한국수학사학회지 제19권 제4호(2006년 11월), 81-96

라이프니츠의 분석법에 관한 고찰

부산교육대학교 김성준
joonysk@bnue.ac.kr

수학에서 분석(analysis)의 역사는 고대 그리스에서부터 시작되었다. 그리스의 기하적 분석법은 16세기 비에트(Viète)와 데카르트(Descartes) 이후 방정식을 이용한 문제해결(대수적 분석법)로 확장되었으며, 그 결과 대수는 분석을 위한 기술(art for analysis)로 대변되었다. 그리고 뉴턴(Newton)과 라이프니츠(Leibniz)에 의해 미적분학이 탄생되면서 분석은 대수에서 한 걸음 더 나아가 오늘날 수학의 한 분야인 해석학으로 발전되었다. 그 동안 수학교육학 연구에서는 분석과 관련된 논의가 파푸스(Pappus)와 데카르트를 중심으로 다루어져 왔으나, 지금까지 라이프니츠의 역할과 그에 대한 연구는 거의 다루어지지 않았다. 본 연구는 라이프니츠의 철학 및 논리학을 바탕으로 그 가운데 분석과 관련된 그의 아이디어를 살펴보고, 이를 통해 그가 생각한 수학에서의 분석의 역할에 대해 논의하였다.

주제어 : 분석, 대수, 해석학, 데카르트, 라이프니츠의 분석법

1. 서론

다음은 폴리아(Polya)의 ≪어떻게 문제를 풀 것인가≫(How to Solve It) 가운데 수학적 발견술에 관한 글이다.

발견술(heuristics)이란 아주 분명하게 규정되어 있지는 않은 논리학, 혹은 철학, 혹은 심리학에 속하며, 흔히 대략적으로 서술되어 있을 뿐 상세하게 제시되어 있지 않은 연구 분야의 명칭으로, 현재는 잊혀졌다 해도 좋은 분야이다. 발견술의 목표는 발견의 방법과 규칙을 연구하는 것이다. 그러한 연구의 몇 가지 자취가 유클리드의 주석에 나타나 있으며 파푸스의 서술은 이 면에서 특히 흥미롭다. 발견술의 체계를 세우려 한 가장 유명한 시도는 위대한 수학자이자 철학자인 데카르트와 라이프니츠에 의한 것이다([12], [1]).

그 동안 수학교육학 연구에서 발견술과 관련된 주요 논의는 분석법을 중심으로 전개되어왔으며, 이 과정에서 파푸스(Pappus, AD 3C경)에 의해 이루어진 그리스 시대

의 분석과 종합의 고찰을 비롯하여 데카르트(Descartes, 1595-1650)가 수학적 발견술로서 제시한 규칙과 분석법, 그리고 라카토스(Lakatos)가 수학의 방법론으로 제시한 분석의 아이디어 등을 중심으로 해서 다루어져왔다. 그러나 본 연구는 폴리아의 글에서 언급된 라이프니츠(Leibniz, 1645-1716)의 역할에 주목하여, 폴리아의 주장과 달리 수학교육학 연구에서 분석법에 대한 논의가 라이프니츠에 대해서는 그동안 구체적으로 다루어지지 않았다는 사실에서 출발한다. 폴리아는 발견술에 있어서 라이프니츠의 역할을 데카르트와 함께 발견술의 체계를 확립한 것으로 보고 있는데, 본 연구는 이러한 폴리아의 주장에 대한 일차적인 검토 작업으로 라이프니츠의 발견술, 그 가운데 분석법에 대한 그의 논의가 철학을 비롯하여 논리학 등에서 어떤 형태로 다루어졌는가를 살펴보고자 한다. 이러한 논의는 앞으로 라이프니츠의 수학적 업적에서 분석적 아이디어를 구체화하는데 그 기초가 되기 위한 것이다.

먼저 다음 장에서 분석법과 관련된 선행연구를 간략하게 정리하면서 그 가운데 파푸스와 데카르트에 의해 이루어진 분석적 아이디어를 중심으로 살펴볼 것이다. 그리고 이어서 라이프니츠의 철학과 논리학, 의학, 수학 등에서 그가 생각했던 분석의 의미에 대하여 몇몇 문헌들을 통해 고찰해보고, 이를 통해 앞으로 이러한 분석과 관련된 그의 논의가 수학 그 가운데 미적분학을 발견하는 과정에서 어떤 형태로 표현되고 있는지를 살펴볼 수 있을 것이다.

2. 발견술과 분석법

수학을 비롯하여 여러 학문에서 발견술(heuristics)의 역사는 상당히 오래되었으며, 그 논의는 고대 그리스에서부터 현대에 이르기까지 다양한 형태로 전개되어왔다. 발견술은 역사적으로는 논증술과 대립의 관계에서 다루어져 왔는데, 발견술은 문제에서 해(solution)를 발견하는데 도움이 되지만 발견된 해가 옳음을 보증하지 못하는 반면, 이에 비해 논증술은 정당화의 원리를 제공하지만 해를 발견하는 과정에는 도움이 되지 않는 것으로 인식되어져왔다([1]). 그러나 수학에서는 발견적이면서도 논증적인 방법을 찾으려는 노력이 계속되어 왔는데, 그 결과 이러한 대표적인 절차로 분석법에 대한 연구가 이루어졌다.

분석법은 수학적 발견술 가운데 가장 강력하면서 가장 오래 전부터 사용되어진 것으로 알려져 있다. 분석법과 관련해서 그 동안 이루어진 대표적인 연구로는 강문봉(1992)과 한인기(1999, 2000, 2001), 우정호(2000)의 연구가 있다. 먼저 강문봉의 연구에서는 수학의 역사에서 분석적 아이디어가 전개되어 온 과정을 파푸스에서부터 시작하여 데카르트, 폴리아, 라카토스 등의 논의에서 찾고 있으며, 이러한 논의와 함께 분석법의 수학교육적 의의에 대해 살펴보고 있다([1]). 한인기의 연구(1999, 2000)에서는 분석적 활동을 기하 작도 문제의 해결 방안으로 제시하고 있으며, 이와 함께 분석법

의 수학교육에서의 효과적인 활용에 대해 다루고 있다([8], [9]). 또한 한인기(2001)는 종합-분석적 활동의 본질을 논의하는 가운데 분석의 유형을 이전과 다른 용어(상승분석과 하강분석)로 규정하고 그 예를 함께 제시하여 종합-분석적 활동이 수학교육에서 보다 체계화될 필요가 있음을 강조하고 있다([7]). 한편 우정호(2000)는 수학 학습-지도 원리와 방법으로 분석-종합법을 논의하면서, 명제의 증명에서의 분석과 종합 그리고 도형의 작도제나 방정식의 풀이에서의 분석과 종합으로 구분하였으며, 더불어 학교수학에서 수학교사의 일차적인 관심사로 이러한 분석과정을 복귀시키는 것을 강조하고 있다([4]). 다음은 이들 연구에서 파푸스와 데카르트를 중심으로 분석법에 대해 개관한 것이다.

일반적으로 분석법의 역사는 발견술을 탐구하는 과정에서부터 시작되었다. 여기서 발견술이란 답을 구하거나 증명하는 문제에서 문제해결과 연결된 유용한 발견과 발명의 방법과 규칙을 찾는 전략과 전술을 의미하며, 분석법은 그 대표적인 전략 가운데 하나로 인식되었다. 그리스 시대에 분석법을 체계화한 것으로 알려진 파푸스는 분석법에 대하여 다음과 같이 말하고 있다([4]).[1)]

분석에서는 요구되는 것으로부터 시작하며 요구되고 있는 것이 옳다고 가정하고 그 결과로부터 다시 결과를 이끌어내어 출발점으로 사용할 수 있는 점에 도달할 때까지 계속하게 된다. 곧, 분석에서는 요구되고 있는 것을 이미 이루어진 것처럼(구하고 있는 것을 이미 찾은 것처럼, 증명해야 할 것을 참인 것처럼) 가정하는 것에서 시작한다. 선행하는 어떤 것으로부터 바라는 결과가 유도될 수 있는가를 묻고 다시 그 선행자의 선행자는 무엇인가를 계속하여 물음으로써 결국 이미 알려져 있거나 참인 것으로 가정한 것에 이르게 된다. 이러한 절차를 분석(거꾸로 풀기 또는 역행적 추론)이라고 부른다. 그러나 종합에서는, 그 순서를 반대로 하여, 분석에서 제일 마지막에 도달한 지점, 즉 이미 알려져 있거나 참인 것으로부터 시작한다. 그로부터 분석에서 그에 선행한 것을 이끌어내며, 분석 과정을 되밟아 가면서 마지막에 요구하고 있는 것에 도달할 때까지 그러한 연역 과정을 계속하게 된다. 이러한 절차를 종합(구성적 풀이 또는 전진적 추론)이라고 부른다.

따라서 파푸스의 설명에 따르면 수학에서 분석법의 역할은 추측이 참인지 아닌지를 발견하는 논리를 제공하는 동시에 그 추측이 참인 경우에는 그 추측을 역으로 되돌림으로써 정당화를 위한 논리를 제공하는 것이다. 곧, 파푸스에 의해 체계화된 분석법은 수학에서 문제나 명제를 발견하는 논리이면서 한편으로 이러한 발견의 과정을 재해석하여 연역적인 증명의 수준에까지 이르는 정당화의 논리를 동시에 포함한다고 볼 수

1) Heath에 따르면, "분석적 방법은 피타고라스에 의해 이미 사용되었고, 플라톤에 의해 그 방법이 제안되었으며 유클리드(Euclid) 원론에서는 그 내용이 사라졌다가 파푸스에 의해 다시 정의되었다"고 말한다([1]).

있다.[2)]

이러한 파푸스의 분석법은 데카르트에 이르게 되면 기하에서 정리의 증명을 찾아내는데 한정되지 않고, 이를 대수 곧 방정식을 이용한 문제해결 방법으로 확장된다. 데카르트는 ≪정신 지도를 위한 규칙들≫(Rules for the Direction of the Mind)에서 이성을 잘 인도하고 학문에서 진리를 발견하기 위한 방법으로 다음과 같은 규칙을 말하고 있다([1]).[3)] 더불어 그는 이 책에서 지금까지 발견된 학문들 가운데 이러한 규칙을 준수한 것은 오직 산술학과 기하학뿐이라고 하였다([5]).

일단 문제가 완전히 이해되면, 우리가 해야 할 일은, 그 의미에 불필요한 모든 개념을 제거하고, 문제를 가장 단순한 용어들로 진술하는 것이며, 그리고 열거의 힘을 빌려, 그것을 그 이상 분석이 불가능한 여러 부분으로 나누는 것이다. (규칙 XIII)

이런 추론 방법을 사용하여, 우리는 문제를 직접적으로 다루기 위하여 마치 알려진 것처럼 취급하는, 미지의 용어만큼 많은 양들을 찾아내야만 한다. 그리고 이것들은 두 가지 다른 방식으로 표현되어져야 한다. 왜냐하면 이로 인해 미지인 것의 개수만큼이나 많은 방정식을 가질 수 있기 때문이다. (규칙 XIX)

이런 종류의 여러 방정식이 있으면 우리는 그것 모두를 ...... 단 하나의 방정식으로 환원해야만 한다. (규칙 XXI)

특히 위의 규칙에 따르는 데카르트의 방법은 문자기호로 표현되는 과정에서, 기하의 증명에서 나타나는 분석과는 다른 형태를 띠게 되는데, 강문봉(1992)은 이러한 분석의 유형을 '대수적 분석법'으로 정의하였다.[4)] '대수적 분석법'은 그 자체가 논증적이며 분석에서의 필요조건을 찾음으로 인해 넓어진 해의 범위를 제한하는 과정에서 종합이 등장하게 되고, 그 결과 분석과 종합은 진정한 해의 의미를 이끌어내는 과정에서 상호보완적인 역할을 하게 된다. 결국 그리스 시대 이후 기하에서 발견의 아이디어로 사용되었던 분석은 문자 기호의 등장으로 인해 대수와 결합하면서 또 다른 발견술로 역할하게 된 것이다. 한편 데카르트는 규칙으로 이러한 '대수적 분석법'을 제안하면서 분석의 교육적 가치에 대해 다음과 같이 말하였다([1]).

분석은, 독자가 주의 깊게 그것을 따르고 모든 것에 충분히 주의한다면 그가 내용

2) 분석법의 이러한 역할은 그 유형에 따라 다소 차이를 보이지만, 수학에서 발견과 정당화의 논리 양 측면을 제공한다는 점에서 강력한 힘을 가지고 있다. 이러한 분석법의 유형 및 그 역할과 관련해서는 우정호(2000)와 한인기(2001)의 글에 자세하게 설명되어 있다.

3) 데카르트는 ≪방법서설≫"에서도 수학적인 추론의 엄밀한 방법을 사용함으로써 철학에서의 명증성을 확보하고자 하였으며, 이를 위해 그는 4개의 짧은 규칙을 제시하고 있다. 그 가운데 둘째에서 그는 "검토할 어려움들을 각각 잘 해결할 수 있도록 모든 것을 가능한 한 작은 부분으로 나눌 것"을 강조하는데, 이는 분석이 과학의 첫걸음임을 의미한다([5]).

4) 한인기(2001)는 방정식의 탐구를 시작할 때, 주어진 방정식이 해를 가지는지 아닌지 모르는 상태에서 해 x가 존재하는 것으로 가정했기 때문에, 이러한 분석의 유형을 '불완전 분석'으로 보고 있다.

을 완전히 이해하고 그 자신이 그것을 발견한 것처럼 그것을 그 자신의 것으로 하도록 말하자면 원인에서 결과로, 어떤 것이 방법적으로 발견되고 유도되는 진정한 수단을 보여준다 ... 이에 반하여 종합은 반대 절차를 사용한다 ... 그렇지만 이 방법은 배운 내용이 발견되는 방식을 보여주지 않기 때문에 분석처럼 만족스럽지 못하고 열성적인 학습자를 만족시키지 않는다 ... 그러나 나는 나의 성찰에서 분석만을 사용하였는데, 그것은 교수의 가장 좋고 가장 참된 방법이다.

데카르트는 분석을 수학을 연구하는 참된 방법으로 보고 있으며, 또한 수학을 가르치는 가장 좋은 방법이 분석에서부터 비롯될 수 있음을 강조하였다. 이와 함께 그는 분석이 선행되지 않은 종합은 수학적으로, 교육적으로 모두 가치가 없는 것으로 보았다.[5] 이는 분석이 연연적인 종합을 의미 없이 되돌려 놓는 것이 아니라 실제적인 수행에서 구체적인 문제해결과 연결될 수 있기 때문이며, 그 결과 분석은 수학의 모든 경우에 있어서 유용하기 때문이다([4]).

이처럼 데카르트는 모든 수학적인 방법을 통일적으로 다루는 새로운 과학의 필요성을 느끼고 이를 보편수학이라 부르면서 이러한 보편수학의 출발점을 분석에서 찾고자 하였다. 그에 따르면, 분석은 인간의 자연스러운 사고 활동이면서 동시에 수학적 발견의 논리를 제공하는 사고 활동이다. 그리고 분석은 수학에서 문제해결을 위한 발견의 논리를 우선적으로 제공하기 때문에, 이러한 논리를 이용하여 문제를 해결하는 것은 교육적으로 가치가 있게 되는 것이다. 따라서 수학교육학 연구에서 분석을 수학적 발견의 논리로 파악하는 동시에 이것을 오늘날의 문제해결 및 수학적 사고를 기르기 위한 주제로 활용하는 것은 파푸스와 데카르트가 강조했던 분석과 같은 맥락에서 이해될 수 있을 것이다.

3. 라이프니츠의 발견술과 분석법

12세기 이후 인도 아라비아 기수법을 사용하는 단순화된 계산법이 서구에 전해지면서 수학 연구는 기하에서 대수적인 기호 조작으로 그 중심이 점차 이동하기 시작하였다. 그리고 16세기에 비에트(Viète, 1543-1603)가 대수에 문자를 도입하면서 기호법의 발견적인 힘은 더욱 강력하게 되었으며, 데카르트는 기하를 대수적인 방법으로 풀어가는 해석기하를 통해 이러한 발견적인 힘을 더욱 굳건히 하였다. 그리고 17세기 라이프니츠에 이르러 대수적인 기호의 발견적인 힘은 무한소 미적분학에서의 기호 조작법으로 재탄생하게 되었다. 더불어 라이프니츠는 데카르트와 마찬가지로 문제를 해결하는 일반적인 방법 즉, 발견술을 연구하여 이를 기호화하려는 시도를 하였다. 라이프

5) 데카르트는 "왜 그렇게 되는지, 어떻게 그것을 발견했는지를 정신 자체에 분명하게 보여주지 못하는 그러한 피상적인 논증에 호소하는 것보다 더 무익한 것은 없다"고 말하였다.([1])

니츠가 문제에서 기호를 이용한 계산을 강조한 한 예로, 그는 논쟁이 일어나게 되면 상대방에게 "자, 그러면 우리 계산해봅시다"라고 말하고 기계적으로 그 문제를 해결하였다고 한다([3]).

비에트 이후 수학의 본질은 문자 기호를 사용한 연산으로 그 중심이 옮겨가게 되었으며, 그 결과 데카르트와 라이프니츠에게 수학은 수학적 기호를 사용하는 형식과학(또는 보편수학)으로 인식되었는데, 특히 이러한 보편수학에서 분석적 특징을 다루는 것은 중요한 주제가 되었다. 데카르트의 경우 수학적 지식의 특징을 그의 철학의 근본으로 삼고 있는데; 이를 위해 제시한 규칙에는 분석이 모든 과학의 출발점으로 강조되고 있다([5]). 이러한 논의는 라이프니츠에게서 보다 포괄적인 형태로 나타나게 되는데, 그는 모든 수학적 분야를 뛰어 넘어 논리학을 포함하는 형식과학(또는 보편수학)의 특징을 다루면서, 그 가운데 특히 모든 학문에서 찾아볼 수 있는 분석적 특징에 대해 관심을 가지고 있었다.

일반적인 관점에서 분석과 종합을 보면, 분석은 한 현상에서 그 구성요소를 찾아가는 과정이며 이에 비해 종합은 그 구성요소를 조합(combination)하여 본래의 현상을 재구성하는 과정을 의미한다. 라이프니츠는 다름 아닌 이러한 분석과 종합을 자신의 철학을 구성하는 핵심으로 삼고 있으며, 따라서 라이프니츠에게서 그의 철학과 논리학 등에서 제시된 분석적 아이디어를 살펴보는 것은 지금까지 논의된 파푸스와 데카르트와 함께 수학적 발견술로서의 분석법을 논의함에 있어 중요한 의미를 갖게 된다. 다음은 라이프니츠의 철학과 논리학 등 다양한 학문 분야를 통해 분석과 관련된 그의 아이디어를 살펴본 것이다.

1) 라이프니츠의 철학 전반에 나타난 분석

라이프니츠는 법학과 과학을 비롯하여 수학과 철학 등 다양한 학문에서 각기 다른 조건과 목적으로 분석적 아이디어(또는 방법)를 도입하였는데, 이러한 분석적 아이디어는 서로 다른 학문과 분야에서 사용되면서도 그 기본적인 의미와 역할에 있어서는 어느 정도 동일성을 유지하였다([11]). 다시 말해, 각각의 학문 분야에서 요구되는 사고에 대한 분석과 그리고 진리에 대한 분석, 덧붙여서 각기 다른 형태로 제시되는 문제의 분석은 각 분야별로 서로 다른 절차를 가지는 것이 일반적이겠지만, 그럼에도 불구하고 우리는 라이프니츠가 이들 각각의 학문 분야에서 분석적 아이디어를 유사한 조작의 과정을 통해 적용하고 있다는 점에 주목하여야 한다. 이는 결국 라이프니츠에게 있어 분석법(analysis, 분석적 아이디어)이 그 이전의 데카르트에게서와 마찬가지로 복잡한 무엇에서 보다 단순한 요소들을 분해하는 일련의 사고 작용으로, 즉 무언가를 발견하기 위한 발견술로서의 역할을 하기 때문이다.

분석법을 중심으로 한 라이프니츠의 학문 연구는 그가 제시한 철학의 목적에서 분

명하게 찾아볼 수 있다. 곧, 라이프니츠는 그의 철학에서 궁극적인 목적을 이제까지 획득한 모든 지식을 체계적으로 포괄할 뿐만 아니라 인식들의 체계를 통해 모든 가능한 지식을 발견할 수 있는 새로운 백과사전(일종의 발견술)을 건설하는데 두고 있다([5]). 그리고 이러한 목적을 위해 우선적으로 요구되었던 것은 요소개념들을 찾아내는 것 즉, 기존의 지식을 분석해 내는 것이었다. 나아가 라이프니츠에게 있어 명제로 인식될 수 있는 것은 반드시 요소개념으로부터 형성된 것이어야 하며, 그 결과 그는 모든 가능한 진리(참된 지식)는 모든 기본 진리, 즉 요소개념들을 통해 증명될 수 있다고 보았으며, 이를 위해 일차적으로 요구되는 것은 분석이었던 것이다.

이와 같은 라이프니츠의 생각은 ≪조합의 기술에 관하여≫(De arte combinatoria)에 분명하게 나타나 있으며, 여기서 우리는 그의 계획 즉, 새로운 백과사전의 건설은 분석에서부터 시작되고 있음을 확인할 수 있다([10]).

≪조합의 기술에 관하여≫에서 그는 먼저 복합 명사들을 단순 명사로 분석하려고 한다. 즉, 모든 주어진 명사들을 형식적 부분들로 분해하도록(정의하도록) 한다. 그리고 다시 이 부분들을 가장 기본적인 정의의 명사들로 분해하도록 하고 이런 작업을 반복하여 더 이상 정의 불가능한 명사들 곧, 가장 단순한 부분들에까지 도달하도록 한다.[6] 그에 따르면, 이 단계에서 이러한 단순 명사 또는 정의 불가능한 명사는 인간 사고의 기본 절차들을 이루고 있는 것들이다. 그는 논리에서 모든 단어나 구가 기본 철자들의 조합인 것과 마찬가지로 철학이나 논리학, 수학 등의 모든 학문에서의 명제들 역시 이러한 단순 명사 또는 정의 불가능한 명사들의 조합의 결과라고 보았으며, 이러한 명제들을 입증하기 위해서는 무엇보다 분석이 우선되어야 한다고 보았다.

한편 Gueroult는 라이프니츠가 제시한 분석을 구체와 추상이라는 관점에서 보아 두 가지 방향으로 구분하고 있다. 그 중 하나는 구체적인 것에서부터 추상적인 것으로 그 방향이 나아가는 것으로, 이것은 보다 단순한 개념을 향하지만 다소 모호해질 수도 있다. 이에 비해 나머지 하나는 추상적인 것에서부터 구체적인 것으로 나아가는데, 이것은 주로 덜 실제적인 것에서 더 실제적인 것을 지향하게 된다([11]). 곧, 라이프니츠에게 있어 주어진 명사들을 형식적 부분들로 분해하는 일차적인 분석의 과정은 이와 같은 구체와 추상이라는 두 가지 관점에서 볼 때 , 보다 단순한 개념으로 그리고 더욱 실제적인 것으로 나아가는 과정에 해당한다.

≪조합의 기술에 관하여≫에서 일차적인 분석의 과정에 이어 그의 계획에서 두 번째 단계로 제시된 것은 논리와 수학의 결합이다. 다시 말해, 앞서 분석을 통해 획득된 단순 명사 또는 정의 불가능한 명사들(논리)을 수학적인 기호들(수학)로 표시하는 것이다. 그리고 그는 분석의 과정을 되돌려 만일 이러한 수학적 기호들을 조합하는 방법을 발견할 수 있다면 이는 논리에서 이미 알려진 진리들을 논증하는데 뿐만이 아니라 새로운 진리들을 발견하는 데 있어서도 도움이 될 수 있다고 보았다.

6) 이러한 일련의 분해 과정은 앞서 데카르트에게서 살펴본 규칙 XIII과도 유사한 특징을 가지고 있다.

이처럼 라이프니츠는 그의 철학의 목적을 달성하기 위해 두 단계의 계획을 설정하고 있으며, 그 출발점이 논리에서 명제(또는 복합명사)의 분석에 있음을 분명히 제시하고 있다. 그리고 두 번째 단계에서 이러한 논리를 수학 기호로 표현하게 되는데, 이 과정에서 논증과 발견에 있어서의 분석의 역할이 동시에 드러나고 있다. 이것은 앞서 파푸스와 데카르트에게서 보았던 수학적 발견의 논리인 분석의 아이디어가 라이프니츠에게 있어서도 유사한 맥락으로 연결되고 있음을 보여준다. 곧, 이러한 수학적 기호로 표현된 분석의 과정을 되돌림으로써 논증을 이끌어낼 수 있다는 그의 생각에서 분석에 이어지는 연역적인 정당화의 논리 즉, 종합의 과정을 분석과 함께 생각하고 있음을 알 수 있다.

이처럼 라이프니츠의 철학에서 찾아본 분석적 아이디어는 그의 철학 목적으로부터 분명하게 알 수 있는데, 곧 그는 그의 철학에 있어 인식들의 체계를 통해 모든 지식을 체계적으로 포괄하면서 동시에 모든 가능한 지식을 발견할 수 있는 유일한 방법을 첫 번째 단계인 '분석'과 그리고 두 번째 단계인 '논리와 수학의 통합'에서 찾고 있음을 알 수 있다. 여기서 우리는 그의 철학에서 무엇보다 분석적 아이디어가 그 출발점에 놓여 있으며, 이러한 그의 분석에 대한 관심이 철학을 비롯하여 그가 연구한 모든 학문에서도 중요하게 다루어지고 있다는데 주목해야 한다.

2) 라이프니츠의 진리관을 통해 살펴본 분석

다음에서는 앞서 라이프니츠의 철학에 이어 그의 논리학에서 그가 생각한 진리의 기준에 대해 살펴보고자 한다.

라이프니츠는 진리를 이성적 진리(필연적 명제)와 사실적 진리로 구분하고 있다. 그리고 이 두 가지 진리를 나누는 기준으로는 주어진 명제의 분석이 가능한지 그 여부에서 찾고 있다. 다시 말해, 라이프니츠에게 있어 이성적 진리라고 할 수 있는 것들은 분석 명제를 전제로 한다. 그는 주어진 명제의 주술관계에서부터 그 이유를 제시하고 있는데, 이를테면 이성적 진리의 경우 술어가 주어 안에 포함되어 있으며 이러한 이유로 명제의 분석이 가능하며 분석을 통해 그 연결을 계속해서 확보할 수 있다고 보았다. 곧, 명제의 분석은 술어 개념이 주어 개념 속에 포함되어 있는 경우에 실제로 그것이 가능하며, 이 경우 이성적 진리로 구분되는 것이다([11]).

이러한 라이프니츠의 논리학에서 나타나는 진리관은 Copleston의 논의에서 보다 구체적으로 찾아볼 수 있다. 그에 따르면, 라이프니츠가 생각한 이성적 진리 또는 필연적 명제는 현대적인 의미에서 분석 명제와 동일시될 수 있는데, 이는 라이프니츠가 모든 참인 명제를 분석적이라고 생각한 것과도 연결된다. 이에 비해 사실적 진리의 경우에는 술어가 주어 안에 반드시 포함되어 있다는 보장을 할 수 없으며, 이것이 바로 분석 자체를 어렵게(또는 불가능하게) 만드는 직접적인 원인이 된다. 다시 말해,

라이프니츠에게 있어 이성적 진리들 사이의 연결은 필연적인데 비해 사실적 진리들 사이의 연결은 항상 필연적이지 않다. 따라서 주어진 명제에서 이러한 연결을 보장하는 것은 명제에서의 분석 가능성 여부로 판단될 수 있으며, 이성적 진리의 경우 이러한 분석이 가능한 명제를 의미하게 된다. 라이프니츠는 이와 관련하여 다음과 같이 설명하고 있는데([10]), 이 과정에서 우리는 기하학적 진리가 이성적 진리의 일종으로 그 연결이 가능하며 따라서 분석이 가능한 진리임을 확인할 수 있다.

이러한 연결에는 두 종류가 있다. 그 중 하나는 절대적으로 필연적이어서 그 역은 모순을 포함하는데 이러한 연결은 기하학적 진리와 같은 영원한 진리의 경우에서 볼 수 있다. 다른 하나는 단지 가언적으로만, 즉 바꾸어 말하면 단지 우연적으로만 필연적인 것으로 그 자체는 우연적이라고 할 수 있으며 그 역 또한 모순을 포함하지 않게 된다.

이처럼 라이프니츠는 이성적 진리 또는 필연적 명제, 특히 논리학에서 말하는 진리의 경우 반드시 연결을 통한 분석이 가능해야 하며, 이를 통해 증명가능성을 확보하는 것이 일차적으로 요구된다고 하였다. 다시 말해, 이러한 연결이 가능한 경우에 주어진 명제는 비로소 '분석적'이 될 수 있으며, 이 경우에만 논리학 또는 수학에서의 명제의 진리에 대한 가치를 담보할 수 있다는 것이다.

진리에서 특히 이성적 진리는, 그것은 가장 원시적인 형태에 도달할 때가지 더욱 단순한 아이디어 또는 진리로 분해되는 분석에 의해서만 발견될 수 있다([11]).

앞서 말했듯이 여기서 진리란 하나 또는 여러 개의 '주어-술어' 형태의 명제로 표현되어 기술된다. 곧, 명제는 실체(주어)의 성질을 특성화하기 위해 제시되는데, 이 경우 성질은 연결된 상태에서 주어의 '필요조건'과 같은 역할을 하거나 또는 연결되지는 않지만 사실적으로 드러나는 것이어야만 한다. 일반적으로 전자의 경우 이성적 진리로 인정되며 동시에 그 연결성으로 인해 자연스럽게 분석이 가능하게 된다. 반면 후자의 경우는 사실적 진리에 해당하는 것으로, 이러한 명제에 대해서는 분석이 가능하지 않게 된다. 라이프니츠에게 있어 논리학에서 제시된 명제에서 그 진리를 담보하는 것은 일차적으로 분석을 통한 발견이며, 이것은 이성적 진리인 경우에 한해서만 이러한 분석을 통한 발견이 가능하다고 보았다.

더욱이 라이프니츠는 이러한 이성적 진리 또는 필연적 명제의 대표적인 예를 수학과 논리에서 찾고 있는데, 특히 수학의 경우 모든 정리가 분석을 통해 정의와 공리, 공준으로 분해될 수 있다는데 주목하여 그 필연적인 연결이 가능하며 이로 인해 수학을 전형적인 이성적 진리 곧, 필연적 명제들의 집합으로 보았다. 이는 그가 수학을 연

구하기에 앞서 수학이라는 학문을 어떻게 보고 있는가를 보여주는 것으로, 나아가 수학을 이성적 진리의 집합으로 보았다는 것은 그가 수학을 연구함에 있어 철학이나 논리에서와 마찬가지로 분석적 아이디어를 새로운 수학적 지식의 발견에 있어 일차적인 사고 과정으로 여기고 있었다는 것을 보여주고 있다.

3) 라이프니츠가 생각한 분석의 과정

다음에서는 앞서 보았던 두 가지 형태의 진리에서 그 과정의 유한성과 무한성을 통해 분석이 가능한 진리를 어떻게 구분하고 있는지를 생각해보고, 다음으로 라이프니츠가 연구한 병리학에 근거하여 그가 생각한 분석과 종합에 대해 살펴볼 수 있다. 또한 이러한 그의 분석에 대한 생각은 수학에서도 동일하게 적용해볼 수 있다.

먼저 앞서 보았듯이 라이프니츠에게 있어 논리나 순수수학에서와 같이 이성적 진리 또는 분석적이고 필연적인 명제들이 존재하는 한편, 현실에서는 사실적 진리 또는 우연적인 명제들이 또한 존재한다. 그는 이러한 두 진리 사이의 차이를 분석이 가능한지에 따라 구분하고 있는데, 더 자세하게 살펴보면 여기서 말하는 '분석'에는 그 과정에 있어서 분명한 차이가 존재한다. 곧, 사실적 진리의 경우 분석이 불가능하거나 어려운 것을 말하는데, 이를 부연하면 분석의 과정에서 그 차이점을 확인할 수 있다. 다시 말해 라이프니츠는 이러한 두 유형의 진리를 분석의 유한과정과 무한과정으로 구분하여 각각을 유리수와 무리수로 비교하고 있다. 그리고 오직 신만이 가능한 무한한 분석을 유한한 정신이 행할 수 없기에 결국 이로 인해 사실적 진리는 분석이 불가능하다라고 말한다([10]).

필연적이고 영구적인 진리와 우연적 진리 또는 사실적 진리를 구별하는 것은 본질적인 문제이다. 그리고 이들은 마치 유리수와 무리수만큼이나 서로 다르다. 왜냐하면 필연적 진리는 마치 같은 단위를 사용하여 잴 수 있는 분량들이 하나의 공통적인 척도 하에 포섭되는 것과 마찬가지로 동일성의 명제로 환원될 수 있기 때문이다. 그러나 우연적 진리에서는 무리수와 마찬가지로 이러한 환원이 끝남이 없이 무한히 계속된다. 따라서 우연적 진리들의 확실성과 완전한 근거는 오직 신만이 인식할 수 있다.

따라서 라이프니츠에게 필연적인 이성적 진리에 대한 분석은 본질에 대한 분석으로서 본성상 이후의 것으로부터 본성상 이전의 것으로 나아가게 되며, 이러한 유한번의 과정을 거쳐 결국 원초적 개념에 이르러 끝나게 되는 것으로 파악된다. 그리고 논리학이나 순수수학의 명제들은 이러한 유한번의 과정을 거쳐 분석이 가능한 형태로 구성되어 있으며, 따라서 이러한 명제들의 논증 역시 필연적인 연결을 따르는 분석을 통해 발견될 수 있고 그리고 그 결과는 언제든지 재확립될 수 있도록 되어 있기에 이성적 진리로서 그 의미를 가지게 된다. 곧, 그는 수학과 같은 이성적 진리는 첫 번째

조건으로 분석이 가능해야 하며, 두 번째로 그 분석이 유한과정을 통해 이루어져야 한다는 것을 분명히 한 것이다.

다음으로 라이프니츠가 관심을 가졌던 병리학을 통해 분석과 종합의 과정에 대한 그의 생각을 살펴볼 수 있다. 그는 의학적 지식과 그 방법에 상당한 관심을 가지고 있었는데,7) 병리학에 대해 기술한 다음 글에서는 분석과 종합 간의 차이를 이끌어낼 수 있다([11]).

(혈관이나 림프관의) 중막, 또는 기관들과 그들의 작동 모드를 탐구할 때 사용되는 방법은 정말 분석적이다; 따라서 우리는 부분에 대한 지식으로부터 몸 전체에 대한 지식을 얻게 된다. 이것을 마친 후에야 우리는 다시 종합으로 되돌아가게 되는데, 이는 모든 것을 하나로 다시 조정하는 것으로, 주요 근육과 순환 기관, 그리고 그들 간의 연결과 모든 생명체의 유기적 조직에 대한 상세한 기술을 말한다.

라이프니츠에게 있어 종합은 선험적으로 존재하는 그 무엇이고, 분석은 경험적 지식을 획득하기 위한 하나의 방법에 해당한다. 일반적으로 지식들 간에는 상호교환이 이루어지게 되는데, 분석과 종합은 이러한 상호교환에 있어 결정적인 역할을 한다. 이 둘은 매우 밀접한 관계를 이루고 있는데, 분석은 주로 경험을 통한 지식의 발견에 아이디어를 제공하는 한편 종합은 발견 이전에 존재하는 무엇을 설명하는데 필요하기 때문이다. 라이프니츠는 병리학에서 부분 기관에 대한 분석으로부터 몸 전체에 대한 지식을 이끌어낼 수 있듯이, 이와 마찬가지로 논리나 수학에서도 분석은 이러한 학문에서의 발견의 아이디어를 이끌어내는 중요한 사고 과정으로 보고 있다. 그리고 분석 이후 일어나는 종합은 이러한 사실들의 조정을 통해 보다 자세한 부분들을 기술하게 된다고 보았다. Pasini(1997)에 따르면, 분석과 종합에서의 이런 식의 구분은 데카르트 이후 라이프니츠 시대에 이르기까지 상식적으로 통했던 것으로, 특히 라이프니츠는 병리학을 비롯하여 모든 학문에서 이러한 구분을 적용하였음을 알 수 있다.

또한 라이프니츠는 "질병은 그 증상에 근거하여 분석이 가능하며 이 경우에만 진료될 수 있거나 또는 그 원인에 근거하여 종합적인 처방이 내려질 수 있다"고 하였다. 여기서 종합적인 처방은 증상의 분석 이후에만 가능하다. 라이프니츠는 이러한 병리학에서의 논의를 수학에 적용해서 다음과 같이 말한다([11]).

병리학적으로 볼 때 (분석의 결과) 종합으로서의 일반적인 치료 방법이 있듯이, 수

7) 라이프니츠에게 있어 '분석'은 매우 기본적인 유형의 논리적 과정인 동시에 이것은 명백한 논리적 추론 과정을 거쳐 어떤 명제를 결정하는 추론의 절차에 해당한다. 라이프니츠의 여러 글에서 분석에 대한 다양한 인식론적 개념을 발견할 수 있으며, 특히 과학이나 의학적 방법을 다루는 질문에 있어서 분석에 대한 그의 생각들을 읽을 수 있다.

학의 경우에 대수는 기하에 대해 그와 같은 역할을 한다.

여기서 우리는 라이프니치가 수학을 바라보면서 병리학에서 논의한 분석과 종합을 동일한 선상에서 다루고 있음을 알 수 있는데, 특히 데카르트가 문자기호를 사용한 해석기하를 통해 기하를 보았듯이 대수를 기하에 대한 일반적인 분석의 방법으로 그 역할을 동일시하고 있다. 이는 그 당시 수학자들에게 수학을 연구하는 과정에서 문자기호를 사용한 분석이 중요한 역할을 했던 것과 결코 무관하지 않은 것으로, 이는 나아가 그의 무한소 미적분학의 발견에 있어서도 결정적인 영향을 미쳤음을 미루어 짐작할 수 있다.8)

이제 지금까지의 논의를 토대로 하여 수학과 관련해서 라이프니츠의 생각을 살펴보자. 라이프니츠에게 있어 각 학문에서 이를 연구하는 방법은 각 학문에 적합한 도구를 만들어내는 것이었는데, 지금까지 살펴본 결과 그에게 있어 가장 중요한 도구는 분석적 아이디어였다. 그는 수학을 이성적 진리의 전형적인 집합체로 보았으며, 유한한 분석의 과정을 통해 증명가능성이 확보된 학문으로 보았다. 그리고 그의 경우 수학적 분석법으로서 수학을 하는 도구는 각각의 특징에 근거한 알고리즘을 만들어내는 것이었다. 곧, 라이프니츠는 수학에서의 분석법의 본질을 문자 기호의 연속적인 연산의 과정으로 본 것이다. 이는 기호 연산체계 곧, 알고리즘이 수학의 전반적인 이해를 위해서 그리고 현재 존재하는 지식들 간의 조직, 나아가 새로운 지식을 창조하고 발견하는데 있어서 이들 사이의 연결이 가능하며 동시에 이를 통한 분석이 가능하기 때문이다. 다음의 라이프니츠의 말은 그가 수학에서 분석과 계산술의 역할을 얼마나 중요한 것으로 보고 있는가를 보여준다([11]).

나는 수학자들의 발견의 기술 또는 분석을 개선하는 즐거움을 안 이후로, 어떤 새로운 시각을 가지기 시작하였다, 다시 말해 모든 인간의 사고를 일련의 계산술로 축소하는 것인데, 이것은 경험으로부터 가능한 곧, 주어지거나 알고 있는 것으로부터 모든 가능한 진리를 발견하는데 이용될 수 있다.

따라서 그에게 있어 미적분학은 기호의 분석 알고리즘 곧, 양을 다루면서 동시에 어떤 추론을 가능하게 하는 문자 기호들에 의해 수행되는 연산으로 이해되었다. 다시 말해, 이성적 진리이자 필연적 명제의 전형인 수학에서 그가 항상 먼저 실행한 것은 분석적 아이디어였으며, 이를 위한 그의 도구는 문자 기호를 적절하게 사용한 알고리즘의 개발에 있었음을 알 수 있다.

8) 라이프니츠의 무한소 미적분학은 기하적, 대수적인 이론에서 출발하는데, 곡선의 접선을 긋는 문제 또는 극대, 극소를 고찰하는 수단으로 미분법을 발견했고 곡선의 기울기가 주어질 때 그 곡선을 구하여 구적문제를 해결하는 방법으로 구적법을 발견하였다([2]).

다음은 라이프니츠가 수학의 어원인 mathesis와 함께 분석과 종합의 배열, 그리고 발명의 기술에 대한 그의 생각을 요약한 것이다([11]). 그는 형식(form)과 양(quantity)이 보편수학을 구성하는 두 가지 요소로 보았으며, 그가 밝히고자 했던 수학적 발명(또는 발견)은 이러한 형식과 양들 간의 관계에서 만들어지는 종합(또는 조합)과 분석에 의한 과정임을 보여주고 있다. 여기서 특히 분석을 뜻하는 Analysi를 두 차례 모두 대문자로 표기함으로써 종합(synthesi) 또는 조합(combinatoria)을 표기한 것과 차이를 보이고 있는데, 이는 라이프니츠가 발명(발견)의 기술로서의 수학을 말하고자 할 때 앞서 보았듯이 분석의 역할을 강조한 것과 연결해서 생각해볼 수 있다.

10. 발명(inveniendi)의 기술에 관하여
11. 종합(synthesi) 또는 조합(combinatoria)의 기술에 관하여
12. 분석(Analysi)에 관하여
13. 특별히 조합(combinatoria)에 관하여, 조합은 과학적 형식에 있어서 질적으로 유사하고 그렇지 않은 차이를 만들어낸다
14. 특별히 분석(Analysi)에 관하여, 분석은 과학적 양에 있어서 크고 작은 차이를 만들어낸다
15. 일반적으로 수학(mathesis)은 이러한 두 가지 구성요소로부터 비롯된다.

4. 결론

수학에는 답을 구하는 문제와 증명하는 문제가 있는데, 어떤 경우건 그 풀이방법을 발견하는 과정을 거쳐야만 한다. 이러한 전형적인 풀이방법을 발견하려는 노력은 수학사에서 그리스 시대까지 거슬러 올라가게 된다. 분석법은 수학적 발견술 가운데 가장 강력하면서 가장 오래 전부터 사용되어 온 방법이다. 피타고라스(Pythagoras, 582-497, B.C.) 학파에서부터 플라톤(Palto, 427-347 B.C.), 파푸스를 거치면서 분석법에 대한 체계적인 기틀이 마련되었으며, 이러한 분석법의 아이디어는 비에트 이후 근대수학에서 데카르트와 라이프니츠, 베르누이(Bernoulli, 1781-1848) 등에게서 오늘날의 수학을 발견하는 효과적인 기술로 사용되었다. 그리고 오늘날 폴리아를 비롯하여 라카토스 등의 수학교육적 논의에서 보다 그 중요성이 강조되고 있다.

본 연구는 수학에서 이루어진 이러한 분석법의 역사에서 한 축을 형성하고 있는 라이프니츠에 주목하여 라이프니츠의 분석적 아이디어가 그의 수학에서 어떤 형태로 연결되고 있는지를 살펴보기 위한 선행 연구로, 그의 철학과 논리학 등에서 분석의 아이디어가 어떠한 위치에서 역할하고 있는지를 살펴보기 위한 것이다.

라이프니츠는 분석과 종합의 역할과 관련하여 지식을 발견하거나 확장하기 위해서

는 이러한 두 가지 형태의 사고가 상호보완적으로 결합되는 것이 무엇보다 중요하다고 말한다. 그에 따르면, 분석은 주어진 과제에서 거기에 포함된 개념을 보다 단순한 개념들로 분해하거나 또는 이후의 종합을 위해 필요한 요소들을 하나하나 결정해야 할 때 요구된다. 이에 비해 종합은 분석의 결과 드러난 여러 가지 사고들의 결합으로, 이것은 분석의 결과에 따라 다소 임의적일 수 있으나 새로운 지식을 고안하기 위해서 분석과 함께 반드시 거쳐야 하는 절차이다. 이에 라이프니츠는 '인간 사고의 알파벳'으로 분석과 종합을 모든 학문에서 다양한 용도로 사용하고 있다.

특히 그는 발견의 사고 과정에서 분석의 역할을 중요시하는데, 분석은 문제를 판단하거나 그리고 무언가 새로운 사실을 발명하는데 있어서 가장 중요하다고 말하였다. 그에 따르면, 철학에서의 변증법이나 논리학에서의 주장의 분석, 진리의 분석에 있어서 가장 중요한 것은 분석이며, 특히 보편수학에서 강조한 분석은 발명과 발견의 예술로, 발명과 발견을 이끌어내는 비밀 장치라고 말하였다([11]).

이처럼 라이프니츠는 그의 철학 전반에서 그리고 논리학을 비롯한 여러 학문에서 분석적 아이디어의 역할을 강조하였다. 이러한 그의 분석에 대한 믿음은 이성적 진리(필연적 명제)의 집합체인 수학에서도 문자 기호를 사용한 대수학과 이것을 응용한 미적분학의 발견에서 앞서 논의한 분석적 아이디어로 나타났을 것이다. 이에 본 연구에 이어지는 후속연구를 통해 라이프니츠의 분석적 아이디어가 그의 수학적 업적에서 어떤 형태로 구현되고 있는지에 대한 논의가 보다 구체화되기를 기대해본다.

감사의 글 논문 심사에 참여해주신 분들께 감사드립니다. 논문에서의 전체적인 흐름과 자세한 부분까지 검토하여 주신 심사자에게 감사의 마음을 전하며, 이로 인해 논문의 전체적인 완성도를 높일 수 있었습니다. 다시 한번 심사에 수고해주신 분들께 감사드립니다.

참고 문헌

1. 강문봉, 분석법에 관한 고찰, 대한수학교육학회 논문집 제2권 제2호, 81-93(1992).
2. 권지영, 라이프니츠의 미적분한 발견원리에 대한 고찰, 순천대학교 석사학위 논문, 2006.
3. 우정호, 학교수학의 교육적 기초, 서울대학교 출판부, 1999.
4. 우정호, 수학 학습-지도 원리와 방법, 서울대학교 출판부, 2000.
5. 하병학 인간학과 수학-'보편수학' 그리고 '수학하는 인간존재'를 중심으로-, 인간연구 제7호, 75-94(2004).
6. 하병학, 현대논리학적 단초들을 중심으로 한 라이프니츠 논리학의 이해, 논리연구 제2권 제1호, 86-113 (1998).
7. 한인기, 수학교육에서 종합-분석적 활동의 본질 및 체계화에 관한 연구, 한국수학교육학회 수학교육 논문집 제11집, 235-250(2001).
8. 한인기, 분석적 활동의 활성화를 위한 작도 문제의 활용, 한국수학교육학회수학교육 논문집 제10집, 189-199(2000).
9. 한인기, 작도 문제의 해결 방법, 한국수학교육학회 수학교육 논문집 제9집, 153-164(1999).
10. Copleston, F., A History of Philosophy-Descartes to Leibniz-, 김성호 역(1994), 합리론: 데카르트에서 라이프니츠까지, 서광사, 1961.
11. Pasini, E., *Arcanum Artis Inveniendi: Leibniz and Analysis*. In M. Otte & M. Panza(Eds.), Analysis and Synthesis in Mathematics-History and Philosophy-(pp. 35-46), Kluwer Academic Publishers, 1997.
12. Polya, G., *How to Solve It* (2nd ed.), Princeton: Princeton University Press, 1957.

A Study on Leibniz's Ideas about Analysis

Busan National University of Education **Sung Joon Kim**

This paper aims to review Leibniz's analytic ideas in his philosophy, logics, and mathematics. History of analysis in mathematics ascend its origin to Greek period. Analysis was used to prove geometrical theorems since Pythagoras. Pappus took foundation in analysis more systematically. Descartes tried to find the value of analysis as a heuristics and found analytic geometry. And Descartes and Leibniz thought that analysis was played most important role in investigating studies and inventing new truths including mathematics. Among these discussions about analysis, this paper investigate Leibniz's analysis focusing to his ideas over the whole of his studies.

Key words: Analysis, Heuristics, Descartes, Leibniz's analytic ideas

2000 Mathematics Subject Classfication: 01A20, 01A45, 01A50, 97-03

ZDM Classification: A30

논문 접수: 2006년 9월 심사 완료: 2006년 11월