Morse 이론의 역사

강남대학교 응용수학전공 **박기성**
parkks@kns.kangnam.ac.kr

1930년대 시작한 모-스이론의 발전과정을 조사하고 스메일(Smale), 후리드만(Freedmann) 등이 손잡이체(handle body) 이론으로 포앙카레(Poincare) 예상을 해결한 내용 및 측지선(geodesic) 이론에서 나타난 여러 가지 응용에 대하여 조사하였다 .

주제어 : 모-스 부등식, 손잡이 体, 모-스 지수, 포앙카레 예상

1. Morse 이론의 역사적 배경

1950년대에 미분위상수학이 수학의 하나의 분야로 성립하기 전에 나타난 중요한 연구가 몇 가지 있었다. 예를 들면 벡터속(vector bundle)의 특성류(Characteristic classes)의 연구 및 그와 관련된 가우스-본네(Gauss-Bonnet)정리의 고차원화의 연구, 다양체의 유크리트 공간으로의 매장(imbedding)의 연구, 와이트니(whiteney)에 의한 교차해소의 정리 등이 있으며([17], [18]), 다양체위의 함수의 극대, 극소이론을 정비하여 1925년 마스톤 모스(Maston Morse)는 함수의 임계점의 분포와 관련된 첫논문([5])을 발표하고 계속하여 이와 관련된 50여편의 논문을 발표하였다.

이와 같은 수학적 배경아래 1930년대에 모-스이론이 성립하였다. 모-스이론은 무한차원과 유한차원이 교차하는 곳에서 많은 발전을 하였다. 무한차원 모-스이론 중에서 유한차원이론에서는 성립하지 않은 현상이 많이 나타나서 이것을 많이 연구하였다.

미분위상수학 성립 후에도 모-스이론은 다양체의 기하학의 고향으로 미분위상수학, 미분기하학이 발전할 때 마다 응용되어 모-스이론의 역사를 말하는 것은 미분위상수학의 역사를 말하는 것과 같다.

모-스 이론은 그 후 스메일(Smale)과 팔레(Palais)등이 변분문제에 적용하여 무한차원 다양체위의 함수의 임계치의 이론을 연구하여 현재와 같은 이론으로 발전하였다. 즉 주어진 함수가 최소값을 갖기 위한 팔레-스메일의 조건(C)을 만들었다. 그러나 많은 변분문제는 조건(C)을 만족하지 않는다. 이것을 극복하는 것이 현재 주어진 과제 중의 하나이다.

위상수학의 발전, 특히 호모토피론적 관점의 확립에 따라 다양체의 미분위상수학적

연구에 관심이 집중되었고 보트(Bott)는 모-스이론의 응용으로 다양체의 호모토피군을 연구하여 주기성 정리를 발견하였다.

스메일은 일반 포앙카레 예상의 해결(1961), h-동경정리(1962)의 연구등 다양체의 구조이론완성에 결정적 역할을 하였다. 또한 모-스이론이 힐벗(Hilbert) 다양체에 확장됨을 증명하였다. 본 연구에서는 1930년대에 시작된 모-스이론이 현재까지 발전되어온 과정과 앞으로의 전망과 응용에 관해서 논하고자 한다.

2. 본론

일반적으로 「공간」은 기하학의 대상이고 「함수」는 해석학의 대상이다.

그런데 어떤 공간위에서 정의된 함수와 그 공간의 형상사이에는 밀접한 관계가 있다. 예를 들면 직선과 원주(원둘레)는 모두 1차원 공간이다. 지금 직선을 x축으로 생각하면 그 위에는 $y=x^2$, $y=x^3$ 등 얼마든지 큰 값을 갖는 연속함수가 존재한다. 그러나 원주에는 그와 같은 함수가 존재하지 않는다. 원주위에서 정의된 연속함수는 원둘레위의 어디선가 최소, 최대값을 갖기 때문이다. 이와 같이 그 위에는 얼마든지 큰 값을 갖는 연속함수가 있는가, 없는가에 따라 직선과 원주를 구별할 수 있다.

모스이론은 공간에서 정의된 함수와 그 공간의 형태(形態)와의 관계에 관한 이론이다. 특히 함수의 임계점에 주목하여 임계점에 관한 정보에서 공간의 형태에 관한 정보를 아는 데에 특징이 있다.

모-스이론의 시작은 사상으로 이루어지는 공간 즉 무한차원 공간이었다. M을 유한차원다양체, $\Omega(M)$을 S^1에서 M 으로 보내는 사상전체. 즉 루프(loop)공간이라 하자. $\Omega(M)$의 원소 l 에 대하여 그의 길이 $L(l)$을 생각하면 이것은 l 의 함수이다. $\Omega(M)$의 함수로 보았을 때 $L(l)$의 미분이 0이 되는 $\Omega(M)$의 원소가 측지선이다. 모-스이론의 시작은 $\Omega(M)$의 위상과 측지선의 관계를 조사하는 것이었다. 모-스 이론은 무한차원과 유한차원이 교차하는 곳에서 크게 발전하였다. 무한차원이론은 변분문제와 깊은 관계가 있으며 금후의 수학발전에 중요하다.

가. 유한차원 모-스 이론

M을 m차원 폐다양체, $f:M\to\vec{r}$ 을 미분가능한 함수라고 하자. M의 점 p_0 가 $f:M\to\vec{r}$의 임계점이란 p_0주위의 국소좌표계 $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 에 관해서

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p_0)=0,\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(p_0)=0,\ \cdots,\ \frac{\partial f}{\partial x_m}(p_0)=0$$

가 성립할 때를 말한다.

p_0 가 $f : M \to \vec{r}$의 임계점일 때 $m \times m$ 행렬 $H_f(p_0) = (\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})$을 임계점 p_0 에 있어서 함수 f 의 헷세(Hesse)행렬이라고 한다. 헷세 행렬은 대칭행렬이다.

헷세행렬 $H_f(p_0)$의 행렬식 $\det H_f(p_0) \neq 0$일 때 p_0을 비퇴화임계점, $\det H_f(p_0) = 0$ 일 때 p_0을 퇴화임계점이라 부른다.

함수 $f : M \to \vec{r}$가 모-스 함수란 f의 임계점이 모두 비퇴화임계점일 때 이다.

p_0가 $f : M \to \vec{r}$의 비퇴화임계점일 때 p_0 주위의 국소좌표계 $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$을 잡아 함수 f가

$$f = -x_1^2 - \cdots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \cdots + x_m^2 + c, \quad c\text{는 상수 } (= f(p_0))$$

p_0는 $(x_1, \cdots, x_m)$의 원점 $(0, \cdots, 0)$이 된다. 이 때 음의 부호의 개수 λ를 p_0의 지수라고 부른다([16]).

모-스함수의 중요한 성질은 다음과 같다([4]).

(i) 콤펙트 다양체 위의 모-스함수 $f : M \to \vec{r}$에는 유한개의 임계점 밖에 없다.

(ii) M이 m차원 폐다양체, $g : M \to \vec{r}$가 M 위의 C^∞-급 함수일 때 $g : M \to \vec{r}$에 가까운 모-스 함수 $M \to \vec{r}$이 존재한다.

M을 폐다양체, $f : M \to \vec{r}$을 1위의 모-스함수라고 하자. 함수값 t에 대하여

$$M_t = \{p \in M \mid f(p) \leq t\}$$

라고 놓으면 실수구간 $[a, b]$에 f의 임계치가 없으면 M_a와 M_b는 미분동형이다. 여기서 중요한 것은 조변수 t가 임계치를 지나는 전후의 M_t의 변화이다. f의 서로 다른 임계점은 다른 값을 갖고 유한개 밖에 없으므로 $n+1$개라하고 작은 순서부터 나열하여 $c_i = f(p_i)$라고 놓으면 $c_0 < c_1 < \cdots < c_n$이며 c_0가 f의 최소값 c_n이 f의 최대값이 된다.

$f(p) < c_0$인 M의 점은 존재하지 않으므로 $t < c_0$이면 $M_t = \phi$ 이며 M의 모든 점 p에 대하여 $F(p) < c_n$이므로 $c_n \leq t$이면 $M_t = M$이다. 최소치, 최대치 전후의 M_t의 변화를 보자. 우선 최소치인 점은 p_0밖에 없으므로 f를 표준형으로 표시하면

$$f = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2 + c_0$$

이고 c_0은 최소치이므로 p_0의 지수는 0이다.

$\varepsilon > 0$ 에 대하여 $M_{c_0 - \varepsilon} = \emptyset$이고 $M_{c_0 + \varepsilon}$에 위식을 사용하면

$$M_{c_c + \varepsilon} = \{(x_1, x_2, \cdots, x_m) \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2 \leq \varepsilon\}$$

이므로 $M_{c_0+\varepsilon}$은 m차원 원판 D^m과 미분동형이다. t가 지수 0의 임계치 c_2를 통과할때는 $M_{c_2+\varepsilon} \simeq M_{c_2-\varepsilon} \cup D^m$(미분동형)이다. 이와 같이 지수 0의 임계점에 대응하여 나타나는 m차원원판을 m차원 0-손잡이(handle)이라 한다. 다음에 최대치 c_n일 때 p_n주위에서 f를 표준형으로 쓰면

$$f = -x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_m^2 + c_n$$

이다. c_n이 최대치이므로 f의 값은 그 이상 커지지 않으며 P_n의 지수는 m이다.

$c_n \leq t$이면 $M_t = M$이고 t가 c_n에 조금 도달하기 전의 $M_{c_n-\varepsilon}$은

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2 \geq \varepsilon$$

이것은 반경 $\sqrt{\varepsilon}$의 m차원원판 D^m의 바깥쪽 부분이다. $M_{c_n-\varepsilon}$의 경계 $\partial M_{c_n-\varepsilon}$은 이 반경 $\sqrt{\varepsilon}$의 m차원 경계 S^{m-1}이 된다. t의 값이 $c_n - \varepsilon$에서 증가하여 c_n을 통과하는 순간에 $M_{c_n-\varepsilon}$의 경계는 m차원 원판으로 뚜껑이 덮혀 콤팩트 m차원 다양체가 완성된다. f의 값은 원판의 중심에서 최대값을 갖고 원판의 경계에 오면서 감소하므로 여기서의 원판은 아래를 향한 원판이다. 이것은 m차원 m-손잡이라 한다.

다음에 일반지수 $\lambda(0<\lambda<m)$를 갖는 임계점 p_i에 관해서 대응하는 임계치 c_i의 전후의 M_t의 변화는 $M_{c_i+\varepsilon}$은 $M_{c_i-\varepsilon}$에 λ-손잡이를 붙여서 얻어지는 다양체가 미분동형이다. 즉

$$M_{c_i+\varepsilon} \cong M_{c_i-\varepsilon} \cup D^{\lambda} \times D^{m-\lambda}$$

정의 손잡이체, D^m에 여러 가지 지수의 손잡이를 차례로 붙여서 얻어지는 다양체

$$D^m \cup D^{\lambda_1} \times D^{m-\lambda_1} \cup \cdots \cup D^{\lambda_n} \cup D^{m-\lambda m}$$

을 m차원 손잡이体(handle body)라 한다.

모-스 부등식은 모-스 함수의 성질과 다양체의 대역적 성질을 연결하는 최초의 결과이다.

폐다양체 M 위에 모-스 함수 f가 존재하여 f의 지수 k의 임계점의 수가 k_λ와 M의 λ차원 Betti 수 $b_\lambda(M)$사이에는 $k_\lambda > b_\lambda(M)$이 성립한다. Betti 수 $b_\lambda(M)$은 M의 모양에 따라 결정되는 수이므로 이 부등식에서 M위의 모-스 함수의 임계점 개수 k_λ는 M의 모양에 따라 제약을 받을 수 있음을 알 수 있다. 특히 $b_\lambda(M)>0$이면 M위에는 자수 λ의 임계점이 적어도 1개 존재해야 한다. 다양체의 모양과 다양체 위의 함수의 관계를 연구하는 것이 모-스 이론이므로 모스 부등식은 모-스 이론의 전형적인

결과이다. 모-스 부등식의 등호는 반드시 성립하지 않는다.

이 결과를 이용하여 스메일은 고차원 포앙카레 예상을 긍정적으로 해결하였다([3]).

포앙카레 예상을 간단히 설명하자. 폐 m차원 다양체 M이 m차원 구면 S^m과 호모토피(homotopy) 동치일 때, M을 호모토피 구면이라 한다. 「호모토피3구면이 S^3과 위상동형이다」라는 것이 포앙카레 예상이다. 이 예상은 포앙카레에 의해서 1904년 제기되어 근래에 와서 해결되었다고 한다. 한편 메일은 1961년 논문에서 고차원 일반 포앙카레 예상을 해결하였다([3]).

즉 「$m \geq 5$이면 호모토피 m구면은 S^m과 미분동상이다」

를 증명하여, 이 업적으로 1966년도의 Field 상을 수상하였다 스메일의 증명요지는 다음과 같다. 스메일은 손잡이의 개념을 도입하였는데, 그는 모-스 함수로 M을 손잡이 분해하고 M이 5차원 이상 호모토피 m구면이라는 가정아래 0-손잡이과 m-손잡이 1개씩만 남기고 나머지 손잡이는 소거됨을 보인 것이다.

그러면 M은 S^m과 미분동상이다. 이것이 스메일의 증명이다.

한편 handle sliding의 기법을 이용하여 손잡이체의 미분동상류를 바꾸지 않고 손잡이의 접착사상을 바꿀 수 있으나 여기서는 생략하기로 한다.

4차원 일반 포앙카레 예상은 후리드만이 해결하였다([9]). 후리드만은 이 업적으로 1986년 Field상을 수상하였다.

모-스 이론의 진보의 중요한 일보는 위에서 간단히 언급한 스메일에 의한 고차원 포앙카레 예상과 관계되는 것이다. 이것에 대하여 논하자.

앞에서 말한바와 같이 모-스 부등식에서 등호가 성립한다고는 할 수 없다.

그래서 다양체 위에 모-스 함수가 주어졌을 때 이것을 변형하여 모-스 부등식에서 등호가 성립할 수 있을까.

가장 간단한 경우가 다양체가 구면과 동일한 호모로지를 갖는 경우이다. 이 경우

「m차원 폐다양체 M이 구면과 동일한 호모로지를 가질 때 M 위에는 단 2개의 임계점을 갖는 모-스 함수가 있는가」 라는 문제가 된다. 폐다양체 위에 단 2개의 임계점을 갖는 모-스 함수가 존재하면 그 2개의 임계점은 최대치와 최소치가 되어야 한다. 따라서 그의 지수는 m(차원)과 0이어야 한다. 그러면 다양체는 단 1개의 0포체(cell)과 단 1개의 m포체로 이루는 CW분해를 갖는다. 이것은 다양한 다양체가 구면(과 동상)임을 의미한다. 이것은 호모로지 구면은 구면인가라는 문제와 동치가 된다. 이 문제에는 포앙카레가 3차원인 경우 이미 反例를 들었다. 따라서 포앙카레 대신 제출한 것이 유명한 포앙카레 예상이다. (정확히는 포앙카레가 예상한 것은 3차원인 경우뿐이다)

「단 연결 (simple connected) m차원 폐다양체 M이 구면과 동일한 호모로지를 가질 때 M은 구면과 동상인가」

스메일은 이 문제에 차원 m이 5이상인 경우에 긍정적인 해결을 하였다 그때 생각한 방법은 기본적으로 위에서 설명하였다. 즉 M 위의 모-스 함수를 잡아 이것을 변형하여 가능한 한 간단히 하자 그리하여 최후에 임계점을 2개만 만들 수 있다면 문제가 긍정적으로 해결된다.

나) 무한차원 모-스 이론

M을 유한차원 연결 리-만 다양체라 하고 M의 각 접공간 TM_x 에 내적이 정의되어 이 내적에 의한 노름을 $\| \ \|$ 로 나타내자. M의 부드러운 곡선 $c : I=[0, 1] \to M$ 에 대하여 길이 $L(c)$는 $L(c)=\int_I |\dot{c}(t)| dt$로 정의된다. 그러면 M의 두 점 p, q 에 대하여 그것을 잇는 가장 짧은 곡선의 존재성이 문제가 된다. M위의 부드러운 곡선 전체를 $C^\infty(I, M)$으로 표시하고 함수 $L : c^\infty(I, M) \to R$을 p와 q를 잇는 곡선전체 $C^\infty(I, M; p, q)$로 제한하면 L의 최소치에 관한 문제가 된다.

p와 q를 잇는 최단곡선은 리-만 계량으로 정해지는 상미분방정식의 해가 된다. 그러나 그 해 (측지선이라 부른다)는 역으로 최단곡선이 된다고 할 수 없다. 이 점을 분명히 하기 위하여 $C^\infty(I, M)$을 어떤 의미로 완비화하여 힐버트의 다양체 $\Omega(M)$을 만들어 L을 그 위의 부드러운 함수로 확장하는 것이 자연스럽다.

함수 $A : C^\infty(I, M) \to \vec{r}$을 $A(c) = \int_I |\dot{c}(t)|^2 dt$ 로 정의하면 A는 힐버트 다양체 $\Omega(M)$의 부드러운 함수가 된다. $\Omega(M)$에 속하는 M의 고정된 2점을 잇는 곡선 전체를 $\Omega(M: p, q)$라 하고 A를 여기에 제한하면 A의 임계점은 M의 측지선에 지나지 않는다. $A : \Omega(M: p, q) \to \vec{r}$ 에 모-스 이론을 적용하면 $\Omega(M: p, q)$의 위상과 M위의 측지선과의 관계를 알 수 있다. 보트(Bott)의 주기성 정리는 이 이론으로 증명되며 반대로 위상의 정보에서 측지선에 관한 정보를 알 수 있다. 예를 들어 M이 콤팩트이면 각 1차원 자유호모토피류 $(\in \pi_1(M))$는 하나의 측지선을 포함한다.

폐측지선에 관해서는 포앙카레(1905)가 M이 S^2와 동상인 경우 폐측지선의 존재를 증명하였고 크링겐버그(Klingenberg)은 모든 콤팩트 다양체 ($\dim M \geq 0$)이 적어도 3개의 측지선이 존재함을 증명한 후 (1965)그 후 무한히 많은 측지선이 존재함을 증명하였다([15]). 폐측지선 연구에서는 $\Omega(M: p, q)$보다는 $\Omega(M)$중의 폐측지선 $c : S^1 \to M$전체를 고찰하는 편이 편리하다.

$\Omega(M: p, q)$ 위의 함수 A의 임계점 c의 지수를 M중의 측지선 c만으로 계산하는 방법이 모-스의 지수정리이며 스메일에 의한 모-스의 지수정리의 일반화는 타원형 편미분 방정식에 관한 것이다.

모-스이론의 응용의 한 가지 예로 조화형식론, 드람(de Rham)의 이론이 있다.

드-람이론은 콤팩트 다양체 M(경계가 없는)위의 미분형식을 외미분작용소 d로 경계작용소 $(d^2=0)$을 정의하여 얻는 코호모로지군이 그 다양체의 실수체 위의 코호모로지군 $H^*(M)$과 동형이라는 것이 주내용이다.

드람이론에서 조화형식론이 유도되며 조화형식론과 모-스 이론 양방의 응용으로 캘라(Kähler)다양체의 위상의 연구가 있다.

모-스 이론의 발전은 여기서 끝난 것이 아니고 위텐(Witten)에 의한 초대칭성(super symmetry)을 갖는 장(Field)의 이론으로서의 모-스 이론의 해석([13]), 모-스 지수가 무한대의 모-스 이론의 발견([14]) 그리고 모-스 호모로지이론의 연구 등 앞으로의 연구가 기대된다.

특히 유한차원 모-스 이론에서 가장 중요한 것은 스메일에 의해 창시된 손잡이体의 이론이다. 고차원의 미분위상수학이 발전한 1960년대에 손잡이体의 이론을 기초로 하여 h-코보디슴(h-cobordism) 정리와 수술이라는 2개의 큰 이론이 탄생되었다. 이들 2개의 이론과 1960년 끝에 발표된 카비-시벤만(Kirby-Siebenmann)이론에 의해서 고차원의 미분위상수학의 큰 성과를 얻었다.

1970년 이후에는 특히 저차원 다양체가 주목을 끌었다 저차원 다양체에 관해서는 실질적으로 손잡이体이론과 같은 수준의 이론이 헤가드(Heegaard)나 덴(Dehn)등에 의해서 고리(link)의 카비 계산으로 저차원 다양체를 구체적으로 볼 수 있는 성과를 올렸다.

한편 카비 계산으로 저차원 다양체와 매듭(knot)이론의 관계가 견고해졌고 매듭이론의 결과가 카비 계산을 통하여 3차원 다양체의 결과에 확장되고 그 반대의 결과도 얻어 이 양 이론이 하나의 이론으로 되었다. 저차원의 손잡이 이론은 다양체를 구체적으로 눈으로 보이도록 하지만 저차원 손잡이를 직접 취급하는 것은 많은 경우 곤란이 있다.

최근에는 헤가드 분해나 카비 도식을 직접 취급하는 방법과 별도로 이것을 이용하여 3차원 다양체의 불변량을 구성하는 연구가 활발하다. 이렇게 해서 생긴 불변량으로 캣슨(Casson) 불변량, 양자불변량 등이 있다.

흥미 있는 일은 이들 불변량을 생각하는 최초의 출발점에 「접속(connection)」 전체 공간위의 범함수(Chern-Simons functional)에 관해서의 무한차원 모-스 이론이 기본원리가 된다.

3차원 뿐 아니고 4차원 다양체론에서도 도날드손(Donaldson)에 의한 게이지(guage) 이론의 응용(1980년대)으로 깊은 이론이 진전되었으며 후리드만의 4차원 위상 다양체와 도날드손 이론을 합쳐서 증명되는 4차원 이종(異種)공간의 존재([19])는 수학계에 큰 충격을 주었다.

도날드손이론도 특수 유니타리군 $SU(2)$접속전체가 만드는 무한차원공간위의 범함

수(Yang-Mills Functional)에 관한 모-스이론이다. 최근에는 사이버그-위턴(Seiberg-Witten) 이론이 도날드손 이론을 대폭 간소화하였다.

현재 무한차원과 유한차원의 모-스 이론이 다시 밀접하게 연동 (유한차원과 무한차원 모두 성립하는 이론)하고 있다.

3. 결론

이제까지 언급한 내용은 모-스이론의 일부에 불과하다. 특히 주목을 끄는 것은 저차원다양체에서 헤가드 도식이나 카비 도식을 통해서 손잡이체가 틀고리(framed link)로 나타낼 수 있고 매듭이론과의 관계도 분명해진다. 저차원다양체이론은 매듭이론과 깊은 관계가 있다. 한편 대수곡면의 위상, 특히 레프세츠(Lefschetz)의 화이바공간의 이론은 복소수세계의 모-스이론으로 대수곡면(4차원다양체)의 위상을 연구할 때 중요하다. 특히 화아바주위의 모노드로미(Monodromy)는 4차원다양체와 2차원폐곡면의 사상류군에 조합적군론으로 연결된다.

무한차원 모-스이론이 유한차원에서 성립하지 않는 현상을 알게 된것은 삭스(Sacks)와 우렌벡(Uhlenbeck)([20])에서 이다.

이러한 무한차원 특유의 현상은 Yang-Mille장, 개복소곡선(Pseudo holomorphic curve), 아이슈타인계량 자기상대계량등 많은 변분문제에 나타나서 중요한 연구대상이 된다. 또 모-스이론은 경제이론에도 많이 적용되고 있다.

감사의 글 이 논문을 심사하여 주신 심사위원께 감사를 드립니다.

참고 문헌

1. M. Morse, *Calculus of variations in the large*, A.M.S. Collog. publ, 1934.
2. R. Bott, *Non-degenerate critical manifolds*, Annal of math. 60(1954).
3. S. Smale, *Generalized poincare conjecture in dimension greater than 4*. Annal of math. 74(1961).
4. J. Milnor, *Morse theory*, Princeton univ. press, 1963.
5. R. S. palais and S. Smale, *A generaliged Morse theory*, Bull. A.M.S. 70(1964)
6. J. Milnor, *Lectures on h-cobordism Theorem*, Princeton univ, press, 1965.
7. R. C. Kirby, *A calculus for framed links in* S^3, Invent, Math. 45(1978).
8. R. Bott Maston, *Morse selected papers*, Springer-Verlag(1981).
9. M. Freedman and F. Quinn, *Topology of 4-manifolds*, Princeton univ. press, 1990.
10. M. Schwarz, *Morse Homology*, Birnkhauser, 1993.
11. K. Fukaya, *Floer homology for 3-manifolds with boundary*, world Scientific, (1994).
12. R. Friedman and I. Morgan, *Smooth 4-manifolds and convlex surfaces*, Spieuges -Verlag, 1994.
13. W. Witen, *Suppersymmetry and Morse theory*, J. Differential Geometry, 17, 1982.
14. A. Floer, *An instanton invariant for three manifold*, commun. Math, Phys. 118(1988).
15. W. klingenberg, *Lectures on closed geodesics*, Springer-Verlag, 1978.
16. R. S. Palais, *Morse theory of Hilbert manifolds*, Topology2, 299-340(1963).
17. J. Milnor and J. Stasheff, *Characteristic classes*, Princeton univ. press, 1874.
18. M. W. Hirsch, *Differential topology*, Springer-Verlog, 1976.
19. S. Donaldson, *Polynomial invariant for smooth 4-manifold*, Topology 29(1990).
20. J. Sacks, and K. Uhlenbeck, *The existence of minimal immersions of 2-spheres*, Ann. of Math. 60(1965).

History of Morse theory

Department of Mathematics, Kangnam University **Ki Sung Park**

This article reviews the exciting developments in Morse theory by S.Smale, Freedmann and others, including a proof of the generalized Poincare' Conjecture in the handle body theory.

We study its relations with handle body theory and geodesic theory

Key words: Morse theory, Morse inegulity, Handle body, Morse index, Poincare conjecture

2000 Mathematics Subject Classification : 57R65, 57N16

논문 접수 : 2006년 7월　　　　　　　　　심사 완료 : 2006년 8월