

Clairaut의 <기하학 원론>에 근거한 7-나 단계 작도단원의 자료 개발과 적용에 관한 연구

이화여대 교육대학원 박명희
parkmheel@hanmail.net

이화여대 수학교육과 신경희
skh@ewha.ac.kr

본 논문의 연구자는 중등과정 <7-나 단계> 작도 단원의 의미 있는 학습을 위하여, 자연스러운 발생을 강조하는 Clairaut의 <기하학 원론>을 기반으로 한 5차시 학습 자료를 개발하였다. 중학교 1학년 학생 6명을 대상으로 이를 적용한 수업을 실시하였고, 작도문제 해결을 분석에서 시작하여 작도, 확인 및 탐구로 이어지는 학습 과정의 특징을 분석하였다.

주제어 : 역사 발생적 원리, Clairaut의 <기하학 원론>, 작도

0. 서론

수학교육은 학생들이 수학적 지식을 스스로 터득하도록 창의적인 활동과정에 참여시키고, 자기 주도적으로 지적 가치를 창조할 수 있는 학습 환경을 만들어 주어야 한다. 논리적이고 합리적인 사고력으로 수학적 지식을 활용하여 다양한 문제를 해결할 수 있는 수학적 힘을 길러 주어야 한다. 하지만 대부분의 학습 환경은 수학자들의 수학적 사고의 산물인 만들어진 수학을 연역적으로 제시하여 수학적 사고의 기회를 박탈하고 있다. 연역적으로 다듬어진 수학 지식을 가르치는 것은 수학적 사고의 산물을 가르치는 것일 뿐 수학적 사고를 가르치는 것은 아니다.

이는 논리-연역적 전개 방법으로, 구체적인 과정과 예시가 생략되고 정리가 응용에 선행되는 형식적 접근의 Euclid의 <원론>을 기반으로 한 기하 교육 형태에서 그 원인을 찾을 수 있다([4], [6], [13], [14], [15]). 이에 대한 비판의 대안의 하나로 분석적·발생적 방법으로 전개된 Clairaut의 <기하학 원론>(1741)은 발견과 개발정신을 함양하고 지식의 구성과 확인 및 응용 그리고 새로운 진리의 발견에 도움이 되는 방법을 찾기 위하여 발생적 원리를 근간으로 하고 있다. 발생적 원리는 수학을 공리적으로 전개된 완성된 것으로 가르치는 형식적인 수학교육의 결함을 극복하기 위하여 제기되

어 온 교수학적 원리이다. 특히 Clairaut의 <기하학 원론>은 내용과 학습활동을 조직하는 데 수학의 역사적 발달을 지표로 사용한 기하 교과서이다. 이 책은 필요에 따른 발생적 방법에 기반을 두고 정당한 추론과 직관적인 요소를 결합함으로써 정신의 자연스러운 절차에 맞도록 하였고 학습자가 수학을 어떻게 잘 학습할 수 있는가 하는 문제의 해법을 수학의 역사에서 찾고 있다([5], [9], [10], [12]).

<7-나 단계> 직관기하의 영역 중 작도는 기하학적 직관을 키우고 논리적 추론 능력을 향상시키는 역할을 함으로써 학교 수학에서 직관기하와 논증기하의 자연스런 연결을 위해 중요한 역할을 하게 된다.

하지만 여러 연구 결과는 작도와 관련된 현행 학습지도가 단편적으로 작도 순서의 지도에 중점을 두고 그 순서의 암기를 강조하며, 삼각형의 결정조건과 합동조건을 유도하는데 초점이 맞추어져 있음을 지적하고 있다([2], [3], [7], [8], [10], [11], [16]). 작도를 왜 해야 하고 어떤 필요에 의해서 나타났으며 작도의 의미와 역할이 무엇인지에 대한 논의와 사고 없이 단지 방법적 차원으로 암기에만 의존하고 있음을 알 수 있다. 작도 방법을 스스로 발견하기 위한 분석, 작도의 타당성을 밝히는 확인, 작도 결과를 일반화하는 반성단계를 생략함으로써 작도문제 해결을 통한 기하학적 직관과 논리적 추론 능력의 향상이라는 작도 지도 목적을 달성하기 어렵다.

본 연구에서는 <7-나 단계> 작도단원의 지도 시 학생들의 흥미와 필요를 우선으로 하고, 정리들이 출현하게 된 이유와 그러한 아이디어에 이르는 과정을 함께 접근하면서 수학의 역사 속에서 자연스럽게 발견할 수 있도록 역사 발생적 학습-지도 원리에 따른 교재 구성을 하였다. 또한 6명의 학생들을 대상으로 이를 활용한 작도 문제해결 학습과정은 분석에서 시작하여 작도방법을 발견하고 확인, 탐구과정을 거치는 구체적인 수학활동을 실행할 수 있도록 하였다.

1. Clairaut의 <기하학 원론>과 작도내용 교과서 비교

Clairaut(1713~1765)의 <기하학 원론>은 역사 발생적 원리에 근거한 최초의 기하 교재이다. 수학 지식의 발견과정을 숨기고 공리나 일반적인 원리로부터 시작하는 기존 Euclid <원론>의 논리-연역적 전개 방법의 문제점에 대한 대안으로 만들어진 이 책은, 수학의 첫 발견자들은 그 당시에는 모두 초보자였음에 주목한다. 첫발을 내딛게 된 요인은 어떤 필요였고 이 필요중의 하나는 당시에는 토지측량이었다. 측정해야 할 것이 있고, 그 속에는 측정 가능한 거리 또는 접근가능하지 않은 거리가 있어 먼저 상황분석이 필요했다. 이 측정과정에서 필수적으로 발견된 초보적 원리는 자연스러운 호기심으로 유사성이 강한 또 다른 원리를 만들어내고, 이것에 대한 정당화 과정을 거치게 됨으로 새로운 탐구에 몰입할 수 있게 된다. 상식과 기초 산술 능력만 갖추면 쉽게 이해할 수 있도록 만들어진 이 책은 인간의 정신에 자연스럽도록 한다는 대원칙

하에 정당한 추론과 직관적인 요소를 결합하였고 학습자가 수학을 어떻게 잘 학습할 수 있는가 하는 문제의 해법을 수학의 역사에서 찾은 것이다.

Clairaut의 입장에서 기하학의 필요는 실생활 맥락의 필요이므로 실생활 문제 상황의 해결 방법으로 접근하여 수학의 응용력을 키우고 일상에서의 유용성을 느낄 수 있게 하고 있다. Clairaut는 토지 측량이 목적이 아니라고 책 서문에서 밝혔듯이 토지측량은 본격적인 기하학습을 위한 수단이다. 이 책은 학교수학에서 현실에 기반을 둔 필요상황에서 초보자의 입장으로 학습을 시작하는 교수학적 아이디어를 제공하고 있다.

한편, 현행 7차 교육과정의 16종 교과서의 작도단원은 작도 문제의 해결을 위해 학생들 스스로 탐구하며 발견할 수 있는 기회가 제한적이다([1], [2]). 대다수의 교과서가 종이접기라는 동일한 방법을 활용하고 학생들은 종이접기 활동 순서를 따라하며 교사에 의해 유도된 탐구를 하여 다양한 방법으로 사고하고 추측하고 탐구할 수 있는 기회를 갖지 못하고 있다. 또한 작도의 방법을 모두 순서화 시켜서 명시적으로 제시하는 것은 학생들에게 자칫 순서 암기에만 집중을 하도록 하고 또한 작도 방법이 유일하게 존재한다는 잘못된 인식을 줄 수 있다. 실제적인 교수-학습 과정의 전개는 교사에 의해 이루어지지만 교과서에 구체적으로 제시되지 않은 부분은 학습 과정에서 소홀히 하기 쉽다. 작도 순서만을 강조하고, 작도활동의 탐구과정과 그에 대한 확인과 반성을 다루지 않으면 교수-학습 과정은 학생들의 사고 활동을 어렵게 한다. 작도문제에서도 적절한 학습 단계를 거쳐 의미 있는 이해와 탐구 및 반성이 이루어질 수 있도록 할 필요가 있다.

선분의 수직이등분선은 <8-나 단계> 도형의 성질 중 삼각형의 외심과 밀접한 관계가 있다. 작도 활동에서 수직이등분선의 성질에 대한 탐구 및 분석을 선행함으로써 도형의 성질을 재인식하고 기하학적 직관과 논리적 추론 능력을 향상시킬 수 있다.

다음 <표 1>은 선분의 수직이등분선 작도에 대한 Euclid <원론>, 7-나 교과서, Clairaut <기하학 원론>의 내용을 비교하고 있다.

< 표 1 > 선분의 수직이등분선의 작도 내용 비교

Euclid의 <원론>	7-나 교과서	Clairaut의 <기하학 원론>
작도에 대한 명제를 제시하고 풀이과정을 논리적인 해설과 함께 순서대로 설명하며 선분의 수직이등분선에 대한 성질을 정리로 종합하여 제시한다.	종이접기를 통한 탐구 활동으로 선분의 수직이등분선의 용어와 뜻을 설명하고 선분의 수직이등분선의 작도 순서를 제시한다.	수선을 긋기 위한 방법이 필요한 상황을 제시한 후 어떤 직선에 어느 쪽으로도 기울지 않게 내린 직선은 그 직선에 수직이 된다는 수선의 성질을 이용한 분석을 먼저하고 작도 방법을 탐구한다. 또한 작도에서 구한 것이 수선이 됨을 확인하고 새로운 조건을 탐구한다.

Clairaut의 <기하학 원론>은 작도가 필요한 상황을 먼저 제시한다. 예를 들어 수선의 작도에서도 한 점에서 한 직선까지의 거리를 측정해야 하는 상황 즉, 강변에 위치한 사람이 자신이 있는 지점에서 건너편 강변까지의 거리가 얼마나 되는지 알고자 하는 경우를 제시한다. 또한 어떤 직선에 어느 쪽으로도 기울지 않게 내린 직선은 그 직선에 수직이라는 수선이 되기 위한 성질을 분석하여 작도 방법을 탐구한다. 그에 반해 Euclid의 <원론>은 선분의 수직이등분선 작도에 대한 명제를 제시하고 풀이과정을 논리적인 해설과 함께 순서대로 설명하고 선분의 수직이등분선에 대한 성질을 정리로 종합하여 제시한다. 즉, 유한한 길이의 선분을 이등분하는 작도를 할 때, 주어진 선분을 밑변으로 하는 정삼각형을 만들고 꼭지각을 이등분하면 수직이등분선이 됨을 설명한다. 이는 형식적인 접근으로 풀이 과정을 읽으면 이해가 되지만 왜 정삼각형을 만드는지, 왜 보조선을 그어야 하는지에 대한 동기가 선행되지 않아 학생들의 사고 활동을 제한하는 것이다. 또한 현행 7-나 교과서의 선분의 수직이등분선 작도는 대다수의 교과서가 종이접기를 통한 탐구 활동으로 선분의 수직이등분선의 용어와 뜻을 설명하고 작도 순서를 명시적으로 제시한다. 종이접기를 통한 탐구 활동은 수직이등분선의 작도에 대한 탐구라기보다는 수직이등분선에 대한 확인 과정이라 할 수 있다. 위와 같이 현행 7-나 교과서의 작도 단원은 작도 방법에 대한 분석과 확인 및 탐구 활동보다는 작도 순서 지도에 초점이 맞추어져 있음을 알 수 있다.

2. 작도 문제의 학습 단계

Clairaut의 <기하학 원론>에서 작도 문제의 학습은 조건에 적합한 도형을 작도할 수 있도록 그 도형의 성질을 조사하고, 주어진 조건과 결부시켜 그것을 작도할 수 있는 필요조건을 찾아내서 작도법을 발견하기 위한 분석을 선행한 후, 분석으로 알게 된 작도의 방법을 서술, 작도에 의하여 얻어진 도형이 조건에 적당한가를 확인하며 다른 경우 해가 있을 수 있는가? 해가 있다면 그 수는 몇 개인가? 등을 탐구하는 과정으로 이루어진다.

이와 같은 작도 문제의 학습 단계를 한인기([11])는 Polya의 문제해결 4단계를 수정하여 작도 문제 특성에 따라 분석, 작도, 증명, 탐구의 네 단계를 제시하였다. 이 과정에서 한인기는 연역법과 대비되는 분석-종합법을 적용하고 있다. 우선 분석은 작도하려는 것을 이미 작도가 되어졌다고 생각하고 필요한 조건들을 찾아간다. 이 과정은 주어진 요소와 구하는 요소들 사이의 관계를 설정함으로써 주어진 문제의 해를 찾아가는 중요한 단계이다. 즉, 이 분석 과정에서 ‘구하는 작도를 위해서 무엇을 해야 하는가? 어떤 순서로 작도를 수행해야 하는가? 등과 같은 질문을 생각하고, 그에 대한 답은 우리가 찾는 작도 문제 해결의 계획 수립에 밀접히 관련된다.

분석을 통해 주어진 요소와 구하는 요소들 사이의 관계가 설정이 되면, 작도를 수

행하게 된다. 작도단계는 문제의 조건에 맞는 작도를 수행하며, 그 작도 과정을 하나 하나 순서대로 나열하는 것이다. 작도 문제 해결의 계획 수립 과정에서 ‘분석’이 주된 역할을 했다면, 이 작도 단계는 ‘종합’이 중심적인 역할을 하는 단계라고 할 수 있다.

세 번째 증명단계에서는 얻어진 작도가 문제의 모든 요구 조건을 충족시키는가를 확인한다. 즉, 증명단계는 수행한 작도와 각 단계들의 타당성을 밝히는 단계로써, 학습자들은 스스로에게 얻어진 작도를 논리적으로 설명하고, 내면화하는 기회를 가지게 된다.

마지막 탐구 단계는 작도 문제의 풀이를 마무리 짓는 단계로써, 이 단계에서는 해의 존재 조건이나 또 다른 풀이 방법 등 다양한 사고 개발 증진이 가능하다.

위에서 제시한 작도 문제해결 4단계는 작도를 문제해결의 입장에서 학습자의 능동적인 사고 활동을 강조한 것으로 본 연구자가 개발한 학습 자료는 Clairaut의 <기하학 원론>에서 자연스럽게 제시하고 있는 작도 문제해결 4단계를 구체적으로 반영하였으며 교수-학습 과정에서 학생들의 수학적 사고 활동이 이루어 질 수 있도록 강조하였다.

3. 학습 자료의 개발 방향과 특징

본 연구에서 개발한 학습 자료는 필요에 의한 기하의 출현, 실생활 문제 해결을 통한 접근, 초보자에게 자연스런 방법으로서 직관적 요소와 논리적 요소의 조화, 작도문제 해결을 분석에서 시작하여 확인 및 반성적 사고 활동을 강조, 활동적 원리의 구현을 특징으로 하고 있는 Clairaut의 <기하학 원론>에 근거하고 있다. 개발된 학습 자료를 통해 학습자의 수학적 사고 활동이 이루어질 수 있도록 <7-나 단계> 작도 단원의 학습 자료 개발 방향을 다음과 같이 설정하였다.

1. 개념 및 명제가 요구되는 상황을 설정하여 그 필요성을 역설함으로써 자연스러운 발생을 바탕으로 한다. 즉, 필요에 의해 시작하고 점차적으로 형식화하는 수학 전개 방식으로 수학 학습자에게 흥미를 유발시키고 학습을 용이하게 하도록 한다.
2. 실생활 문제 상황에서 접근한다. 학생 주변의 다양한 상황을 바탕으로 한 학습 자료를 통해 학생들이 스스로 주어진 상황의 해결 방법으로서 학습 내용을 재발명할 기회를 제공하도록 한다.
3. 개념을 처음 배우는 학생들이 이해하기 쉽도록 자연스러운 방식으로 제시하여 상식과 기초 산술 능력만 있으면 쉽게 이해할 수 있도록 일상 언어로 표현하도록 한다.
4. 작도 과정을 문제 해결의 입장에서 작도 방법을 스스로 발견하게 하기 위한 분석, 작도의 타당성을 밝히는 확인, 작도 결과를 일반화하는 반성의 단계를 강조하여 의식적으로 실행할 수 있도록 구체화 하였다.

5. 역사 발생적 원리에 입각한 구성으로 인식 과정에서의 주체의 활동적, 구성적 역할을 강조하는 활동주의 이론을 실천하며 구체적인 도구의 사용으로 도형 개념 형성에 도움이 될 수 있도록 한다.

본 연구에서 개발한 학습 자료는 학생들이 작도 방법을 스스로 발견하게 하기 위한 분석, 작도의 타당성을 밝히는 확인, 작도 결과를 일반화하는 반성을 강조하여 의식적으로 수학적 사고 활동이 이루어질 수 있게 하였다. 정형화 된 기존의 지식을 일관된 방식으로 수동적으로 받아들이기만 하는 것이 아니라 학생 스스로 탐구하여 주체적으로 구성하고 반성하는 즉, 수학적 사고 활동이 이루어지도록 하였다..

각 차시별 학습 자료의 구체적인 내용과 특징 및 교재 개발의 근거가 된 Clairaut의 <기하학원론>의 해당 부분은 <표 2 >과 같다

< 표 2 > 학습 자료의 구성 내용 및 특징

차시	학 습 내 용	특 징	Clairaut의 <기하학원론>
1차시	I. 작도의 역사 II. 간단한 작도 1. 두 점을 잇는 선분 그리기 2. 각을 이등분하기	<ul style="list-style-type: none"> 정육각형을 정십이각형으로 만들기 위하여 각의 이등분선이 필요함을 느끼게 한다. 컴퍼스과 눈금 없는 자의 쓰임새를 탐구하게 한다. 	<ul style="list-style-type: none"> 제1부 II, LXXII, LXXIII
2차시	II. 간단한 작도 3. 수선 그리기 [1] 수선 올리는 방법 [2] 수선 내리는 방법 [3] 선분 이등분 하기	<ul style="list-style-type: none"> 한 점에서 한 직선까지의 거리를 측정해야 하는 상황을 제시하여 수선을 긋기 위한 방법이 필요함을 알게 한 후 초보자의 정신에 자연스러운 방식으로 분석을 통해 작도 방법을 발견 하게 한다. 	<ul style="list-style-type: none"> 제1부 II, V, VII, VIII
3차시	II. 간단한 작도 4. 크기가 같은 각 그리기 5. 평행선 - 주어진 점을 지나는 평행선 긋기	<ul style="list-style-type: none"> 평행선이 필요한 상황을 제시한 후 직사각형을 작도함으로써 평행선을 찾을 수 있게 한다. 평행선을 작도하는 다양한 방법을 탐구하게 한다. 	<ul style="list-style-type: none"> 제1부 XXIX 제1부 XI
4차시	III.삼각형의 작도 1. 삼각형의 세 변을 알 때 2. 삼각형의 두 변의 길이와 그 끼인각을 알 때	<ul style="list-style-type: none"> 토지의 측량에서 삼각형의 작도가 필요한 상황을 제시한다. 두 변의 길이만 알고 있을 때 필요한 최소한의 조건이 무엇인지 인식하게 한다. 	<ul style="list-style-type: none"> 제1부 XXVI 제1부 XXVIII
5차시	III.삼각형의 작도 3. 삼각형의 한 변과 그 양 끝 각을 알 때	<ul style="list-style-type: none"> 한 변의 길이만 알고 있을 때 필요한 최소한의 조건이 무엇인지 인식하게 한다. 삼각형의 결정조건을 자연스럽게 유도한다. 	<ul style="list-style-type: none"> 제1부 XXX

현행 교과서의 도형영역 중 작도 단원은 교과서 마다 차이는 있지만 4~6차시로 구성이 되었으며 본 연구자가 개발한 학습 자료는 현 교육과정의 작도 단원 구성 체계를 따르며 5차시 분량으로 구성되었다. 개발된 학습 자료(2/5차시 학습 지도안)는 부록에 제시하였다.

4. 학습 과정 분석

역사 발생적 원리에 입각하여 쓴 Clairaut의 <기하학 원론>에 근거하여 본 연구자가 개발한 학습 자료를 적용한 수업에서 나타나는 학습과정의 특징을 분석하고자 서울 D중학교 1학년 6명의 학생을 대상으로 5차시 수업을 실시하였다. 친숙한 분위기에서 활발한 의사소통이 가능하도록 같은 반 학생들을 대상으로 지원자와의 면담을 통해서 각 범주에서 남녀가 각각 1명씩 포함되도록 여섯 명을 표집 하였다. 이들 학생의 성취 수준은 상, 중 하 각각 2명씩이었고, 기하단원을 학습하기 전인 1학기 초 진단평가 결과로 연구 대상을 선정하였다. 탐구 수업과정에서 수학적으로 사고하는 태도 측면에서의 특징을 알아보기 위하여 자연스러운 교수 상황에서 과정에 초점을 두는 질적 사례연구 방법을 이용하였다.

여섯 명의 학생들은 협동학습이 가능하도록 좌석 배치는 모둠을 이루게 하였다. 교사는 칠판과 학생들의 모둠을 오가며 전체적인 수업 진행과 학생들의 토의 및 문제 해결 과정에서 의사소통이 원활히 이루어질 수 있도록 유도하였다. 5차시 전 수업과정은 비디오 녹화 및 오디오 녹음되었으며, 학생과 교사의 프로토콜을 전사한 자료, 관찰 일지, 수업일지, 면담자료 등을 최종 분석하였다.

분석틀은 학습 자료의 개발 방향 목적에 부합되는 수학적 개념의 필요상황 인식, 발견하는 사고활동, 작도 활동 후 확인 및 반성적 사고, 새로운 문제에의 적용 등으로, 학생들이 학습 과정에서 수학적으로 사고하는 태도를 관찰, 분석하였다.

(1) 작도가 필요한 상황을 인식하고 작도 방법을 탐구

학생들에게 수학에 대한 동기유발과 의미를 부여하기 위해서는 실제적인 상황으로부터 학생 스스로 수학 개념에 대한 필요를 인식하고 그 상황을 해결하기 위한 유용한 도구로서 활용할 수 있도록 해야 한다. 또한 주어진 상황에서 자연스러운 사고 과정을 통하여 수학적 개념을 탐구하고 이끌어내는 활동으로 수학의 의미와 가치를 일깨워 줄 수 있으며 수학적으로 사고하는 능력과 태도의 향상에 좋은 기회가 될 수 있다.

발췌문1, 발췌문2는 작도가 필요한 상황을 인식하고 작도 방법을 탐구하고 있는 사례들이다.

발췌문1 : 강변에 위치한 사람이 반대편 강변까지의 거리를 측정하기 위해 수선의 작도가 필요함을 인식

1. 교사 : 강변 D에 위치한 사람이 강을 바라보다가 강 반대편까지 거리가 얼마나 되는지 궁금해서 재보기로 했어요. 만약 긴 줄자가 있다면 줄자를 어떻게 놓아야 할까요?

2. 병 : 반듯하게요.
3. 을 : 반듯하게 놓아야 길이가 가장 짧은 거리가 되요.
4. 교사 : 그럼, 어떻게 놓아야 반듯한 것일까요?
5. 갑 : 한쪽으로 삐뚤어지지 않게 똑바로 놓아야 해요.
6. 교사 : 맞아요. 좌우 어느 쪽으로도 기울어지지 않게 ...(중략)... 줄자와 강변과는 몇 도가 되게 만나야 반듯한 거예요?
7. 정 : 90도요. 수직이요.

발췌문1은 강변 사이의 거리를 측정하는 상황을 도입하여 한 점에서 한 직선 사이의 거리를 측정하기 위해 필요한 조건을 학생들 스스로 인식하여 구성해 나가며(2, 3), 어느 쪽으로도 기울어지지 않게 놓아야 한다는 거리가 되기 위한 조건을 파악하고 있으며(5), 어떤 직선에 어느 쪽으로도 기울지 않게 내린 직선이 그 직선에 수직이 된다는 수선의 의미를 정확하게 파악하고 발견 하였다(7). 이처럼 수선의 작도가 필요한 상황에서 자연스럽게 학생들은 수선의 조건과 성질을 발견하고 강변의 한 점에 위치한 사람이 건너편 강변까지의 거리가 얼마인지 알고자 할 때 수선의 작도를 해야 함을 인식하였다.

발췌문2 : 정육각형에서 정십이각형을 작도하기 위해 각의 이등분선이 필요함을 인식

1. 교사 : 그럼 이번에는 정십이각형을 작도해볼까?
2. 학생들 : 아!! 어렵다.
3. 교사 : 또 하려니까 힘들어? 그럼 이 정육각형을 이용해서 정십이각형을 작도할 수 있을까요?
4. 무 : 그렇게 할 수도 있어요?
5. 갑 : 그럼. 모두 반반 나누어요.
6. 교사 : 그래. 근데 뭘 반반 나누어야 할까요?
7. 을 : 저 삼각형을 모두 반반 나누어서 두 배의 변을 만들면 되요.
8. 교사 : 좋은 생각이예요. 잘 접근하고 있어요. 근데 정확히 삼각형의 무엇을 반반 나누어야 할까요?
9. 병 : 중심에 있는 삼각형의 각을 반으로 나누어서 원과 만나는 점들을 연결해주면 되요.

앞에서 정육각형의 작도 방법을 탐구하기 위해 많은 사고와 분석을 했던 학생들은 정십이각형의 작도를 하기 위해 그와 같은 탐구 과정을 거쳐야 한다는 생각으로 어려움을 느꼈다(2). 그러나 정육각형 작도를 이용하여 정십이각형 작도 방법을 탐구해 보도록 했을 때, 또 다른 호기심을 느끼며 주의를 집중하였다. 쉽게 이등분의 생각과 필

요를 떠올렸으며(5), 정확히 각각의 삼각형의 중심각을 반으로 나누어야 함을 발견했고(9), 작도 방법을 스스로 분석하여 접근하였다(9). 각의 이등분선의 작도가 필요한 상황을 자연스럽게 인식하였고 학생들은 호기심을 갖고 스스로 인식의 주체가 되어 구성적 사고 활동과 발견 활동을 하고 있다.

(2) 추측하고 발견하는 사고활동

다음은 학생들이 작도 방법을 추측하고 발견해 낸 사례이다.

발췌문3 : 눈금 없는 자와 컴퍼스의 쓰임새를 추측하며 주어진 선분과 합동인 선분의 작도 방법을 발견

1. 교사 : 선분 AB와 크기가 같은 선분을 그리기 위해서 눈금 없는 자와 컴퍼스를 어떻게 활용할 것인지 생각해볼까?
2. 병 : 자로 재서 쪽 그으면 되요.
3. 갑 : 눈금이 없다고 했잖아. 근데 어떻게 자로 재냐?
4. 정 : 선생님 저 할 수 있어요.
5. 교사 : 그래. 정이가 칠판에 한번 해봐.
6. 을 : 컴퍼스를 벌려서 선분 AB를 재고 컴퍼스 한쪽 끝을 점P에 찍은 다음 나머지 한쪽 끝을 표시하고 자로 연결해 주면 되요.
7. 교사 : 잘 했어요. 컴퍼스와 눈금 없는 자의 쓰임새를 정확히 맞추었네.
8. 무 : 선생님 직선을 먼저 그으면 안돼요?
9. 교사 : 그래도 되지. 작도하는 방법은 한 가지만 있는 것이 아니야.
10. 기 : 나도 직선 먼저 그렸는데, 그 다음에 컴퍼스를 벌려서 길이를 재고 직선 위에 길이를 표시했어요.

발췌문3은 작도에서 눈금 없는 자와 컴퍼스의 쓰임새를 학생들 스스로 추측하고 발견해낼 수 있도록 유도하고 있다. 학생들이 직접 선분 AB와 크기가 같은 선분을 작도하는 활동을 통하여 학생과 학생, 학생과 교사 사이에 자연스러운 의사소통의 과정에서 작도 방법을 학생들 스스로 발견해내며(2) 다양한 작도 방법을 서로 이야기하며 공유하고 있다(8, 10). 장혜원([8])은 작도라는 수학적 활동의 목적은 작도 방법 즉 절차에 대한 기능적 숙달보다는 그 활동을 통한 논리적 사고력의 발달에 두어야 한다고 하였다. 이와 같이 학생들의 사고 활동을 강조한 Clairaut의 <기하학 원론>의 작도문제 해결 과정은 작도 활동을 통하여 논리적 사고력을 향상시키는데 도움이 될 수 있다.

류제균([3])의 연구 결과에 의하면, 작도 방법이 여러 가지 있을 수 있음에도 불구하고 모든 학생들이 한 가지 방식으로만 작도를 하였으며 거의 모든 절차를 기계적으

로 의뢰서 함을 우려하였다. 이는 학생들의 사고력 증진을 제한할 수 있다. 다양한 탐구기회가 제공된 기하의 작도 경험은 학생들의 시각화와 도형의 성질의 이해를 풍부하게 하고 분석과 연역적인 증명을 위한 기초를 제공한다.

(3) 작도 활동 후 확인 및 반성적 사고 활동

수학적 사고를 한다는 것은 자신이나 다른 사람의 정신적인 수학적 활동을 의식적으로 반성하는 것이다. 그러한 수학적 사고 태도를 기르고 학습 내용의 통찰을 가능하게 하기 위해서는 학생들로 하여금 수학의 학습과정을 반성하도록 해야 하며, 작도가 문제의 모든 요구 조건들을 충족시키는가를 확인해야 한다. 또한 학생들에게 다양한 조건의 변화에 의한 상황이나 새로운 방법 등에 대해 생각할 기회를 많이 주고 생각한 것을 말하며 서로 토론하는 기회를 제공하여 수학적인 개념, 원리, 법칙과 그 관련성의 이해를 증진시키고 수학에 대한 자신감과 사고력을 향상시킬 수 있도록 해야 한다. 따라서 자신의 생각을 설명하고 확인하며 논리적으로 추론하고 비판적으로 사고하는 태도를 중시하여야 한다.

발췌문4는 작도과정 후 학생들의 확인 및 반성적 사고 활동이 이루어지는 사례이다.

발췌문4 : 수선 작도 후 확인

1. 정 : 무는 반만 한 거 같은데
2. 무 : 아니야. 내가 한 것도 맞아.
3. 갑 : 틀렸어. 네가 작도한 것이 수직인지 확인해봐?
4. 병 : 선분 AB랑 수선이 만나는 점을 어떻게 찾은 거야?
5. 무 : 그냥 반듯하게 내렸지.
6. 을 : 네가 반듯하게 내렸다고 어떻게 말할 수 있어? 오차가 생길 수도 있잖아.
7. 갑 : 우리가 한 것처럼 점 A, B에서 거리가 같은 점 두 개를 찾아서 연결해 줘야지.

발췌문4는 선분 AB의 수직이등분선의 작도 활동 후, 학생들끼리 의사소통을 통하여 작도 과정을 확인하는 단계이다. 학생들은 그동안의 수업에서 작도 활동 후, 문제에서 요구하는 조건을 충족시키는가를 확인하는 과정을 거쳐 왔으므로 자연스럽게 확인 단계의 필요성을 의식하고 있으며 스스로 확인하는 모습을 보였다. 학생 무가 작도 과정에서 무엇이, 왜 틀렸는지를 정확히 지적하며(1, 3, 4), 수학에서 논리적인 타당성이 있어야 함을 일깨워주고 있다(6). 또한 수직이등분선의 성질을 정확히 알고 작도 방법을 설명하고 있다(7). 선분의 수직이등분선을 작도하기 위한 기본 원리는 수직

이등분선 위의 임의의 점은 선분의 양 끝점에서 같은 거리에 있다는 성질이므로 작도 과정에서 학생들이 성질을 재인식하고 학습할 수 있는 기회가 될 수 있다.

발췌문5 : 작도과정에 대한 반성

1. 기 : 선생님! 이번에는 선분OA, OB의 길이가 달라요.
2. 교사 : 그렇지? 이렇게 두 선분의 길이가 다를 때는 어떻게 각의 이등분을 할 수 있을까요? 선분 OA, OB의 길이가 같았을 때, 어떻게 작도 했었는지 다시 한 번 생각해 보세요.
3. 무 : 똑같이 만들어주면 되지요.
4. 정 : 어떻게?
5. 학생들 : (다양한 시도를 해보며)
6. 교사 : 병이 방법을 잘 찾고 있어요.
7. 갑 : 선생님! 제가 한 방법은 틀리나요? 웬지 이상해 보여요.
8. 을 : 년 그것이 각의 이등분선처럼 보이냐?
9. 교사 : 병이 완성을 한 거 같아. 어떻게 했는지 친구들에게 설명해볼까?
10. 병 : 선분 OB 만큼 컴퍼스를 벌린 다음에 원을 그려서 선분 OA랑 만나는 점을 D라고 하고요. 점 B, D에서 거리가 같은 점을 찾아서 점O와 연결했어요.
11. 교사: 잘 했구나. 그러면 여기서 선분 OA, OD, PB, PD의 길이가 모두 같아야만 할까요?
12. 갑 : 점 B와 점 D에서 거리가 같은 두 점을 각각 찾는 것이니까 꼭 같을 필요는 없어요.

발췌문5는 학생들이 각의 이등분선 작도 방법과 각의 이등분선의 성질을 의미 있게 이해하고 있는지 확인하기 위해 선분 OA와 OB의 길이를 다르게 제시한 상황이다. 학생들은 길이가 다르다는 것을 알아내고 작도 방법에 대하여 다시 탐구하며 생각하게 되었다. 교사는 이전에 배운 각의 이등분선의 작도 과정을 학생들이 의식적으로 반성할 수 있도록 유도하고 있다(2). 학생 무는 이전의 학습 과정을 떠올리며 점 O에서 거리가 같은 두 점을 찾아야 함을 발견하였고(3), 학생들은 점 O에서 길이가 같은 두 점을 찾기 위해 직접 활동을 하며 탐구하고 있다. 이때 처음부터 각의 이등분선을 스스로 작도하려고 노력하던 갑은 자신의 작도 결과를 반성하며 올바른 방법이 아니었음을 발견하고(7), 을은 그것을 지적해주고 있다(8). 학생들은 여러 가지 방법을 직접 시도하며, 작도를 완성한 병이 작도 방법을 설명하자 자신의 방법과 비교하며 모두 스스로 각의 이등분선을 작도하였다. 학생들은 선분 OA와 OB의 길이가 같은 경우에 각의 이등분선 작도를 잘 수행하였지만 조건을 변형한 문제에서 어려움을 해결해 나가는 과정으로 이전의 학습 과정을 반성하며 수학적인 개념을 명확히 할 수 있

었다. 이는 정확한 개념 이해가 되지 않았던 상황이었음을 나타낸다. 또한 교사의 적절한 발문으로 학생들은 개념적 오류가 될 수 있는 부분을 반성적 사고 과정을 통하여 정확히 이해하고 개념화하고 있음을 확인할 수 있다(11, 12).

(4) 새로운 문제에의 적용 및 응용

창조된 개념을 새로운 문제에 적용함으로써 학생들은 개념을 강조하게 되고 일반화가 이루어질 수 있다. 따라서 학생들이 수학을 학습할 뿐만 아니라 그것을 적용하는 방법을 학습할 수 있도록 하는 다양한 문제 상황을 제시하여 학생들로 하여금 수학적 인 안목을 갖고, 학교 수학이 생활 및 과학의 도구로서의 실제적 유용성을 느낄 수 있는 기회를 제공하여 수학에 대한 가치와 흥미를 느낄 수 있도록 해야 한다.

학생들은 정팔각형의 작도 방법을 탐구하기 위해 정십이각형의 작도 방법을 응용하였다. 정팔각형의 작도를 위해 정사각형의 작도를 떠올리며 각의 이등분선의 작도를 적용하기 위한 방법을 탐구하고, 정사각형의 작도 방법이 필요함을 스스로 인식하였다. 이처럼 수학적 개념을 응용하고 적용할 수 있는 흥미 있고 다양한 문제를 제시함으로써 수학적 사고력을 확장시킬 수 있고 호기심을 자극할 수 있다. 또한 기하학적인 도형을 수학적인 원리로 직접 작도하는 활동을 통하여 도형의 성질을 발견하고 과학적이고 체계적인 방법의 중요성을 인식하는 모습을 볼 수 있었다.

5. 결론

본 연구에서는 역사발생적 원리에 입각하여 쓴 Clairaut의 <기하학 원론>에 근거하여 학교수학 <7-나 단계> 작도 단원의 5차시 분량의 학습 자료를 개발하였다. 작도 문제 해결 과정에서 작도 방법을 위한 분석이 선행되어 자연스러운 사고 활동으로 작도 방법을 발견하고, 작도의 타당성을 밝히는 확인, 결과를 일반화하는 반성의 단계를 강조하여 학습활동을 구체화 하였다.

개발된 교수 학습 자료를 기반으로 6명의 학생들과 5차시 수업을 진행하였고, 자료의 개발 방향 목적에 부합되는 분석틀을 기획하여 실제 수업에서 나타난 특징을 관찰 분석하였다.

개발한 학습 자료를 활용한 수업에서 나타난 특징은 다음과 같다.

첫째, 학생들은 실생활 맥락에서 수학적 개념의 필요성을 인식하고 문제 상황의 해결을 위한 유용한 도구로서 작도 방법을 탐구하며 재발명하고 있다.

둘째, 학생들은 작도문제 해결을 분석에서 시작하여 작도 방법을 추측하고 발견하며 다양한 작도 방법에 대한 탐구를 하였다.

셋째, 학생들은 얻어진 작도가 문제의 요구 조건을 충족시키는가를 확인하며 작도 과정을 논리적으로 설명하였다.

넷째, 학생들은 작도 활동을 반성적으로 사고하며 도형의 성질을 발견하고 다양한 조건의 변화에 의한 상황을 탐구하였다.

다섯째, 학생들은 창조된 개념을 새로운 문제에 적용함으로써 수학 내의 응용성을 경험하고 수학적 개념들 사이의 관계를 이끌어낼 수 있었다.

Clairaut의 <기하학 원론>을 근거하여 구성된 학습 자료는 학생들이 작도와 그와 관련된 문제해결을 의미 있게 하였다. 실생활 맥락에의 유용한 도구에서 시작한 수학적 개념의 자연스러운 발생은 충분한 흥미와 동기를 유발하였다. 정형화 된 기존의 지식을 일관된 방식으로 수동적으로 받아들이기만 하는 것이 아니라 학생 스스로 탐구하여 주체적으로 구성하고 반성하는 과정을 확인할 수 있었다.

이 밖에도 Clairaut의 <기하학 원론>에는, 평면도형과 공간도형의 측정과 성질 등을 맥락 속에서 사고하고 탐구함으로써 수학적 개념의 자연스러운 발생 과정을 보여 주고 있다. 이에 대한 중등학교 기하의 효과적인 교수 학습을 위한 자료의 개발을 기대한다.

감사의 글 논문 수정에 따뜻한 조언을 해주신 심사위원들께 진심으로 감사드립니다.

참고 문헌

1. 고성은, 박복현, 김준희, 최수일, 강운중, 소순영, 중학교 수학 7-나. (주)블랙박스, 2001.
2. 교육부, 중학교 교육과정 해설(III)-수학, 과학, 기술·가정-, 대한교과서 주식회사, 1999.
3. 류제균, 8-나 단계의 작도능력 실태조사 분석 및 활용방안, 한국교원 대학교 석사학위 논문(2000).
4. 민세영, 역사발생적 원리에 따른 중등학교 수학교재 구성에 관한 연구, 서울대학교 석사학위 논문(1997).
5. 민세영, 역사발생적 수학 학습-지도 원리에 관한 연구, 서울대학교 박사학위 논문, 2002.
6. 우정호, 수학 학습 지도의 원리와 방법, 서울대학교 출판부, 2000.
7. 장병철, 韓國·中國·러시아 數學 教科書의 증명에 관한 비교연구, 한국교원대학교 석사학위 논문(1998).
8. 장혜원, 중학교 도형 영역 중 작도 단원에 관한 고찰, 대한수학교육학회 논문집 7(2)(1997), 327-336.
9. 장혜원, Clairaut의 기하학 원론에 나타난 역사발생적 원리에 대한 고찰, 대한수학교육학회지 <수학교육학연구> 13(3)(2003), 351-364.

10. 조완영, 정보나, 7차 수학과 교육과정 작도 영역의 교과서와 수업 사례 분석, 대한수학교육학회지 <학교수학> 4(4)(2002), 601-615.
11. 한인기, 작도 문제의 해결 방법. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> (1999), 153-164.
12. Clairaut, A. C., 클레로의 기하학 원론[Eléments de géométrie],(장혜원 역), 경문사 (원전은 1920에 출판), 2005.
13. Euclid, 기하학원론, (이무현 역), 교우사, 1997.
14. Freudenthal, H., *Geometry between the Devil and the Deep Sea*, *Educational Studies in Mathematics* 3(1971), 435.
15. Perry, I., *The 2 Teaching of Mathematics*. *Educational Review* 23, Feb.,(1902), 158-181.
16. Schoenfeld, A, *Explorations of student' Mathematical Beliefs and Behavior*, *Journal for Research in Mathematics Education* 20(4)(1989), 338-355.

Development and Application of Learning Materials of the Construction Unit in 7-B Grade Based on Clairaut's Eléments de Géométrie

Graduate School of Education, Ewha Womans University **Myeong hee Park**
Dept. of Math. Education, Ewha Womans University **Kyung hee Shin**

For a meaningful learning of the Construction Unit in 7-B Grade, this study aims to develop learning materials on the basis of Clairaut's Eléments de Géométrie, which is grounded on a natural generation derived from the history of mathematics and emphasizes students' inquiry activity and reflective thinking activity, and to analyze the characteristics of learning process shown in classes which use the application of learning materials.

Six students were sampled by gender and performance and an interpretive case study was conducted. Construction was specified so as to be consciously executed with emphasis on an analysis to enable one to discover construction techniques for oneself from a standpoint of problem solving, a justification to reveal the validity of construction, and a step of reflection to generalize the results of construction.

Key word: Genetic Theory of History, Clairaut's Eléments de Géométrie, Construction

2000 Mathematics Subject Classification: 01A72, 97D40

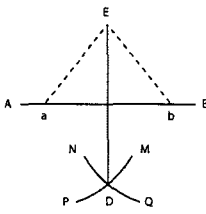
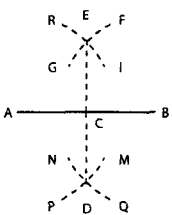
ZDM Subject Classification: C70, G10

논문 접수: 2006년 7월

심사 완료: 2006년 9월

부 록. 기본도형 작도의 교수 - 학습지도안

단원명	1.도형의 작도	차시	2/5
학습목표	<ul style="list-style-type: none"> • 수선의 뜻을 알고 수선을 작도할 수 있다. • 선분의 수직이등분선을 작도할 수 있다. 	준비물	자, 컴퍼스
단계 (시간)	학습 과정	교수-학습 활동	비고
도 입 (5분)	<ul style="list-style-type: none"> • 학습목표제시 • 선수학습확인 • 동기유발 	<ul style="list-style-type: none"> • 학습 목표를 인지한다. • 작도의 뜻과 선분, 각의 이등분선을 작도할 수 있는지를 확인한다. • 수선과 관련된 실생활 문제를 제시한다. 	학생들이 호기심을 느끼고 탐구심을 갖도록 유도한다.
본시 학습 (35분)	<ul style="list-style-type: none"> • 탐구 활동 • 토의 활동 	<p>강변의 D에 위치한 사람이 있는 지점에서 건너편 강변 AB까지의 거리가 얼마나 되는지 알고자 한다.</p> <p>- 주어진 상황에서 거리를 어떻게 측정해야 하는지를 생각하고 토의한다.</p> <div style="text-align: center;"> <p>A쪽으로도 B쪽으로도 기울지 않는 선분 CD를 측정해야함을 토의로 이끌어 낸다.</p> </div> <p>- 교사는 거리를 측정하는 방법을 정리하고 수선의 뜻을 알려주며 수선을 긋는 방법이 필요함을 강조한다.</p> <p>- 선분 AB 위의 점 C에서 선분 AB에 수직인 직선을 올리려고 한다면 어떻게 작도할 수 있는지 생각하고 서로 이야기 할 수 있게 한다.</p> <div style="text-align: center;"> </div> <p>- 교사는 학생의 토의 내용을 정리하여 점 A로부터의 거리가 점 B로부터의 거리와 같은 임의의 한 점 D를 찾아야 함을 이끌어낸다.</p> <ul style="list-style-type: none"> - 토의과정을 토대로 각자 직접 작도하도록 한다. - 작도 과정을 서로 비교하며 토의하여 작도를 완성할 수 있도록 한다. <p>- 자신이 작도한 것이 '수선'이 맞는지 각자 발표하게 한다.</p> <p>- 교사는 작도 과정 후 확인하는 단계의 중요성을 강조하며 '수선'이 됨을 확인시켜준다.</p> <ul style="list-style-type: none"> • 개별 활동 • 토의 활동 <p>• 탐구 활동</p> <p>- 점 C가 A와 B로부터 같은 거리에 있지 않다면 어떻게 해야 하는지 서로 이야기 할 수 있게 하고 작도 과정에서 좀 더 생각해 보아야 하는 것이 있는지 발표하게 하여 탐구하게 한다.</p> <ul style="list-style-type: none"> • 토의 활동 <p>- 점 E에서 직선 AB에 수선을 내리는 방법을 서로 이야기 할 수 있게 한다.</p>	<p>실생활에서 '필요'를 인식함.</p> <p>분석</p> <p>자연스럽고 활기찬 토의가 이루어질 수 있도록 교사의 적절한 유도과 참여가 필요하다.</p> <p>작도</p> <p>확인 (증명)</p> <p>탐구 (반성)</p>

	<ul style="list-style-type: none"> • 개별 활동 • 토의 활동 <ul style="list-style-type: none"> • 토의 및 탐구 학습 <ul style="list-style-type: none"> • 개별 활동 • 토의 활동 	<ul style="list-style-type: none"> - 교사는 학생의 토의 내용을 정리하여 점 E에서 A쪽으로도 B쪽으로도 기울지 않는 직선을 긋기 위해서 점 E에서 거리가 같은 두 점 a, b를 직선 AB 위에 잡고 두 점 a, b에서 거리가 같은 점 E 이외의 점을 찾아야 함을 이끌어낸다. <div style="text-align: center;">  </div> <ul style="list-style-type: none"> - 토의내용을 토대로 각자 직접 작도하도록 한다. - 작도 과정을 서로 비교하며 토의하여 작도를 완성할 수 있도록 한다. - 자신이 작도한 것이 '수선'이 맞는지 각자 발표하게 한다. - 점 E를 중심으로 그린 원이 직선 AB와 만나지 않는다면 어떻게 해야 하는지, 두 점 a, b에서 거리가 같은 점들 D, E 이외에 더 찾을 수 있는지 생각하고 이야기할 수 있도록 한다. - 선분 AB를 이등분하는 점을 어떻게 찾을까 질문한다. - 학생들은 각자의 생각을 이야기하며 토의하고 선분 AB를 이등분하는 점은 두 점 A, B로부터 같은 거리에 있는 점들 중 선분 AB 위의 점임을 이끌어내며 '선분의 이등분 선'의 작도 과정을 탐구하게 한다. <div style="text-align: center;">  </div> <ul style="list-style-type: none"> - 토의의 과정을 토대로 각자 직접 작도를 하게 한다. - 작도 과정을 서로 비교하며 토의하여 작도를 완성할 수 있도록 한다. - 자신이 작도한 것이 '선분을 이등분하는 선'이 맞는지 각자 발표하게 한다. - 선분 AB를 이등분하고 A쪽으로도 B쪽으로도 기울지 않는 직선이므로 '수직이등분선'이 됨을 강조한다. - 이등변 삼각형을 작도하는 다양한 방법을 탐구할 수 있도록 하는 문제를 제시하여 서로 토의하며 문제를 해결할 수 있도록 한다. - 주어진 선분을 한 변으로 하는 정사각형을 직접 작도하는 문제를 제시한다. 	<p>분석</p> <p>작도</p> <p>확인 (증명)</p> <p>탐구 (반성)</p> <p>분석</p> <p>작도</p> <p>확인 (증명)</p> <p>탐구 (반성)</p>	<p>자연스럽고 활기찬 토의가 이루어질 수 있도록 교사의 적절한 유도와 참여가 필요하다.</p> <p>'확인'의 필요성과 중요성을 자연스럽게 느낄 수 있도록 유도한다. '반성'의 과정을 의식화하고 실천할 수 있도록 한다.</p>
정리 (5분)	<ul style="list-style-type: none"> • 학습 내용 정리 	<ul style="list-style-type: none"> • 제시된 문제의 해결과정을 확인시켜준다. • 오늘 배운 내용을 정리한다. 		질문을 받는다.