을 강조하는 constructionism 관점을 ‘수학교육’과 연결하여 생각한다. 특별히 조한혁(2003)은 ‘컴퓨터와 함께 수학교육’을 생각하는 이러한 연구 분야를 ‘컴퓨터와 수학교육(computers and mathematics education)³⁾’이라 이름 붙인 바 있다. 이는 일찍이 diSessa et al. (1995)이, 진보적 입장인 탐구학습이 현대 교육의 주요한 흐름으로 등장한 이유를 ‘constructivism’과 ‘컴퓨터의 등장’으로 설명하면서, 컴퓨터와 탐구학습을 연결하는 연구 분야를 ‘컴퓨터와 탐구학습(computers and exploratory learning)’이라고 이름 붙인 것과 같은 맥락이다. 우리는 ‘컴퓨터와 탐구학습’의 관점을 학습 내용인 수학에 적용하여 ‘컴퓨터와 수학교육’이라는 용어를 사용한다.

수학교육 측면을 우선 고려해도 컴퓨터를 수학교육에 이용하려는 필요성(신동선·류희찬, 1998)은 널리 공감되고 있고, 컴퓨터 기술의 발전과 그에 관련된 새로운 수학의 등장, constructivism이란 교육 이론의 발전 등의 이유로 컴퓨터와 수학교육을 연결하려는 시도가 계속되고 있다.

필요성에도 불구하고 컴퓨터로부터의 수학교육에 비해 ‘컴퓨터와 수학교육’은 아직은 단편적 적용이외의 제 역할을 수행하지는 못하고 있다. 그 이유는 컴퓨터 환경과 학습자의 활동 그리고 컴퓨터 환경에 표현되는 수학들 사이의 관계가 아직도 명확히 이해되지 못하고 있으며, 제 각각 다른 컴퓨터 환경들 사이의 이해 관계 때문이며, 컴퓨터가 꼭 필요한 구체적인

실천의 예가 제시되지 못하여 그 필요성이 의심받기 때문이다. 다시 말해 각각 별도의 컴퓨터 환경을 통해 이루어지고 있어 이론과 구체적인 예를 공유하지 못하기 때문이다.

이에 특정 컴퓨터 환경을 중심으로 연구를 진행하기 이전에 ‘컴퓨터와 수학교육’의 실천을 위한 이론적 배경과 설계 원칙에 대한 논의가 필요하고, 이러한 이론적 논의가 적용된 구체적인 환경과 실천 사례를 구현할 필요가 있다. 또한 다른 환경에 대한 이해관계를 풀기 위해, 환경들을 하나의 관점으로 이해하고 그 환경들을 수정·보완하고 나아가 통합 환경⁴⁾을 구현하는 것이 필요하다. 나아가 이 통합 환경을 통해 수학적 수준 상승이 모색하고, 그 컴퓨터 환경이 필요한 구체적인 예를 연구할 필요가 있다.

II. 이론적 배경과 마이크로월드

‘컴퓨터와 수학교육’이라는 연구 분야는 수학교육을 위한 컴퓨터 환경⁵⁾의 설계와 학습-지도 환경 설계라는 두 가지 환경 설계와 관련되어 있다. 이 때, 기존의 교육 환경에 비해 컴퓨터라는 새로운 변수가 교육 상황에 추가되어 있어 연구자는 보다 많은 조건을 고려해야 한다. Resnick(1995)은 특별히 컴퓨터를 이용한 학습-지도 활동과 컴퓨터 환경을 설계할 때는 ‘학습자에 대한 이해’, ‘학습 영역(수학)에 대한 이해’, 그리고 ‘컴퓨터 패러다임에 대한 이해’가 모두 필요하다고 지적하고 있다. 이들은 ‘컴

3) constructionism은 우리말로 구성주의로 번역될 수 있겠으나 constructivism과 구별하기 위하여 영어로 제시한다. II장에서 두 이론을 비교한 후 constructionism은 ‘구성주의’로 번역하여 사용하고 constructivism은 영어로 표기하도록 할 것이다.

4) ‘컴퓨터와 수학교육’이라는 용어는 ‘computers and mathematics education’이라는 의미와 함께 ‘mathematics education with computers’라는 의미를 동시에 가지는 것으로 생각해도 무방하다.

5) 구체적으로 이 글은 Logo(Papert, 1980)와 동적 기하 환경의 통합을 통해 ‘컴퓨터와 수학교육’의 실천의 환경 설계를 목표로 한다.

퓨터와 수학교육'의 구성요소들에 관한 이해이다. 우리는 각각의 분야에 관련된 이론적 배경으로 구성주의, 수확화, 상호작용 이론을 살펴 보려 한다. 특히 각각의 이론을 개별적으로 논의하기 보다는 구성주의적 시각을 바탕으로 개별 이론에 접근하여 구성주의와의 관계를 밝히고자 한다. 나아가 이를 '컴퓨터와 수학교육'에 적용할 수 있는 구체적 전략을 함께 모색하고자 한다.

1. 구성주의

Ackermann(2004)은 구성주의라고 불리는 여러 이론들을 대표학자들 중심으로 Piaget의 'constructivism', Papert의 'constructionism'과 Vygotskij(Vygotsky)로부터 시작된 '사회 구성적 접근(socio-constructivist approach)'으로 나누어 비교하였다. 그에 따르면 이들 이론들은 모두 발달 학습이론들로서, 지식은 단순히 전이되는 것이 아니라 학습자가 마음속에서 적극적으로 구성되는 것이라는 관점을 공유하고 있다. 그러나 각각의 이론들이 바람직한 학습을 위해 강조하는 것은 서로 다르다. Piaget의 constructivism에서는 경험(experience)을, Papert의 constructionism에서는 도구(media)를, 사회-문화적 관점에서는 사회(others)를 강조한다(Ackermann, 2004).

이 중 Piaget의 constructivism과 Papert의 constructionism을 비교해 보자⁶⁾. 먼저 인지이론인 Piaget의 constructivism에서 지식은 전이되는 것이 아니라 학습자에 의하여 구성된다고 말한다. Piaget 이전까지 지식은 학습자가 읽거나 들은 것을 복사하여 갖게 되는 것으로, 전이를

통해 학습이 이뤄진다고 여겨졌다. 그러나 Piaget는 지식이란 학습자가 복잡한 지식의 구조를 쌓아가는 것으로, 학습자가 의미를 찾으려고 노력할 때 의미가 만들어진다고 보고 있다. 이러한 constructivism은 이후 여러 가지 다른 형태의 이론으로 발전하였고 많은 학습이론과 인지이론에 영향을 미치게 되었다. Piaget가 놀이 활동을 통한 학습을 언급하고 있기는 하지만 이후의 constructivism은 교수 환경에서의 학습자에 의한 의미 부여와 지식의 구성이라는 학습을 주로 다룬다. 즉, 교수 환경에서 자신이 듣고 배운 것을 동화, 조절을 통해 자신에게 의미 있게 하고 구조를 쌓아가는 학습을 논의한다.

Piaget의 constructivism이 실천적 교육이론이라기 보다는 인지이론에 가까운 반면, Papert의 constructionism은 보다 실제적이고 교육적인 방법이다. Piaget의 제자이자 동료였던 Papert는 Piaget 이론을 기반으로 하고 있으면서도 Piaget의 후계자들과는 다른 방법으로 학습을 설명하고 있다. Papert는 많은 지식의 습득이 학습의 중요한 미덕으로 여겨지던 시대에 그 지식들을 구성할 수 있도록 하는 생성 동력에 관심을 가지고 있었다.

Constructionism은 '아동들에게 그들이 행하여 그들이 전에 배울 수 있었던 것보다 많이 배울 수 있도록 할 만한 좋은 것을 주는 것'을 말한다(Papert, 1980).

Papert가 말하는 '좋은 것을 주는 것'이 바로 환경 설계나 학습-지도 자료 개발과 관련된다. 실제 Papert는 그 자신의 '기어'에 대한

6) '컴퓨터와 수학교육'에서 컴퓨터 환경은 컴퓨터라는 기계, 컴퓨터 마이크로월드, 그 마이크로월드에 존재하는 학습 모델이라는 세 단계의 의미가 있을 수 있다. 특별히 이 글에서 컴퓨터 환경은 컴퓨터 마이크로월드와 그 안에 존재하는 모델을 말한다. 물론 컴퓨터 환경과 학습-지도 환경이 분리되는 것은 아니지만 이 글에서는 설계 순서를 강조하기 위해 두 환경 설계를 구별한다.

경험을 되살려, 아동들에게 마음속으로 가지고 놀고, 만지고, 만들 수 있는 기어와 같이 '좋은 것' 만들어 주려고 하였다. 실제 이러한 생각을 바탕으로 설계된 컴퓨터 환경이 바로 Logo이다. Logo라는 '좋은 것'을 제공하여 그 환경에서 놀고, 만지고, 만들 수 있도록 하여 이전에 배울 수 있는 것보다 많이 배울 수 있도록 하고자 하였다. Logo는 평면 위의 도형과 운동을 '가자'와 '돌자'의 기본 행동의 합성으로 파악하고 아이들이 원하는 그림을 이 기본 명령의 합성을 통해 그릴 수 있도록 하는 환경이다.

Logo와 같은 실제 교육 환경을 설계하여 구현한다는 면에서 constructionism은 constructivism의 실현을 위한 실제적인 방법이다. 만드는 활동 과정에서 학생들은 복잡한 문제에 직면하고 그 문제를 해결하려고 노력할 것이며, 만들기 위해 배운다는 constructionism은 인공물(artifact)을 구성하는 물리적 구성주의를 거쳐서 정신적 구성주의를 말하고 있다.

constructionism은 물리적 구성을 위한 놀이 공간으로 컴퓨터 환경을 강조하고 구체적으로 Logo가 구현되어 있다. Logo는 이후 '컴퓨터와 함께 학습', '컴퓨터와 수학교육'의 대표적인 예가 되어, 이후 학자들에게 큰 영향을 미쳤다. 이 글에서는 constructivism의 구체적 학습 전략 가운데 하나인 constructionism을 이론적 배경과 실천 전략으로 하고 이를 '구성주의'로 번역하여 사용한다. 필요에 따라 Piaget의 constructivism은 영어를 그대로 사용하여 혼동을 피하도록 하겠다.

이렇듯 Logo는 기존 학교수학의 내용을 시각적, 동적으로 나타내는 특징과 더불어 '원'의

예와 같이 학교수학을 다른 관점에서 바라보는 기회를 주는 환경이다. 특별히 Papert(1980)는 학교 기하와 다른 Logo의 특징을 거북 기하(turtle geometry)로 설명하면서 여기에 내재된 작동원리를 '강력한 아이디어(powerful idea)⁷⁾로 설명한다.

새로운 지식의 영역에 발을 들여 놓으면 많은 아이디어들을 만나게 된다. 좋은 학습자는 어떤 것이 강력하고 알맞은 지 골라낼 수 있다 (Papert, 1980).

Papert에 의하면 주어진 정보는 지식이 아니고 학습자는 주어지고, 수집되는 정보를 자신의 지식으로 만들고, 또한 그 중에서 어떤 것이 '강력한 아이디어'인지를 알아내고, 나아가 '강력한 아이디어'를 조절하는 방법을 배우는 것이 학습하는 바른 방법이다. 그렇다면 어떤 아이디어가 '강력한 아이디어'인가? Bers(2001)는 '강력한 아이디어'의 특징을 다음과 같이 정리하고 있다.

- ① '강력한 아이디어'는 특정 영역에 관한 사고의 새로운 방법을 제공할 뿐만 아니라 사고하는 새로운 방법을 제공한다.
- ② '강력한 아이디어'는 한 영역 전체와 다른 영역과의 관계를 되돌아보는 원칙을 제공한다.
- ③ '강력한 아이디어'는 시간과 공간을 초월하여 영향을 지속한다.
- ④ '강력한 아이디어'는 제대로 숙련되어 사용될 때, 개인에게 힘을 부여한다.
- ⑤ '강력한 아이디어'는 감정적 반응을 촉발하고 지식들 사이의 연결의 기초를 다지게 한다(Bers, 2001).

즉 '강력한 아이디어'란 수학이나 과학의 기저에 흐르는 기본적인 개념, 구조와 유사한 면

7) Papert는 '강력한 아이디어'를 '일생 동안 사고하는 도구로 사용될 수 있는 것'이라고 하고 정의하고 있다. 예를 들어 Logo는 미분기하적 아이디어, 즉 '가자'와 '돌자'를 작동원리로 한다.

이 있다. Papert(1980)는 ‘피드백’이나 ‘중간의 경우에 대한 아이디어⁸⁾’를 ‘강력한 아이디어’의 예로 제시하고 있으며, 중력, 빛의 파동, 무한 개념, 함수 개념, 벡터의 합성과 분해 등이 ‘강력한 아이디어’의 예가 될 수 있을 것이다. 구성주의 관점에서 컴퓨터 환경을 설계할 때는 그 컴퓨터 환경에 내재할 ‘강력한 아이디어’를 고려해야 한다. 즉 의미 있는 구성을 위해 아이들의 손에 어떤 도구, 어떤 아이디어를 쥐어 줄까를 고민해야 한다.

구성주의에서는 자유로운 구성을 강조한다. 따라서 학습자에게 일어나는 학습을 예측하거나 의도하기는 어려워, 보통 구성주의적 환경을 창의력 교육과 연계하여 살펴보거나 Picard et al. (2004)처럼 컴퓨터 환경과 학습의 정의적 측면의 연관성을 살펴보는 경우가 많다. 그렇다면 특정 교과인 수학에 대한 학습 환경의 설계 원칙으로 구성주의를 고려하는 것은 전혀 불가능한 것인가?

수학을 구체적 내용에 주목하기보다는 수학적 사고와 수학이라는 언어의 사용 측면에서는 바라본다면 충분히 가능하다. 구체적 수학 지식의 전달보다는 수학적 언어를 사용한 물리적 구성과 그 구성을 통한 수학적 의미 획득의 과정에서 가능성을 찾을 수 있다. 예를 들어, Logo는 미분기하의 ‘강력한 아이디어’를 기반으로 설계되어 있으며, 다른 측면으로 군(group)이라는 대수적 측면으로 해석될 수 있다. Logo에서의 활동을 통해 학생들은 미분기하의 아이디어를 사용하여 말하고, 잠재적으로 이해한다. 마찬가지로 다른 많은 구성주의 환경들이 그 나름대로의 목적, 그 기저에 흐르는

‘강력한 아이디어’를 고려하여 설계되어 있다.

이 때, 학생들이 ‘강력한 아이디어’를 사용하도록 기본 명령으로 공리계가 구성되는 데, 이런 부분을 흔히 ‘블랙박스(black box)’라고 한다. 예를 들어 Logo의 ‘가자’나 ‘돌자’의 기본 명령은 공리계, 블랙박스에 해당하는 것으로 이것이 무엇인지, 어떻게 작동하는지 설명하지 않고, 단지 실생활의 행동을 분석하여 거북이의 기본 언어로 약속한다.

‘강력한 아이디어’ 획득과 이용을 위한 컴퓨터 환경 설계자는 적절하고 효과적인 블랙박스를 선택해야 한다. 이 때, 블랙박스가 수학적 구조를 가진 수학 언어라면 학습자는 그 환경에서 수학 언어를 이용하여 물리적 구성을 이루며 나아가 수학적 이해라는 정신적 구성을 이룰 수 있다.⁹⁾ Logo와 마찬가지로 동적 기하 환경(DGS)는 점과 점들의 국소적 종속 관계를 기본 명령으로 한다. Logo와 DGS는 국소적 구성의 계속되는 합성을 통해 대상을 시각화한다는 공통점이 있다.

2. 구성주의와 수확화

Freudenthal의 현실적 수학교육(Realistic Mathematics Education; RME) 이론은 다른 많은 교육학 이론과는 다르게 ‘수학’이라는 교과를 기반으로 교육론을 전개하고 있다(Presmeg, 2003). RME 이론은 문맥이 제거된 전통적 기계적인 수학에 대한 접근을 실제적 접근으로 바꾸려는 시도로, 활동으로서의 수학을 강조한다. ‘인간이 배워야 하는 것은 닫힌 체계로서의 수학이 아니라 활동, 즉 현실을 수학화하는 과정 그리

8) 지구표면 위에 막대기로 받쳐진 줄의 둘레에 관한 문제를 예로 설명한다. 여기서 ‘다각형과 원과의 동등성’을 설명하면서 사각형과 원의 중간 경우를 생각하는 것이 사각형과 원을 연결한다고 보고 있다.

9) 이런 관점을 취하면 단편적인 지식을 전달하기 위해 설계된 컴퓨터 소프트웨어는 구성주의를 실현하기 위한 환경이라고 보기 힘들고, 오히려 구성주의 환경은 수학의 특정 영역 혹은 수학이라는 교과 전체에 흐르는 ‘강력한 아이디어’의 획득을 위한 환경이어야 한다.

고 가능하다면 수학을 수학화하는 과정이다'와 같이 수학적 사고 활동의 본질인 '수학화'를 강조한다. 여기서 수학화란 현상을 수학자의 필요에 맞게 적절히 손질하여 새로운 것, 즉 본질로 조직해내는 조직화 활동이며, 수학화 과정은 이런 현상과 본질의 교대 작용에 의해 수준 상승이 이루어지는 불연속 과정이다(황혜정 외, 2001). 수학 학습-지도는 학습자의 현실을 수학적 수단으로 조직하는 수평적 수학화에 적합한 풍부한 문맥과 학습상황을 선정하고, 수직적 수학화를 위한 수단과 도구를 제공해야 한다. 이 두 가지 수학화는 다시 현실적 문맥에서 만들어진 상황의 모델(model of)에서 추론을 위한 모델(model for)로 이동과 연결된다. 이때, 수학화 과정에는 실험하기, 관찰하기, 귀납적 추론, 분류하기와 같은 구체적인 활동이 도움이 된다.

보통 RME에서 수학교육의 시작에 해당하는 비형식적 상황인 현실 문맥(realistic context)은 실생활 문맥(real-life context)으로 인식되고 있지만, Van den Heuvel-Panhuizen(2001)은 꼭 그렇지는 않다고 말한다. 즉, 수학화의 출발점인 비형식적 현실 문맥은 학생들이 마음속에서 무언가를 상상할 수 있는 실제적인 것을 강조하는 표현이라는 것이다. 이를 컴퓨터와 관련해 생각하면, 컴퓨터 화면의 가상 세계도 학생들 마음속에 상상할 수 있는 실제적인 것이라면 현실 문맥이 될 수 있다. Bakker et al. (2003)과 같은 연구는 RME 관점에서 IT 도구가 수학화에 미치는 영향을 알아보기 위해, 애플릿(applet)으로 개발하고 그 영향을 연구하고 있으며, 나아가 이를 학습-지도 자료로 사용할 수 있도록 인터넷을 통해 제공하고 있다.

다른 방법으로 컴퓨터 환경에서 보다 '실제

적'인 상황으로 실세계 사진을 이용해, 이 사진에 담긴 수학적 현상을 탐구하는 도구로 컴퓨터를 고려할 수 있다. 즉, 현실적 문맥을 사진이나 동영상과 같은 매체를 통해 컴퓨터 화면으로 옮기고 컴퓨터 기능을 통해 분석하는 수학화를 생각할 수 있다.

구성주의와 연결하여 생각하면, 컴퓨터에 스스로 만든 인공물은 학습자가 소유감을 느끼는 대상이기 때문에, 그 자체가 현실 문맥이 될 수 있으며 보다 일반적으로 컴퓨터와 함께하는 구성 활동은 함수적 사고로의 수학화에 알맞은 현실 문맥이 될 수 있다. 예를 들어 Logo와 DGS에서 인공물을 만들기 위한 구성과 조작(manipulation)¹⁰⁾은 기본 함수의 합성 활동이며, 구성과 조작을 위한 명령은 각각의 활동에 대한 역이므로, 컴퓨터 환경에서 의미 있는 인공물 구성과 그에 대한 조작 활동 경험이 다시 학습자에게 현실 문맥이 되고, 이 문맥은 함수의 합성과 역이라는 함수화를 이끌게 된다. 즉, 이러한 함수화는 구성을 통한 학생 마음속에 존재하는 인공물이라는 현실 문맥에서 출발하는 수학화 중 하나이다.

또한 수학화 이론에서 Streefland(Yackel et al, 2003, 재인용)는 학생들의 수학화에 대응하여 연구자나 교사가 새로운 교수 코스나 과정을 만드는 '교수화(didactising)'를 말한다. 교수화는 학생들을 위한 새로운 교수 코스나 과정을 만드는 '수평적 교수화'와 이를 통해 새로운 설계 원칙이나 전략, 과정 등과 같은 연구 방법론으로 나아가는 '수직적 교수화'로 나뉘볼 수 있다. 이 개념을 컴퓨터 환경과 관련해서 생각하면, 연구자나 교사의 컴퓨터 환경이나 모델 설계¹¹⁾는 학생들을 위한 새로운 교수 코스나 과정을 만드는 교수화의 일부분이다. 이에 교

10) 이 글에서 조작(manipulation)은 Piaget의 '내면화된 가역적 행동'의 조작(operation)과 차이가 있다. 이 글에서 조작은 컴퓨터 등의 외부 환경에 이미 존재하는 대상을 변화시키는 활동만을 의미한다.

수학의 전략의 하나로 컴퓨터 환경을 ‘함수적 구조’로 설계하는 것을 고려할 수 있다. 여기서 함수적 구조란 기본 명령의 합성과 시각적 표현에 대한 역을 강조하는 것을 말한다. Logo와 DGS에 존재하는 많은 탐구 모델은 함수적 구조로 설계된 명령으로 변화, 조작, 실험된다. 이렇게 함수적 구조로 설계된 환경과 그 환경에서 변화를 강조하는 모델 설계 전략은 교수화의 한 가지 전략이며, 우리는 특별히 이를 또한 함수화라고 부른다.

김화경(2005)은 학습을 구별과 변화라는 관점에서 살펴보고, 수학화 활동의 하나로 함수화 활동을 논의하고 있다. 즉, 하나의 명제를 명제함수로 파악하고 수학 실험을 강조하는 함수화 활동은 수학화 이론을 ‘컴퓨터와 수학교육’에서 실현하기 위한 구체적 전략이 될 수 있다.

우리는 함수적 조작 활동이라는 현실 문맥에서 시작하는 수학화 중 하나인 함수화, 교수코스나 과정의 하나로 컴퓨터 환경 설계라는 교수화의 구체적인 전략인 함수화, 그리고 명제를 명제함수로 일반화하는 수학화 과정에 있는 활동의 하나로 함수화를 각각 논의하였다. 지금부터 우리는 서로 떨어져 있는 이들 개념들을 ‘컴퓨터와 수학교육’에서 하나로 묶어 ‘함수화(functionization)’라는 용어로 나타내도록 하겠다. ‘컴퓨터와 수학교육’에서의 ‘함수화’란 함수적 구조로 설계된 컴퓨터 환경에서 함수적 조작 활동을 통해 수학적 대상인 명제나 정의, 수학적 인공물 등을 변화의 관점으로 조작, 실험하는 활동을 의미한다. 수학화는 현상을 수학적 수단으로 조직화하는 활동을 의미하는데, 수학화의 구체적 방법인 함수화는 컴퓨터

환경을 통해 의미 있게 구성된 인공물을 수학적으로 설계된 수단으로 조직화하는 활동을 의미한다. 이는 구성주의가 constructivism의 실현을 위한 교육적 방법이며 전략인 것과 마찬가지로, 조작과 실험 활동을 강조하는 함수화는 ‘컴퓨터와 수학교육’에서 바람직한 수학화를 위한 교육적 방법이며 전략이다.

3. 상호작용

도구가 주어졌다고 그 도구를 이용한 사고가 가능한 것이 아니라, 도구를 이용해서 사고를 하려면 먼저 그 도구가 사용하는 사람에게 인지적 도구가 되어야 한다.

인지적 인공물이란 도구, 즉 인지적 도구이다. 이런 도구들이 마음과 어떻게 상호 작용하는지, 어떤 결과를 만들어 내는지는 그 도구들이 어떻게 사용되느냐에 달려 있다. 어떻게 사용하는지를 아는 사람에게 책은 인지적 도구가 되고, 그 도구가 어떤 종류인가는 독자들이 그 도구를 어떻게 사용하느냐에 달려 있다. 독자들이 자료에 대해 반성적으로 사고하고 어떻게 추리할 것인가를 알지 못하면 책은 사고의 도구가 될 수 없다(Norman, 1998, p. 78).

같은 맥락에서 Mariotti(2002)는 인지적 인공물을 단순 인공물과 사용할 수 있는 ‘도구’로 나누면서 도구화 과정을 Vygotskij의 내면화 과정과 기호적 중재로 설명하고 있다. Mariotti(2002)에 의하면 컴퓨터 환경(artefact)은 학생들이 그에 대한 사용 방법을 인지하게 되어 도구가 된다. 그러나 도구화가 수학적 의미 구성을 보장하지는 않는다. 도구와 그 도구의 중재를 통한 의미 사이의 관계에 대해 Vygotskij

11) 여기서 모델 설계란 마이크로월드에서 조작 가능한 실험실을 설계하는 것으로, 전문적인 프로그래밍 능력이 필요한 마이크로월드의 설계와는 달리, 마이크로월드를 ‘읽는 능력(reading knowledge)’만 있다면 가능하다. 이에 연구자나 교사는 자신의 의도에 따라 모델을 설계할 수 있다.

(Mariotti, 2002, 재인용)는 외부 지향의 기술적 도구의 중재 역할과 내부 지향의 심리적 도구(sign, 기호적 중재자)의 중재 역할로 나누고, 기술적 도구의 심리적 도구로의 변환인 내면화와 심리적 도구에 의한 의미 구성인 기호적 중재를 말하고 있다. Mariotti(2002)는 수학적 의미 구성이 가능한 심리적 도구로의 내면화를 교육적 목표로 보고, 내면화 과정을 '외부 조작의 내적 재구성'과 '개인간의 과정의 개인내의 과정으로의 변환'으로 특징짓고 있다.

같은 맥락에서 '컴퓨터와 수학교육'에서 상호작용은 컴퓨터 환경과 사용자 사이의 상호작용과 컴퓨터를 매개로 한 인간들의 상호작용으로 나뉘 볼 수 있고, '컴퓨터와 수학교육'의 목표를 각각의 원활한 상호작용을 통한 내면화와 그를 통한 수학적 의미 구성으로 볼 수 있다. 실제로 컴퓨터 환경은 사용자와 기계 사이의 의사소통을 열고, 동시에 사용자와 교사 사이의 의사소통 통로를 연다. 다른 말로 학생들과 교사 사이의 관계는 컴퓨터의 도입으로 인해, 그들 사이의 의사소통을 보다 효율적으로 상호작용 하도록 만들고 있다. 컴퓨터 환경이 학습-지도의 의사소통 과정으로 간소화하는 것은 가능하지 않을 지라도, 컴퓨터 환경이 교사와 학생간의 대화의 장을 만들고 있는 것은 분명하다.

우리는 인터넷이라는 기술을 이용해 두 가지의 원활한 의사소통을 도모하는 것을 '인터넷 상호작용'으로 정의한다. 이 표현은 인터넷이 컴퓨터 환경을 도구로써 내면화나 학습자들 사이의 사회적 의사소통을 직접적으로 실현시키지는 않지만, 의사소통과 상호작용을 위한 새로운 통로가 될 수 있다는 점을 강조하는 것이다. '컴퓨터와 수학교육'에서 상호작용은 기존의 수학교육에서의 상호작용 통로에 더해 새로운 기술인 인터넷을 통한 통로를 마련해 주어야 한다. 즉, 컴퓨터 환경은 인터넷 기반으로

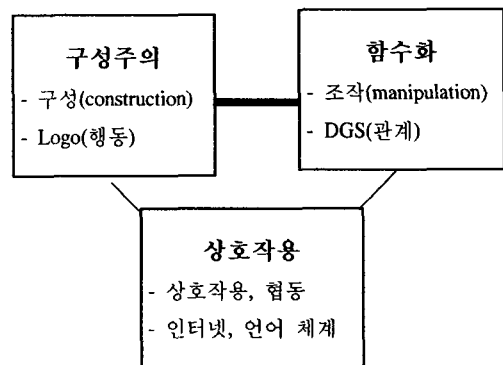
설계되어야 하며, 학습-지도 환경 설계도 인터넷을 적극 고려해야 한다.

이제 앞선 이론적 배경의 고찰을 통해 우리는 '컴퓨터와 수학교육'의 이론적 배경과 기본 원칙을 [그림 II-1]과 같이 얻을 수 있다. 이 기본 원칙은 '컴퓨터와 수학교육'이라는 학습-지도 원칙인 동시에 컴퓨터 환경 설계의 원칙이기도 하다.

첫째, 물질적 구성주의를 거친 정신적 구성주의를 강조하는 구성주의 이론은 '학습자에게 의미 있는 인공물을 만드는 적극적 구성'을 강조한다.

둘째, 수학적 이론 중 학습에서 구별과 변화의 중요성을 강조하는 함수화 전략은 '알맞은 조작을 통한 수학 실험 및 탐구와 그를 통한 수준 상승'을 강조한다.

셋째, 사고 도구로써의 컴퓨터를 강조하는 상호작용은 '학습자와 교사, 학습자와 컴퓨터, 학습자 상호간의 원활한 의사소통과 그 통로'를 강조한다.



[그림 II-1] '컴퓨터와 수학교육'의 실천 전략

구성주의는 constructivism을 구체화 하려는 교육 전략으로 물리적 구성을 강조하며, 학습자가 인공물을 직접 만들 수 있는 놀이 공간을 필요로 한다. 이러한 놀이 공간을 컴퓨터 가상 세계로 구현한 것이 바로 마이크로월드이다.

대표 마이크로월드로는 기호적 마이크로월드인 Logo(Papert, 1980), StarLogo(Resnick, 1994), Boxer(diSessa, 2000), JavaMAL(조한혁, 2003), 그리고 마우스 끌기의 직접 조작 환경인 Geometer's Sketchpad(Goldenberg, Cuoco, 1998; Serra, 1997), Cabri(Laborde, Mariotti, 2001) 등이 있다. 이들은 서로 다른 특징을 가지는 별개의 환경이지만 그 구조를 살펴보면 마이크로월드는 구성과 조작을 강조하는 언어체계라는 특징을 발견할 수 있다. 특별히 구성은 '강력한 아이디어'가 반영된 기본 명령에서 쉽게 시작하며, 마이크로월드에서 구성과 조작의 교대 작용은 더 높은 수준으로 이끌 수 있어야 한다.

이제 이론적 배경에서 도출된 환경 설계의 구체적 전략인 구성주의, 함수화, 인터넷 상호작용을 통합 마이크로월드 설계에 적용해 보도록 하자. 특별히 Logo와 DGS의 통합 마이크로월드 설계는 각각의 수준 상승을 도모하며 같은 언어체계를 강조하는 것으로부터 시작해야 한다.

III. 거북 마이크로월드와 동적 기하 마이크로월드

1. 거북 마이크로월드

Logo는 1980년대에 개발된 이후로 대표적 마이크로월드로 인정받아 왔다. 일단 Logo의 절차적 명령은 순서적으로 거북 행동을 만들어 내고, 학습자는 컴퓨터 화면을 통해 그 결과를 즉각적으로 인지한다. 나아가 Logo는 학습자와 거북이를 동일시한다는 측면에서 '자기중심적' 특징을 가진다.

더 중요한 것은 Papert의 거북이는 '자기중심적'으로 설계되었다는 것이다. 절대적인 xy좌표가

아니라 거북이의 위치와 머리 방향에 따라 방향이 달라진다. 이는 사용자가 자신을 거북이 위에 위치해야 어디로 가는 지 알 수 있음을 의미 한다(Ackermann, 2004).

즉, Logo에서 원하는 그림을 그리려면 학습자는 거북이를 올바르게 움직여야 하는 데, 그러기 위해서는 거북이와 학습자 자신을 동일시해야 한다는 것이다. 예를 들어 별을 그리기 위한 각도를 구하려면 거북이 위에 올라타야 하고, 정십이면체 전개도를 그리기 위해서도 자신의 몸을 거북이와 동일시해야 한다.

또한 학교수학에서 변인은 주로 '수'인데 비해 Logo는 '수'가 아닌 행동 변인을 경험할 수 있어, 변인 x의 '변화 가능 영역'을 넓혀줄 수 있다. 즉, Logo는 단지 평면도형을 그리는 환경이 아니라 구성 절차에 대한 의식화 환경이며 Logo의 명령은 거북 행동 집합 사이의 함수로 이해될 수 있다.

나아가 Logo 명령은 거북 상태를 변화시키는 변환으로도 인식될 수 있다. 각각의 명령은 현재 거북 상태를 다른 상태로 바꾸는 변환이며, 이렇게 거북 상태와 그 변화에 주목하여 변환 관점으로 Logo 명령을 바라보게 되면, Logo 명령의 전체 집합은 변환군(group)을 이룬다. 이 군을 거북군(turtle group)이라고 한다. Leron, Zazkis(1992)는 Logo의 대수적 측면인 거북군에 대한 이해를 통해 Logo를 보다 잘 이해할 수 있으며, 대학 수학교육의 '군 이론(group theory)'의 학습을 위한 시각적, 조작적 예로 사용될 수 있다는 측면에서 거북군 개념의 수학교육적 의의를 논의하고 있다. 또한 거북군의 개념은 직관적으로 현재 거북 상태에 적용되는 행동과 그에 따른 효과로 파악할 수 있어 벡터 개념 학습 환경으로 이용될 수 있고, 이는 Abelson, diSessa(1980)이 지적한 대로 거북 행동의 벡터 표현은 같은 기하적 현상을 보는 다

른 표현 방법이기도 하다.

김화경(2006)은 Logo의 행동을 문자로 나타내는 행동 문자 컴퓨터 마이크로월드인 'L-system'의 수학교육적 의미를 고찰하였다. 행동이나 행동의 자취를 문자를 사용해 표현할 수 있도록 하고, 나아가 문자 조작을 통해 수준 상승을 이끌 수 있는 환경에 대한 논의이다. 이에 행동 문자 표현은 기존 기본 행동 명령에 비해 수준이 상승된 표현일 뿐만 아니라 새로운 구성과 탐구가 가능하다는 점을 예를 통해 설명하고 있다. 즉, Logo에서 수를 이용한 명령을 사용하여 표현하던 평면도형을 변수와 함수를 사용하여 표현하고, 나아가 행동 자체를 문자로 표현하고, 이를 점화식으로 표현하는 표현의 수준 상승을 생각해 볼 수 있다. 행동 문자의 도입은 도형을 새로운 각도로 바라볼 수 있는 기회를 제공하고 재귀적 패턴과 같은 새로운 구성을 이끌게 된다. 김화경(2006)은 이를 통해 구성의 수준 상승 나아가 탐구 대상의 확장을 논의하고 있다.

예를 들어 오각형은 Logo의 '가자'와 '돌자' 명령으로도 그릴 수 있지만 행동 문자로 나타낼 수도 있으며 나아가 재귀적 패턴으로 그릴 수도 있다. 즉 같은 대상을 표현하는 방식이 행동 문자로 인해 수준 상승된다. 또한 이러한 표현의 수준 상승은 오각형을 이용한 [그림 III-1]과 같은 재귀적 패턴의 구성과 탐구로 나아갈 수 있다. 재귀적 패턴을 구성, 조작 가능한 대상으로 다룰 수 있게 되었다는 측면에서 이 환경은 의미 있다.

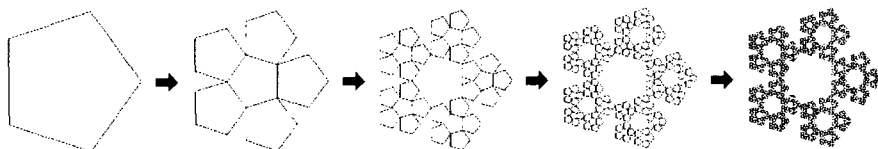
우리는 이와 같이 행동 문자를 도입하여 Logo를 수준 상승 시킨 환경을 거북 마이크로월드라고 부른다.

2. 동적 기하 마이크로월드

컴퓨터 기술의 발전과 더불어 동적인 기능을 가진 DGS라는 ET가 새로이 등장하게 되었다. 기존 학교 기하가 종이와 연필 환경에서 이루어지는 것으로 종이 위에 그려진 도형은 모양이 변하지 않는 정적인 대상이었지만, DGS에 작도된 도형은 크기나 위치를 마음대로 바꿀 수 있는 동적인 대상이다. DGS는 동적인 조작 가능 특징 덕분에 변화하는 상황에서 불변의 성질 탐구에 적절하다. King, Schattschneider (1997)는 DGS를 이용한 다양한 기하 상황과 실험을 예를 통해 살펴보면서, DGS의 역할에 주목하여 그 중요성을 강조하고 있다.

DGS에서 구성되는 도형에서 중요한 것은 점들의 연결성과 함수적 관계성이다. DGS의 동적인 특성은 연결된 점들이 이루는 길이나 각도 등을 보존하지 않지만 함수적 종속 관계에서 점을 마우스로 끌면 그 점에 종속되는 점들도 같이 움직여 처음 부여된 관계를 보존한다. 이에 DGS에서 탐구 대상인 평면도형의 시작은 마우스 끌기의 대상이 되는 점이며, DGS의 탐구활동의 시작은 독립점과 종속점 사이의 종속 관계 부여이다(김민정, 2004).

나아가 기하적 관계 명령(중점, 대칭점 등)과 대비하여 대수적 관계식을 생각해 보자. 즉, 기



[그림 III-1] 행동 문자와 재귀적 패턴

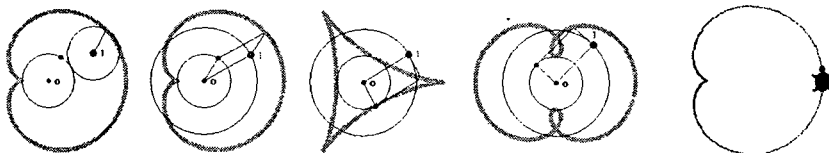
하적 관계를 통해 점들의 종속 관계를 부여하는 방식에서 나아가 대수적 관계, 좌표를 통한 종속성을 고려해 보자. 예를 들어 두 독립점의 중점은 평면 좌표를 이용하여 나타낼 수 있으며, 원위점이나 다른 점들도 직교좌표나 극좌표를 이용해서 나타낼 수 있다. 이러한 좌표의 도입은 종속 관계의 새로운 표현으로 이해될 수 있다. 예를 들어 평행사변형을 두 점 기하적 종속 관계(중점 대칭 도형)로도 표현할 수도 있고, 좌표를 통한 대수적 식으로 표현할 수도 있다. 이때의 대수적 표현은 보다 풍부한 탐구 상황을 구성하고 조작할 수 있도록 한다는 측면에서 표현의 수준 상승으로 볼 수 있다.

나아가 관계식 표현의 도입은 다시 두 가지로 나눠 설계할 수 있다. 하나는 주어진 정보로 점의 좌표를 하나로 규정하는 기능이고 다른 하나는 자취로 x 와 y 사이의 관계식을 만족하는 점의 자취를 시각화하는 기능이다. 예를 들어, 세 점이 주어졌을 때, 평행사변형을 이루는 나머지 한 점을 대수적 관계식으로 규정하는 것이 전자의 기능이며, 관계식 $y^6 = x^2 - x^4$ 의 해집합을 시각화하는 것이 후자의 기능이다. 특별히 관계식이라는 DGS의 새로운 표현은 다시 구성의 수준 상승을 불러온다. 예컨대 원운동을 직선 운동으로 바꾸는 피스톤 운동과 상황 문제를 그래프로 표현하

는 모델링 문제, 원 운동하는 점의 좌표를 이용한 $y = \sin x$ 등의 그래프를 나타내기, 사이클로이드 등은 기하적 관계로는 탐구하기 어려웠던 것을 대수적 관계식 표현하여 새롭게 탐구할 수 있게 된 예들이다.

[그림 III-2]는 동전 2개를 붙여 놓고 한 동전이 다른 동전 주위를 회전할 때, 바깥쪽 동전 위의 한 점의 자취를 다른 방식으로 표현한 것이다. 이 곡선(Cardiod)은 두 원운동 벡터를 시점을 같은 곳에 모아 놓고 각각이 반대 방향으로 원운동을 할 때 두 점이 나타내는 벡터 합성의 자취이다. 이제 이 모델에서 각속도의 차이를 각각 달리하여 두 벡터의 합성의 자취를 실험할 수 있는 실험실이 된다. 또한 크기가 다른 원이나 타원 운동으로 문제 상황을 변화시키면 새로운 탐구 문제가 만들어질 수 있다.¹²⁾

이 때 각각의 점에 종속 관계를 부여하는 대수적 관계식은 마우스나 메뉴 방식이 아닌 언어적 명령으로 표현된다. 이는 거북 마이크로월드가 행동 명령을 행동 문자로 나타내어 수준 상승을 이룬 것과 마찬가지로, 동적 기하마이크로월드는 관계를 나타내는 대수적인 관계식을 도입하여 표현의 수준 상승을 모색하고 있는 것이다. 수식을 이용한 종속 관계 부여는 보다 복잡한 종속 관계를 탐구할 수 있도록 하며, 높은 수학적 탐구 대상으로 수준 상승을



[그림 III-2] 관계식과 평면곡선

12) 여기서 모델 설계란 마이크로월드에 조작 가능한 실험실을 설계하는 것으로, 전문적인 프로그래밍 능력이 필요한 마이크로월드의 설계와는 달리, 마이크로월드를 '읽는 능력(reading knowledge)'만 있다면 가능하다. 이에 연구자나 교사는 자신의 의도에 따라 모델을 설계할 수 있다.

이끌 수 있다.

Logo는 거북이의 행동에서 시작하는 환경인데 비해 DGS는 점들 사이의 관계 부여로부터 시작한다.¹³⁾ Logo는 거북 행동을 만들고 이를 통해 기하적 현상을 만들어 조작하는 환경이고, DGS는 점들 사이의 종속 관계를 만들고 마우스 직접 조작을 통해 기하적 현상을 실험하는 환경이다. 우리는 먼저 두 환경 각각을 행동과 관계의 관점에서 이해하고, 표현의 수준 상승 방법으로 각각 '행동 문자'와 '관계식'의 도입을 생각하고, 이러한 일련의 수준 상승을 마이크로월드에서 실제 구현하였다. 특별히 우리는 Logo를 포함하여 거북이의 행동을 조절하는 마이크로월드를 거북 마이크로월드, 점들 사이의 관계를 맺어주는 DGS를 동적 기하 마이크로월드로 부른다.

즉 거북 마이크로월드는 거북이에 행동 명령을 부여하여 기하적 현상을 만드는 환경으로 행동 문자를 통해 표현의 수준 상승이 가능하도록 설계된 환경이고, 또한 동적 기하 마이크로월드는 점에 종속 관계를 부여하여 기하적 현상을 만드는 환경으로 관계식을 통해 표현의 수준 상승이 가능하도록 설계된 환경이다. 이론적 배경과 관련지어 그 특징을 살펴보면, 거북 마이크로월드는 인공물을 만드는 적극적 구성이 강조되는 환경이며 동적 기하 마이크로월드는 실험과 탐구를 위한 조작이 강조되는 환경이다. 두 환경의 통합은 구성과 조작의 통합으로 볼 수 있으며 나아가 인터넷 상호작용이 가능한 환경으로 구현된다면 보다 큰 상승효과를 가질 수 있을 것이다.

IV. 통합 마이크로월드

구성과 조작을 함께 강조한다는 측면에서 Logo와 DGS의 통합을 생각할 수 있으며, 환경의 상호작용을 강조한다는 면에서도 Logo와 DGS의 유기적 통합이 필요하다. 나아가 보다 정교한 작업을 도모하는 프로그래밍(Logo)과 편리하고 접근하기 쉬운 직접 조작(DGS)은 학습에서 서로 상보적인 효과를 기대할 수 있다. 또한 이러한 통합은 거북 기하와 동적 기하를 연결이며, 구성과 조작의 교대 작용이다. Abelson, diSessa(1980)는 다음과 같이 하나의 개념에 대해 두 가지의 다른 표현을 가진다는 것이 중요함을 역설하고 있다.¹⁵⁾

우리가 같은 것에 대한 서로 다른 두 개의 표현을 가질 때 마다, 하나의 표현을 다른 것으로 번역하고 두 표현을 비교하여 많은 것을 배울 수 있다. 두 표현들 사이의 묘사를 이동하는 것은 어떤 표현에도 속하지 않는 통찰을 던져준다(Abelson, diSessa, 1980: 105).

만약 평면 기하를 바라보는 두 가지 표현(행동과 관계)이 하나의 통합 환경에서 상보적으로 가능하다면, 하나의 표현을 다른 것으로 번역하고 비교하는 과정에서 평면 기하에 대한 보다 나은 이해가 가능하며, 나아가 평면 기하에 대한 새로운 통찰의 기회를 줄 수 있을 것이다. 또한 구성주의와 함수화 전략의 통합 실현이며, 환경들 사이의 상호작용이며 직접 조작과 프로그래밍의 통합이므로 서로의 단점을 보완해 주는 효과를 기대할 수 있다. 두 가지 마이크로월드 통합의 필요성에 대해 Eisenberg (1995)는 언

13) 여기서는 행동(action)과 관계(relation)의 구별을 주장하려는 것이 아니라 환경의 특징과 수준 상승을 설명하기 위해 각자의 환경에서 처음 일어나는 명령의 특징을 정리한 것이다.

14) 유사한 맥락에서 Wilensky(1993)는 “풍부하고 많은 (수학적) 모델은 더 깊은 수학적 이해를 이끈다. 정확하고 가장 좋은 단 하나의 모델을 찾는 것은 잘못이다(Wilensky, 1993, p. 78)”라고 말한다.

급하고 있으며, Sherin(2002)은 실제 구현하려고 시도하고 있다. 이제 구성주의와 함수화 전략에서 두 환경의 통합을 시도해 보자.

통합 마이크로월드 구현의 시작은 두 환경의 상호작용이다. 먼저 두 가지 서로 다른 명령이 공존하며 서로의 명령이 다른 환경의 기본 대상인 거북이와 점에 영향을 줄 수 있어야 한다. 우리는 앞서 Logo를 행동 문자가 가능한 거북 마이크로월드로 설계하였고, 점 중심의 DGS를 생각하고 이 환경을 Logo(교육인적자원부, 2002a, b)와 같은 곳에 존재하도록 설계하였다. 이제 같은 집에 살고 있는 거북이와 점이 서로 상호작용 할 수 있도록 통합 환경을 설계하자. 이를 통해 거북이를 조작하고 동적 기하를 구성하는 환경을 생각해 보자.

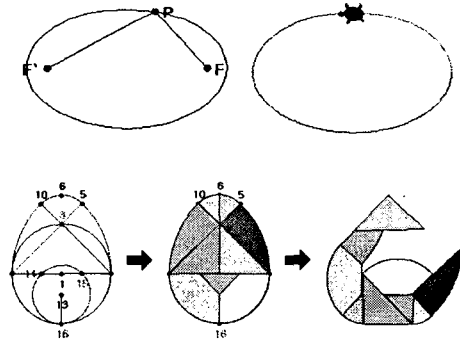
먼저 거북 마이크로월드로 거북이에게 적용되던 행동 명령을 점에도 적용할 수 있도록 하고, 다시 동적 기하 마이크로월드로 적용되던 관계 명령을 거북이에게도 적용될 수 있도록 통합 마이크로월드 구현한다. 예를 들어 거북 마이크로월드의 명령을 통해 도형을 구성하고 거기에 마우스 끌기라는 조작을 더해 선분의 길이와 위치를 바꾸고 그에 따라 정다각형의 한 변의 길이가 달라지는 상황을 생각해 볼 수 있다. 즉, 이 환경은 Logo의 거북이와 DGS의 점이 공존하는 상황이며, DGS의 선분의 길이에 따라 거북이가 가는 거리가 변하는 모델이다. 같은 방법으로 DGS의 각의 크기로 거북이가 회전하는 각도를 정해줄 수도 있고, 역으로 거북이가 움직이면서 중간 중간에 DGS 점을 만들고 이를 연결해 도형을 완성할 수도 있다.

이러한 기능을 통해 거북 마이크로월드로 마찬가지로 같은 언어를 사용할 수 있는 환경으로 설계하였다. 여기서 언어적 명령을 사용하는 이유는 먼저 구성 절차를 확인할 수 있고, 인터넷 상호작용이 가능하도록 하기 위함이다.

또한 언어적 명령을 통해 교사와 학생이 의사소통하고, 오류를 수정할 수 있으며, 언어적 명령을 이용해 인터넷 기반의 '웹 게시판(board)'을 통한 상호작용 한다. 즉, 게시판을 통해 시간적·공간적 제약을 받지 않고 다른 사람들과 의사소통하며 컴퓨터와 상호작용 한다. 게시판을 통해 명령을 저장하고 자신을 표현하며, 다른 사람이나 교사와 함께 구성을 논의하고, 공유하고, 협동한다.

김화경(2005)은 Logo와 DGS의 통합 환경으로 타일(tiles)과 전개도(folding nets)이라는 기능에 대해 말하고 있다. 각각은 명령 형태로 구성되며, 나아가 이러한 대상을 구성, 조작하기 위해 Logo와 DGS 명령은 서로 협동한다.

[그림 IV-1]의 위 그림은 같은 타원을 동적 기하 마이크로월드로 거북 마이크로월드로 표현하는 두 가지 방법을 나타낸다.



[그림 IV-1] 통합 마이크로월드

하나는 두 점(F, F')으로부터 거리의 합이 일정한 점들이라는 관계를 통한 시각화이고 다른 하나는 접선 벡터를 이용한 행동으로 거북이에게 타원 운동을 만드는 그림이다. 서로의 표현은 그 나름의 장점이 있으며 하나를 다른 하나로 번역하는 활동을 통해 타원이라는 기하적 현상에 대한 보다 깊은 통찰이 가능하다.

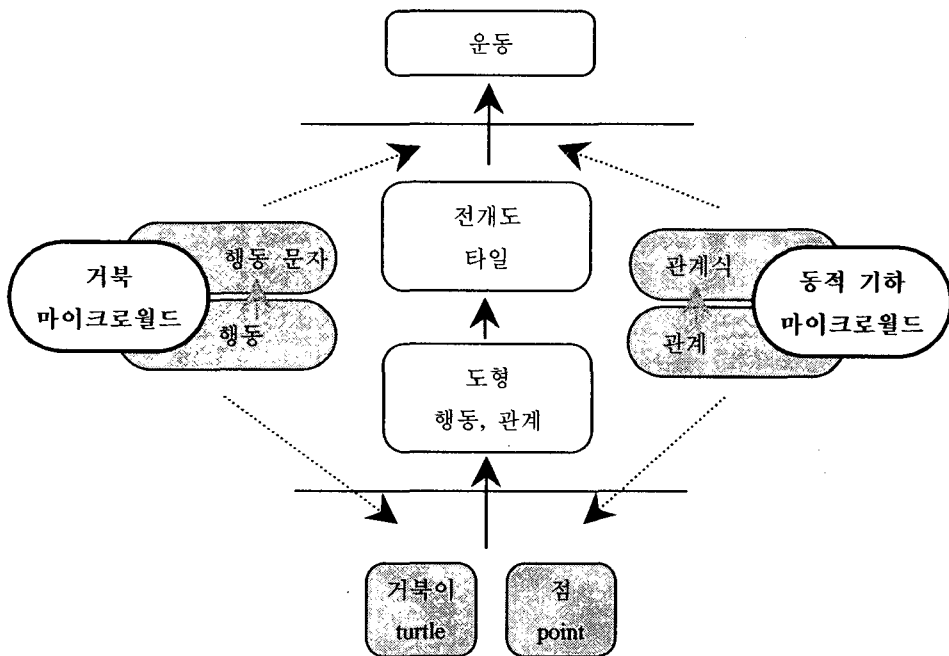
이를 통해 타원이라는 시각적 대상과 그에 대응하는 수식이라는 학교수학에 타원에 대한 새로운 의미를 부여하고 나아가 행성의 타원 궤도와 같은 물리적 현상과 연결할 수도 있다. 즉, 하나의 기하적 현상이 가지는 관계와 행동이라는 서로 다른 특징을 표현하고 조작할 수 있다는 면에서 통합 마이크로월드가 의의를 가진다. 나아가 [그림 IV-1]의 달걀 퍼즐을 만들기 위해서는 행동과 관계 명령이 협력해야 하며, 만들어진 대상인 타일을 조작하여 운동을 일으키기 위해서 다시 한번 협동해야 한다.

[그림 IV-2]는 Logo와 DGS라는 대표적 마이크로월드의 특징을 각각 행동과 관계로 파악하고, 행동 문자와 관계식을 통해 표현의 수준상승을 도모하고, 다시 두 환경의 명령이 상호

적으로 역할을 하며 나아가 타일이나 전개도를 만들기 위해 협동하는 일련의 절차를 나타내는 그림이다. 즉, [그림 IV-2]는 통합 마이크로월드의 표현과 구성의 두 가지 수준 상승과 통합을 정리한 것이다.¹⁵⁾ 또한 이 통합 환경은 인터넷 상호작용이 가능한 환경¹⁶⁾으로 설계되었다.

V. 결 론

컴퓨터가 수학교육에 도입될 때는 반드시 고려해야 할 점들이 있다. 이종영(1999)은 컴퓨터 환경에서의 수학 학습-지도에 관해 컴퓨터의 한계와 표현의 문제점 등을 지적하고 있다. 특별히 메타-인지 이동, 형식적 고찰, 토파르식



[그림 IV-2] JavaMAL 마이크로월드

15) [그림 IV-2]이 어떤 위계를 나타내는 것은 아니지만 가장 위쪽에 있는 '운동'은 타일과 전개도라는 구성의 목표가 다시 조작의 대상이 되어 운동하게 된다는 의미이다. 또한 여기서의 수준 상승은 수준 상승된 표현 방식이 가능하고, 보다 높은 수준의 인공물을 구성할 수 있음을 말한다.

외면치레, 조르단식 외면치레 등의 컴퓨터에 의한 수학 지식의 교수학적 변환의 가능성은 주의해야 한다고 말한다. 또한 시각적 이미지의 강조나 즉각적인 반응 등의 컴퓨터 특징을 강조하여 수학적 사고 기회를 제거하는 문제는 교사의 역할이나 컴퓨터 기능 측면에서 반드시 고려되어야 한다. 실제 유용한 사고도구일수록 잘못 사용되면 수학교육에 더 나쁜 영향을 미치게 되므로 그 영향에 대한 비판적 시각과 연구가 필요하다. 이러한 문제점과 더불어 '컴퓨터와 수학교육'에서는 학습자의 컴퓨터 사용 능력, 교사의 마이크로월드 접근성이 새로운 연구 문제이다. 시뮬레이션에서의 소양 능력과 다르게 컴퓨터 사용 능력 개발은 많은 비용이 소요되며, 기술의 발전에 따른 지속적인 교육이 뒤따라야 한다. 아무리 잘 만들어진 환경이더라도 실제 적용되지 못한다면 좋은 환경이라고 할 수 없을 것이고, 가장 바람직한 마이크로월드는 실제 현장에서 이용되는 컴퓨터 환경임에 분명하다. 이에 마이크로월드를 설계할 때, 이런 문제점에 대한 해결책까지 고려해야 한다.

앞서 언급한 컴퓨터의 교육에의 이용에서 발생하는 부정적 영향 중 몇몇은 컴퓨터 환경이 아니어도 발생하는 문제이며, 어떤 것은 기술의 발전과 더불어 해결될 수 있는 문제이기도 하다. 오히려 컴퓨터와 수학교육의 연결에 대한 비판적 시각과 더불어 그 문제점을 해결하려는 긍정적 자세가 보다 바람직하다 할 수 있다. 이 때, 좋은 '컴퓨터와 수학교육'의 예는 기존 학교수학의 효과적 교수를 위해서 사용되기도 하지만, 컴퓨터의 특성을 잘 살려 학교수학에 새로운 관점을 제공할 수 있어야 한다는 점을 고려해야 한다.

이 글에서 '컴퓨터와 수학교육'은 기존의 학교수학에 대한 컴퓨터 도구를 이용한 교수에

관한 연구와 구별하여, 수학교육을 위한 사고 도구로 컴퓨터와 학습을 연구하는 분야로 정의하고 구체적 실천 방안을 논의하였다. 수학교육과 컴퓨터를 연결하려는 두 가지 관점 중 기존 연구들이 한쪽만을 강조하고 있음을 살펴보고, 다른 관점을 부각하려고 시도하였다. 특히 미리 만들어져 주어지는 컴퓨터 환경이 아닌 이론과 원칙에 따른 컴퓨터 환경 설계를 중심으로 논의를 진행하였다. 이상의 논의를 통해 우리는 '컴퓨터와 수학교육'에 대한 다음과 같은 몇 가지 시사점을 얻을 수 있다.

첫째, 바람직한 '컴퓨터와 수학교육'을 위해서는 물리적 구성이 강조되고, 다양한 실험과 조작 활동이 필요하다. 소박하더라도 의미 있는 인공물을 스스로 구성하고 그 구성물을 움직이는 활동이 있어야 하며, 나아가 구성된 인공물은 새로운 대상으로 나아갈 수 있어야 한다. 이미 만들어져 학생들에게 제공되거나 학생들에게 단순한 조작을 통한 확인을 요구하는 환경은 '컴퓨터와 수학교육' 의미를 가지기 힘들다. 특히 이 글에서는 작은 조각에서 시작하여 상호작용하면서 점점 복잡한 대상을 구성하고, 변화시킬 수 있는 컴퓨터 환경의 예로 통합 마이크로월드를 설계하였다.

둘째, 여러 가지 컴퓨터 환경을 내용에 따라 바뀌가면서 사용하기보다는 통합 환경을 설계하는 것이 보다 바람직하다. 통합 환경에서는 같은 대상에 대한 서로 다른 표현이 가능하고, 이를 통해 각각의 표현이 제공할 수 없었던 새로운 통찰, 다른 시각이 가능하며 나아가 표현의 수준 상승을 이뤄낼 수 있다. 특별히 이 글에서는 Logo와 DGS를 통합해 행동 명령과 관계 명령이 공존하는 환경을 설계하였고, 나아가 행동 명령과 관계 명령을 연결하는 환경으로 행동 문자와 관계식을 통한 표현의 수준 상승을 모색하였다.

셋째, 학생은 컴퓨터를 사고도구로 이용할 수 있어야 하고, 교사나 연구자는 마이크로월드의 설계 의도와 특징을 충분히 이해하는 것이 필요하다. 특히 여기에서 살펴본 마이크로월드는 기존 학교수학 내용의 전달을 위해 설계된 것이 아니므로 무리하게 기존 학교수학 내용을 마이크로월드에 담으려는 시도는 위험하다. 오히려 학교수학을 보는 다른 관점을 경험하는 환경으로 의의를 가진다는 점을 이해하고 수학 언어를 사용한 구성과 조작 그리고 수학적 수준 상승을 추구해야 한다. 이 글에서는 학생, 교사가 쉽게 접근할 수 있는 하나의 방법으로 Logo와 DGS라는 많이 사용되는 마이크로월드의 통합 설계를 시도하였다. 기존의 마이크로월드의 통합은 그들의 특징을 유지하므로 교사가 보다 쉽게 접근할 수 있을 것으로 기대된다.

넷째, '컴퓨터와 수학교육'의 구체적 실천 사례는 컴퓨터가 필요한 것이어야 할 것이다. 컴퓨터가 없어도 할 수 있는 내용이나 컴퓨터가 있으면 오히려 방해가 되는 내용이 아닌, 컴퓨터가 필요한 내용을 다루어야 할 것이며 나아가 이를 통해 학교수학이 다루는 영역의 확장까지 도모할 수 있어야 할 것이다. 구체적 실천 예로 컴퓨터가 필요한 행동 문자를 통한 재귀적 패턴과 종속 관계 수학 실험, 접선 벡터와 평면 곡선을 생각해 볼 수 있다.

이 논문에서 제시된 이론적 배경과 설계 원칙은 '컴퓨터와 수학교육' 논의의 시작에 불과하다. 시대에 따라 기술이 발전하고 학습 이론이 달라지며, 또한 실제 현장에서 실시되어 문제점을 보다 구체적으로 파악하여, 여기서 살펴본 '컴퓨터와 수학교육' 연구는 계속적으로 수정되어야 한다. '컴퓨터와 수학교육'에 대한 이론과 마이크로월드 설계에 대한 연구가 계속 진행되어야 하며, 더하여 현장에 적용할 수 있

는 학습 과정을 설계하고 적용하는 후속 연구가 진행되어야 한다. 이 때, 고려해야 할 것은 '컴퓨터와 수학교육'은 구성 요소들 사이의 상호작용이 중요한 연구 분야로 하나의 구성 요소라도 소홀히 다루어서는 안 된다는 점이다.

또한 앞서 설계된 통합 마이크로월드에 대한 학생, 교사의 접근이 용이할 수 있는 방법에 대한 연구가 보다 필요하다. 이에 대한 하나의 해결책은 친근한 환경에서 좋은 예를 만드는 것이다. 만약 통합 마이크로월드를 통해 바람직한 '컴퓨터와 수학교육'이 일어난다면, 많은 교사와 학생들이 접근하려고 노력할 것이기 때문이다. 이에 '컴퓨터와 수학교육'의 바람직한 예와 좋은 모델을 설계하는 연구와 이를 현장과 연결하는 연구가 꼭 필요하다.

이와 함께 의미 있는 후속 연구들이 계속되어 진정한 의미의 '컴퓨터와 수학교육', 나아가 바람직한 '수학교육'이 이루어지기를 기대해 본다.

참고문헌

- 교육인적자원부(2002a). **수학 3-가 익힘책**. 서울: 대한교과서주식회사.
- _(2002b). **수학 4-가 익힘책**. 서울: 대한교과서주식회사.
- 김민정(2004). 동적기하환경(DGS)의 수학교육적 고찰: 마이크로월드(MicroWorld)적 관점을 중심으로. 서울대학교 대학원 석사 학위논문.
- 김화경(2005). 컴퓨터와 수학교육에서 환경의 설계. **수학교육학연구**, 15(4), 489-504.
- 김화경(2006). 재귀적 패턴과 거북 마이크로월드 설계. **한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육>**, 45(2), 165-176.

- 신동선·류희찬(1998). *수학교육과 컴퓨터*. 서울:경문사.
- 이종영(1999). 컴퓨터 환경에서의 수학 학습-지도에 관한 교수학적 분석. 서울대학교 대학원 박사학위논문.
- 조한혁(2003). 컴퓨터와 수학교육. *한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육>*, 42(2), 177-192.
- 황윤한(2003). *교수-학습의 패러다임적 전환*. 서울: 교육과학사.
- 황혜정·나귀수·최승현·박경미·임재훈·서동엽(2001). *수학교육학신론*. 서울: 문음사.
- Abelson, H. & diSessa, A. (1980). *Turtle geometry*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Ackermann, E. K. (2004). Constructing knowledge and transforming the world. In M. Tokoro & L. Steels (Eds.), *A learning zone of one's own: Sharing representations and flow in collaborative learning environments*. Amsterdam: IOS Press.
- Bakker, A., Doorman, M. & Drijvers, P. (2003). *Design research on how IT may support the development of symbols and meaning in mathematics education*. Retrieved November 27, 2006, from <http://www.fi.uu.nl/publicaties/literatuur/5896.pdf>.
- Bers, M. U. (2001). *Identity construction environments: The design of computational tools for exploring a sense of self and moral values*. Unpublished doctoral dissertation, Media Laboratory, MIT, Cambridge, MA.
- diSessa, A. (2000). *Changing minds*. Cambridge, MA: MIT Press.
- diSessa, A., Hoyles, C., Noss, R., & Edwards, L. (1995). *Computers and exploratory learning: setting the scene*. In A. A. diSessa, C. Hoyles, R. Noss & L. Edwards (Eds.), *Computers and exploratory learning* (pp. 1-12). Berlin: Springer.
- Eisenberg, M. (1995). Creating software application for children: some thoughts about design. In A. A. diSessa, C. Hoyles, R. Noss & L. Edwards (Eds.) *Computers and exploratory learning* (pp. 175-196). Berlin: Springer.
- Feurzeig, W. & Roberts, N. (1999). *Modeling and simulation in science and mathematics education*. NY: Springer-Verlag.
- Goldenberg, E. P., & Cuoco, A. A. (1998). What is dynamic geometry? In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 351-368). London: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Jonassen, H. (1996). *Computers as mindtools for schools*. NJ: Prentice-Hall, Inc.
- King, J. R. & Schattschneider, D. (1997). *Geometry turned on! : dynamic software in learning, teaching, and research*. Washington: The Mathematics Association of America.
- Laborde, C. & Mariotti, M. A. (2001). *Grounding the notion of function and graph in DGS*. Retrieved November 27, 2006, from http://www.tact.fse.ulaval.ca/outils2/Cabri/2001/contributions/Laborde_Mariotti/Laborde_Mariotti.pdf.
- Leron, U. & Zazkis, R. (1992). Of geometry,

- turtles and groups. In C. Hoyles & R. Noss (Eds.), *Learning mathematics and Logo* (pp. 319-352). Cambridge, MA: MIT Press.
- Mariotti, M. A. (2002). The influence of technological advances on students' mathematics learning. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 695-723). London: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Norman, D. A. (1998). *생각 있는 디자인*. (인공지능심리학회, 역) 서울: 학지사. (영어 원작은 1994년 출판).
- Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, computers, and powerful ideas*. Cambridge, Massachusetts: Perseus Publishing.
- Papert, S. (1993). *The children's machine: rethinking school in the age of the computer*. New York: Basic Books.
- Picard, R. W., Papert, S., Bender, W., Blumberg, B., Breazeal, C., Cavallo, D., Machover, T., Resnick, M., Roy, D., & Strohecker, C. (2004). Affective learning- a manifesto. *BT Technology Journal* 22(4), 253-269.
- Presmeg, N. (2003). Creativity, mathematizing, and didactizing: Leen Streefland's work continues. *Educational Studies in Mathematics* 54, 127-137.
- Resnick, M. (1995). New paradigms for computing, new paradigms for thinking. In A. A. diSessa, C. Hoyles, R. Noss & L. Edwards (Eds.), *Computers and exploratory learning* (pp. 31-43). Berlin: Springer.
- Resnick, M. (1994). *Turtles, termites, and traffic jams: explorations in massively parallel microworlds*. Cambridge: MIT Press.
- Serra, M. (1997). *Discovering geometry: an inductive approach*. Berkeley, CA: Key Curriculum Press.
- Sherin, B. (2002). Representing geometric constructions as programs: a brief exploration. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 7(1), 101-115.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2001). Realistic mathematics education as work in progress. In F. L. Lin (Ed.), *Common Sense in Mathematics Education, Proceedings of 2001 The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education* (pp. 1-43). Taipei, Taiwan: National Taiwan Normal University.
- Wilensky, U. J. (1993). *Connected mathematics: Building concrete relationship with mathematical knowledge*. Unpublished doctoral dissertation, Media Laboratory, MIT, Cambridge, MA.
- Yackel, E.; Stephan, M.; Rasmussen, C. & Underwood, D. (2003). Didactising: continuing the work of Leen Streefland. *Educational Studies in Mathematics* 54, 101-126.

A Study on Learning and Teaching Environments for Computers and Mathematics Education

Kim, Hwa Kyung (KICE)

There are two strands for considering the relationships between education and technology. One is the viewpoint of 'learning from computers' and the other is that of 'learning with computers'. In this paper, we call mathematics education with computers as 'computers and mathematics education' and this computer environments as microworlds.

In this paper, we first suggest theoretical backgrounds as constructionism, mathematization, and computer interaction. These theoretical backgrounds are related to students, school mathematics and computers, relatively. As specific strategies to design a microworld, we consider a physical construction, functionization, and internet interaction. Next we survey the different mi-

croworlds such as Logo and Dynamic Geometry System(DGS), and reform each microworlds for mathematical level-up of representation. First, we introduce the concept of action letters and its manipulation for representing turtle actions and recursive patterns in turtle microworld. Also we introduce another algebraic representation for representing DGS relation and consider educational meaning in dynamic geometry microworld. We design an integrating microworld between Logo and DGS. First, we design a same command system and we get together in a microworld. Second, these microworlds interact each other and collaborate to construct and manipulate new objects such as tiles and folding nets.

* **Key words** : computers and mathematics education('컴퓨터와 수학교육'), microworlds(마이크로월드), Logo, action letters(행동 문자), recursive relation(재귀적 관계), DGS, algebraic relation(대수적 관계), internet(인터넷), tiles(타일), folding nets(전개도)

논문접수 : 2006. 9. 28

심사완료 : 2006. 11. 10