한국수학사학회지 제19권 제4호(2006년 11월), 31-62

수학과 교수-학습에서 수학사 활용의 교육적 함의: 수월성 교육을 중심으로 한 미적분 지도의 예*

인하대학교 수학교육과 한경혜
stern251@hanmail.net

본 논문에서는 먼저 수학사를 수업에 활용하고자 하는 이론적 근거를 여러 가지 교육적 측면에서 고찰한다. 아울러 수학적 인식에 관한 개인적인 발달과 역사적 발달 사이의 관계를 토대로 수학사 활용의 교육적 유용성을 가장 강력하게 이론적으로 뒷받침하는 역사 발생 원리의 생성, 전개 과정 및 그 의의와 한계 등을 논한다. 또한 여러 가지 측면에서 이론적 근거가 마련되고 있는 수학사 활용에 대한 긍정적인 입장에서 구체적인 방안을 기준과 함께 제시하였다. 다음으로 지금까지 논의된 수학 영재 프로그램 개발의 방향과 실제를 개관하고 수학사를 접목하는 것에 대한 근거를 밝혔다. 마지막으로 수학사 활용의 예를 미분개념의 이해를 중심으로 제시하였다.

주제어 : 수학사, 수학교육, 수학사 활용, 역사발생원리, 새수학, 심리발생원리, 영재교육, 발생원리, 미적분 지도

0. 서론

수학사를 교육적 측면에서 고찰하여 이를 수업에 활용하고자 하는 경향이 강해진 것은 1970년대 중반부터였다. 그 배경으로는 우선 1960년대를 걸쳐 풍미했지만 성공을 거두지 못한 이른바 '새 수학'의 기저에 깔린 수학에 대한 관점에 대한 비판에서 비롯하여 역사적 관점에서 수학을 바라보아야 한다는 입장이 대두된 것을 들 수 있다. 또한 1970년대 이래 새롭게 이루어진 학문이론의 발전이 수학교육에 대한 관점에 영향을 미쳤다는 점이다. 그 결과 왜 수학사를 도입하는가에 대한 논의가 다양한 측면에서 전개되었다.

수학의 역사에서 많은 경우 새로운 지식의 창출은 집단적 노력의 결과라기보다는 수학자 개인이 지닌 천재성에 기인하는 경우가 많았다. 말하자면 모든 학습자가 동일한 과정을 거쳐 일정 수준의 지식을 습득하게 되지는 않는다는 것으로, 특히 현상적

* 이 논문은 2004년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음. (KRF-2004-037-C00001)

으로는 개인 간의 격차가 현저하게 드러나는 수학 분야에서 능력이 발휘되어 온 역사적 과정을 되밟는 식의 지도가 보편적으로 유효하다고 할 수는 없다. 역사-발생 원리의 대표적 주창자로 알려져 있는 Freudenthal 역시 수학사에 대한 지식을 모든 학생들에게 요구할 수는 없음을 강조했다([22]). 즉 역사 발생 원리도 일종의 학문적 가설에 해당하므로 교수학습 원리로서 그 적용 결과에 대한 보장이 없다는 것이며 다른 한편으로는 지적인 능력이 뛰어난 수학자들의 사고 과정이나 방식이 일반적인 사고과정과는 같지 않은 경우가 많으므로 수학적 원리의 발생과정 또한 수학적 사고 능력이 뛰어난 학생들을 위한 교육에 활용되어야 한다고 생각할 수 있다. 이는 특히 근래 강조되고 있는 수월성 교육을 수학 교과목에서 실현할 수 있는 구체적 방안이기도 하다. 수월성 교육의 중심 의미는 '탁월한 능력을 지닌 학생들로 하여금 다양한 활동 속에서 가장 최선의 상태에 이르게 하고, 올바른 방향으로 성장할 수 있도록 도와주고 그런 경험의 과정을 적극적으로 참여토록 이끌어 주는 것'이다.

그런데 근래에 정부 차원에서 주도적으로 제기해 온 수월성 교육의 개념이나 방안에 대해서는 이견의 여지가 많다. 가장 원론적인 것으로는 현재 상위 수준의 소수 비율을 점하는 학생들만 최선의 교육을 받을 권리가 있느냐 하는 문제제기로부터 출발할 수 있을 것이다. 따라서 본 연구의 제목에서 제시된 '수월성'이란 제대로 선발된 탁월한 능력을 가진 학생들을 적절한 방법으로 선발하여 바람직한 수학교육을 실시한다는 한정된 의미로 사용하도록 한다. 그리고 그 중에서도 현실적으로 다양한 형태로 시행되고 있는 영재교육과 관련하여 논의를 전개한다.[1)]

1. 수학사 활용에 관한 논의의 전개

머리말에서 언급한 것처럼 1970년대 중반부터 활발하게 전개되기 시작한 수학사 활용의 의미는 크게 세 가지 측면에서 논의되었다.

첫째, 학문 이론적 측면에서 보자면 수학교육의 근본적인 목표는 수학에 관한 균형잡힌 상(像)에 도달하는 것이다. 즉 공리, 결론, 증명 등으로 이루어진 형식적 체계와 동일시되는 순전히 형식적인 수학에 대한 상을 바로잡아 균형을 이루도록 해야 한다는 것이다.

이를 위하여 수학 수업에 수학사를 활용해야 한다는 입장에서는 수학을 이론의 발전이나 변화라는 역사적 현상으로 받아들여야 한다고 주장한다. 그리고 수학은 인간 간의 관계를 토대로 한 현상으로 이해해야 한다고 한다. 예컨대 Imre Lakatos(1922-

---

1) 국가적 차원에서는 1999년에 국회를 통과하고 2000년 1월에 고시된 영재교육진흥법의 발효됨에 따라 2002년 3월부터 전국 초·중등학생을 대상으로 영재교육이 법적, 제도적 뒷받침을 받고 실시되고 있다. 구체적으로는 대학 부설 영재교육원 등을 통하여 실현하고 있다고 볼 수 있다.

1974) 의 <Proofs and Refutation>(1976)에 따르면 증명은 시간을 초월해서 절대적으로 유효한 것이 아니라 각각의 공동체가 이를 어떻게 수용하는가에 따라 달라진다는 것으로 사회적 성격을 가진다고 한다. 이러한 학문 이론적 측면은 무엇보다도 교사들에게도 중요하다고 할 수 있다([28]). 왜냐하면 수학에 대하여 적절한 상을 가지지 않은 상태에서 그것을 알린다는 것은 어려운 일이기 때문이다.

둘째로 교육 이론적 측면에서 보자면 우선 수학사에 대한 고찰은 수학뿐만이 아니라 문화적 배경에 대한 교육에도 일조한다고 볼 수 있다. Flegg는 "문화적인 배경은 왜 특정시대에 특정한 방향으로 수학적 개념이 발달했는지를 보여준다. 역으로 수학사에 대한 연구는 일반 역사가들이 통상 잊어버리는 문화적 배경이 되는 사실을 조명한다"([20, p.68])면서 "수학은 우리 문화를 구성하는 데서 빠뜨릴 수 없는 부분이며 수학사를 가르치지 않으면 수학이 무엇인지에 대하여 부정확한 개념을 심어줄 수" 있으므로 "수학사는 정치사, 과학사, 예술사 등처럼 반드시 가르쳐야 한다"고 주장하였다([20, p.307]).

이는 수학사가 그 자체로 교육의 요소가 될 수도 있다는 것을 뜻하며 통상 이루어지는 형식적이고 교재를 중심으로 한 수학 수업과는 달리 역사 자체를 수업의 대상으로 할 수도 있음을 강조하는 것이다. 그런 한편 수학사는 역사 수업의 긍정적 기능을 담당하게 될 수도 있다. Heymann에 따르면 "문화적 연관성/ 연속성"의 견지에서 역사적 지식을 얻게 된다고 한다([25]). 말하자면 수학과 "나머지 세상"과의 다양한 관계를 통찰할 수 있게 한다는 것이다. 이러한 점에서 수학사는 좋은 역사 수업과 비슷한 교육 목표를 따르기도 한다. 또한 수학은 우리 문화의 구성 요소이며, 역사적 고찰 없이는 파악할 수 없는 문화적 현상이라는 것으로 Scriba는 다음과 같이 주장하였다:

"수학사를 수학 수업-중등 혹은 고등 교육의-을 위해 활용할 수 있는지를 묻는 것은 잘못된 것이다. 오히려 수학사 없는 수학을 생각할 수 있는가'라고 질문을 던져야 할 것이다. 모든 것은 다음의 대답에서 비롯된다: 역사 없는 수학은 결코 있을 수 없다." ([41, p.113])

"수학은 역사적 고찰 없이는 파악할 수 없는 문화적 현상이다."([41, p.117])

이처럼 수학사를 통하여 수업 중에 수학 교과목의 바탕에 깔려 있는 학문의 적절한 상을 전달하는 데 기여한다고 하는 학문 이론적 측면은 곧바로 교육적 가치로 전환된다. 그런데 이러한 기능은 사실상 중등교육의 상위 단계에서 특히 주요한 역할을 하게 된다고 할 수 있다.

셋째로 교수 학습 방법론적 측면에서 수학사 도입의 의의를 논할 수 있다. 이 측면은 구체적인 수학 수업을 겨냥하는 것으로 수업에 역사적 요소를 도입함으로써 여러 가지 긍정적인 효과를 거둘 수 있다는 점을 분명히 한다. 무엇보다 역사적 고찰은 수학의 이해를 돕는 수단으로 작용한다. 말하자면 "보편화된 개념에 대해 구체적이고도 세세하게 그 역사적 과정을 추적하는 것은 일반화와 추상화의 본질과 역할을 이해하

도록 가르치는 최선의 길"([27, p.61])이라 할 수 있다. 그리고 통상적인 수업과는 달리 수학을 역동적 과정으로서 인식할 수 있게 한다. "전통적인 수학교수는 역사적 과정이 끝나는 지점에서 시작함으로써 그 분야를 이해하는 게 어려워"지는 것이다([38, p.306]). Boyer는 Cicero를 인용하면서 "네가 태어나기 전에 어떤 일이 일어났는지를 알 수 없다는 것은 영원히 어린아이로 남아있다는 것을 뜻한다"([12, p.24])고 갈파하였다.

그밖에 구체적으로 우선 수업에 활용할 수 있는 흥미로운 문제들을 역사적 출처에서 찾아낼 수 있을 뿐 아니라 통상 사용하는 표준적인 교수 방법 외에도 다양한 수업 주제를 한층 더 심도 있게 다룰 수 있을 뿐 아니라 역사적인 맥락을 보여줌으로써 동기유발을 촉진할 수 있다. 교사의 입장에서 보자면 수학사에 대한 이해가 넓어진다면 수학을 조직하고 표현하는 다양한 방법을 마련하기 위한 수업의 적당한 모델을 찾아낼 수 도 있다.

그렇지만 수학사의 활용에 대하여 긍정적인 시각만 존재하는 것은 아니다. 우선 수학사의 활용에 대하여 상당히 긍정적인 입장을 표명한 Freudenthal 역시 수학사에 대한 지식을 모든 학생들에게 요구할 수는 없다는 견해를 나타내어 하나의 선택 가능한 방안으로 간주했다. 그는 자신의 생각을 다음과 같이 피력하기도 했다:

"나는 인간만이 자기 종족의 과거, 지구, 세계를 섬세하게 구분하여 파악할 수 있다고 생각한다..., 수학사와 그 이웃 영역의 효용성이 바로 여기에 있다고 보는 것이다: 수학이 아니라 역사에 도움이 되는 것이고, 수학적 의미가 아니라 역사적 의미를 부각시키는 것이다. 그렇지만 수학에도 약간 도움이 되긴 할 것이다."([22, p.77])

이와는 약간 다른 맥락에서 Spalt는 우려를 표명했다. 수학의 역사를 다룬 다양한 출판물에서 제시된 목표는 어느 정도는 타당하고 그럴 만한 가치가 있지만 그로 인해서 수학의 역사에 대한 과소평가, 왜곡 또는 학문적 의미에서 수학사의 서술이 가볍게 다루어지지는 않을까 하는 생각을 가지고 있었던 것이다([45]). 그리하여

"어떤 특정 분야에서 개인의 지적 발달은 이 분야의 역사적 전개과정과 비슷하게 진행된다는 전제 위에서 만들어지는 교육학적 개념을 설정하려는 시도는 좌초한 것으로 간주해야 한다."([37, p.174])

는 주장도 제기되는가 하면

"역사적 발전 과정을 배우고 난 후에 학생들은 수학 자체에 더욱 소원해질 수 있다" ([34, p.176])

고 피력한 학자들도 있다. 이밖에 이론적으로는 타당하고 유용하다고 인정하면서도 그 실제 적용가능성에 대해서는 다소 회의적인 시각도 존재한다. 즉 교과서 집필자와

교사의 능력이라는 측면에서 볼 때 현실적으로 어렵기도 하며 비록 초등화된 소박한 방법이긴 하지만 전통적인 연역적 전개 양식은 우아하고 체계적이며 명확하고 경제적인 교재 구성 방식을 가진다고 할 수 있다. 이에 반해 수학사를 활용한 전개 과정은 자칫 지루해지기 쉬우며 정확성과 우아함이 결여되기 쉽고 일반적인 이론적 체계화에 이르기가 어려울 뿐만 아니라 교재구성이 곤란한 경우가 많다는 점을 들기도 한다.([6, p.66])

2. 역사 발생 원리에 따른 수학교육이론에 관한 비판적 검토

서론에서 논의한 여러 가지 측면을 아우르면서 수학적 인식의 획득에 관한 개인적인 발달과 역사적 발달 사이의 관계를 수학사 활용의 교육적 유용성을 가장 강력하게 이론적으로 뒷받침하는 것은 역사 발생 원리이다. 여기서는 발생 원리의 생성, 전개 과정 및 그 의의와 한계 등을 논한다.

1) 발생 원리의 생성과 발전

수학교육에서 발생적 원리란 수학을 공리적으로 전개된 완성된 것으로 가르치는 형식주의에 근거한 수학 교육의 결함을 극복하기 위하여 제기된 교수학적 원리로서, 발달의 개념을 수학교육학의 중심에 놓고 수학의 학습-지도의 문제를 발달에 대한 어떤 해석에 따라 구상하려는 것이다. 즉 수학을 발생된 것으로 파악하고 그 '발생'의 과정을 학습과정에서 재현하려는 것이다.

그 생성 배경으로는 무엇보다도 Euclid 기하학의 종합적 연역적 방법에 대한 강력한 비판을 들 수 있다. 구체적으로 보자면 Arnauld의 <새 기하학원론>Nouveaux elements de geometrie(1667)에서 구체물의 참조를 허용하고 초등기하의 개념과 정리의 순서를 자연스럽게 재조정한 새로운 접근법과 증명을 제시한 것이 그 원조라 할 수 있다. 즉 "스콜라적이고 형식적인 수업 방식이 아닌 자연스러운 수업 방법으로서" 제기되었던 것이다([44, p.18]). 그밖에 Ramus, Bacon, Descartes 등도 Euclid 기하학의 근거한 접근법을 강력히 비판, 대안적인 해석과 접근법으로 발생적 관점을 주장하기도 하였다([6]).

그 후 조금 더 진전된 이론적 틀에 입각한 일반적인 교수학적 구상으로 '역사-발생적 방법'이 등장한다. 즉 19세기에 이르러 Lindner는 "소재를 그 자연스러운 순서에 따라 다루어 간단한 것으로부터 합성된 것으로 원인으로부터 결과에 보다 작은 것으로부터 보다 큰 것으로 쉬운 것에서 어려운 것으로 나아가되, 하나하나의 동인을 아주 주의해서 서로 결합하는 것"을 발생적 방법이라 정의하고 발생된 순서에 따라 수학을 제일 먼저 지도해야 한다고 주장하였다([44, p.62]).

이처럼 인식의 발달과정에 근거하여 제기된 발생원리는 19세기 후반에 들어서 생물

학적 발달이론과 결합하면서 변화를 일으키게 된다. 진화론을 주창한 Darwin의 영향을 받은 E. Haeckel이 형식화한 '재현의 법칙', 즉 모든 개체는 발달 과정에서 역사적 과정에서 보였던 계통 발생을 재현한다는 것을 인식의 발생 원리에도 적용하였으며 이를 이른바 역사발생원리라 하게 된 것이다. 발생적 원리는 19세기 후반에 형성된 일반적인 교수학의 기본원리로서 널리 인정되기는 하였으나 실제로 당시 중등교육의 현장에서는 광범하게 채택되지 않다가 Felix Klein(1849-1925)이 주창한 수학 교육 개혁의 움직임과과 더불어 새로운 자각이 일어나게 되었다[2]. Klein은 역사 발생 원리에 근거하여 수학사 활용을 한층 더 강화된 형태로 요구하였다. 그는 자신의 견해를 다음과 같이 피력하였다.

"오늘날 이 분야에서 일반적으로 우리가 다루고 있는 지도 방법은 아마도 '직관적이고 발생적'이란 표어를 통하여 가장 잘 특징지어질 것이다. 즉, 전체적인 지도체계는 잘 알려진 직관적인 사물을 바탕으로 아주 점진적으로 아래에서부터 구성될 것이다. 이 점에서 대부분 대학에서 관례가 되어 있는 '논리적이고 체계적인' 지도와 매우 두드러지게 대조적인 점이 있다"([28, p.6])

"물론 우리는 수학교육학적 입장에서 아동에게 너무 일찍 그러한 추상적이고 어려운 것을 제시한다는 인상을 주지 않도록 해야 한다. 이 점에 대한 나의 견해를 정확히 규정하기 위하여 생물학적 기본법칙을 인용하고자 한다. 그에 따르면 개체는 종족의 전 발달단계를 단축된 순서로 거치면서 발달한다. 이러한 생각은 오늘날 모든 사람들의 교양이 되어 있다. 나는 이 법칙은 모든 수업과 마찬가지로 수학 수업 역시 반드시 따라야 할 일반 법칙이라고 본다. 즉 전 인류가 원시적 상태에서 높은 인식 수준으로 비약하게 되는 것과 똑같이 수학 수업 역시 소년기의 자연스러운 요구에 부응하여 점차 더 높은 내용으로 나아가서 결국 추상적인 공식화에까지 이르도록 해야 하는 것이다."([28, p.289])

다시 또 다른 저명한 수학자 Henri Poincaré(1854-1912)가 역사-발생 원리를 주장하였다.

"어떤 동물의 태아 발달은 지질학적 시대의 그의 선조의 전체 역사를 매우 짧은 기간 동안에 경과한다고 동물학자들은 주장했다. 인간의 정신 발달에서도 마찬가지인 듯하다. 교육자는 아동을 그의 선조가 통과한 모든 단계를 매우 빨리 그렇지만 어떤 단계도 소실되지 않게 인도해야 한다. 이러한 이유에서 학문의 역사는 우리의 으뜸가는 안내자이어야 한다."(Poincaré, H, 재인용 [6, p.280])

역사발생 원리의 또 다른 주창자는 Otto Töplitz (1881-1941)였다. 그의 관심은 수

2) 이러한 개혁의 시도는 독일의 새로운 교육과정 Meraner Lehrplan의 제정으로 대표된다.

학 연구 외에 수학의 대중화에 쏠려 있었다. 그는 대학 강의에서 역시 역사발생원리를 적용하려고 시도하였다. Töplitz 는 사후에 발간된 "미적분개론"의 서문에서도 다음과 같이 밝히고 있다:

"오늘날 우리가 규범적인 필수 요목으로 간주하여 가르치고 있는 미적분 계산의 이 모든 기본적인 내용; [...] 어디서도 다음과 같은 의문은 제기되지 않는다: 왜 그렇게 하는가? 어떻게 해서 그렇게 되었는가? 이 모든 규범이 한때는 절실한 탐구의 목표였으며 창안되던 당시에는 아주 흥미로운 취급 대상이었음에 틀림없다. 만일 우리가 이들 개념의 근원으로 다시 돌아간다면 시간이 흐르면서 쌓인 먼지가 사라지고 다시 생명력 넘치는 모습으로 우리 앞에 나타날 것이다."([52, p.v])

Klein과 Poincaré가 언급한 역사발생적 원리는 사실 하나의 가설로 제기된 것이며 이를 실제로 수업에 적용하기 위해서는 구체적인 방법론에 대한 모색이 필요했다. 분명한 것은 '발생적'이라는 것과 '역사적'이라는 것이 결코 동의어는 아니라는 사실이다. 예를 들어 기본적인 사칙연산에 관한 교수-학습이 역사적 사실을 토대로 이루어져서는 안 된다. 그렇지만 중등 교육과정의 높은 단계에서는 수업의 한 국면에서 다루는 개념의 도입이나 동기유발을 위하여 수학사를 유용하게 사용할 수 있다. 물론 역사적인 발전과정을 고스란히 재현하는 방식으로 수업을 진행할 수 없는 게 명백한 영역이 있긴 하다. 그런 영역에서조차 개념의 발생과정은 교사들에게 의미 있는 배경지식을 제공함으로써 적어도 그 개념 또는 분야의 가치나 의미를 파악할 수 있게 한다. 이처럼 수학교육에 대하여 수학사가 가지는 두 가지 의미에 대해서는 Töplitz 가 다음과 같이 지적하였다[3]:

"학생들로 하여금 희곡화를 통하여 실연해봄으로써 문제설정, 개념 및 사실을 발견하게 하거나-나는 이것을 직접적인 발생적 방법이라 부른다 - 교사 자신이 역사적인 분석을 통하여 각 개념이 원래 의미와 실질적인 핵심이 무엇인지를 알아내고 그로부터 이 개념을 가르치기 위한 결론을 끌어내는 것이다. 이는 역사와 그 자체로 관계를 가지는 것은 아니며 간접적인 발생적 방법인 것이다."([51, p.92])

"나는 역사로부터 단지 입증된 내용에 대한 동기만을 취하여 직, 간접으로 이용하려 한다.".([51, p.94])

그렇지만 당시 생물학적 발생의 기본원리를 개인의 학습과정에 직접 적용하는 것에 대해서는 회의적인 반응 역시 적지 않았다. 실제로 학생으로 하여금 학문의 역사에서 보이는 모든 우회도로와 막힌 길을 답습해 보게 하는 것은 어리석어 보이기 때문이다.

3) Töplitz 는 실제로 수학교사 교육을 위한 역사-발생 원리에 따른 수학교재를 미적분 지도과정을 통하여 처음으로 구상하였다.

2) 역사-발생원리의 적용

Klein과 Töplitz 는 왜 역사발생원리의 적용을 그토록 강력하게 주장했을까라는 의문이 제기된다. 사실상 중등교육과정의 기하 영역 중 많은 내용이 Euclid의 <원론>을 고스란히 담고 있는데도 말이다. 여기서 역사적 원전 자체에 관한 연구와 발생 원리의 배경이 되는 생각의 차이를 발견할 수 있다. 예를 들어 유클리드의 <원론>에 실려 있는 피타고라스의 정리의 증명과정이 발생적인가라는 질문과 관련하여 먼저 유클리드의 증명에 대하여 가장 오래된 비판가인 Arthur Schopenhauer(1788-1860)는 다음과 같이 말하였다([54, p.8], 재인용):

"피타고라스의 정리는 우리에게 직각삼각형의 신비한 본성을 가르쳐 준다: 유클리드의 완강하고 교활하기까지 한 증명 때문에 우리는 왜 그런지를 놓치게 되고 ... 이미 잘 알려진 간단한 그림은 한 눈에 그러한 증명보다 더 사실 관계에 대한 통찰에 이르도록 하고 직각삼각형의 속성과 함께 그 필연성을 충분히 납득하게 한다. ...빗변을 제외한 두 변의 길이가 서로 다를 때에도 역시 직관적인 이해가 가능해야 한다[...] 그러므로 한눈에 필연적으로 그렇게 되는지를 파악하고 나서 나중에 구성하는 것이므로: 필연성을 깨닫기 위해서는 기하학적 진리를 최초로 발견한 사람의 사고과정을 분석하는 것이 필요하다"([54, p.8])

Schopenhauer의 비판은 중요한 점을 일깨운다. 곧 역사적 원전은 그 자체가 수학적 인식이 어떻게 성립했는지에 관한 통찰을 주지는 않는다는 점이다. 이 점은 Töplitz 역시 간과했던 것으로 그는 발생 원리의 적용을 다음과 같이 주장하기도 했다.

"역사 자체가 중심이 아니라 문제, 사실, 증명의 발생 그리고 이러한 발생 과정에서 결정적인 전환점이 무엇인지가 중심인 것이다." ([51, p.94])"

Martin Wagenschein은 Töplitz에 찬동하여 "발생은 역사가 아니다!"라는 기치를 내걸고 역사-발생원리가 수학사를 다루면서도 역사 자체를 위한 것이 아니라 수학적 문제, 개념, 이론의 성립에 관한 통찰을 말하는 것임을 분명히 하였다([56]). 이러한 성립 과정이 밝혀질 때 비로소 역사적 원전을 수업에 투입하는 것이 성공적인 결과를 보장하게 된다는 것이다. 그런데 일차 자료를 직접 활용하는 것 말고도 역사-발생 원리를 적용하여 역사적 사실을 변용하여 다양하게 활용할 수 있다. 즉 수학적 인식에 이르는 유사한 상황에 처해 있는 것으로 가정하여 수학적 개념 등을 찾아내는 시도를 하는 것이다. 예컨대 그리스인 들이 어떻게 피타고라스의 정리를 찾아냈는가 하는 것 등이다. 이러한 생각 역시 전혀 새로운 것은 아니다. Alexis-Claude Clairaut(1713-1765)는 교과서 <기하학 원론>에서 그러한 생각을 가지고 있었음을 보여준다:

"나는 이 학문 역시 다른 모든 분야와 마찬가지로 점차적으로 세워진 것이라 생각했다[...] 그리고 이러한 최초의 과정은 초보자의 이해가 없이는 불가능했을 것이다. 왜냐하면 그렇게 발전시킨 이 역시 초보자였으므로."([54, p.8], 재인용)

Clairaut는 발견자가 어떻게 인식이 변화하는지를 찾아내려고 했다. 어떠한 진리도 그것을 발견했는지를 보이지 않은 채 증명만 하지는 않았던 것이다. 그래서 역사적으로 이미 잘 알려진 예에서조차 발견의 과정을 드러내 보이려 했다. 역사가의 눈으로 보면 이러한 사변적인 추정의 과정이 반드시 믿을 만한 것은 아니지만 교육자의 관점에서는 발생적 특성을 특별히 강조할 수 있는 흥미로운 가능성을 열어주는 것이다.

발생적 수학 수업의 주요 주창자 중 한 사람인 Wittenberg는 자신의 저서 <교육과 수학>Bildung und Mathematik에서 자신의 방법을 기하학에서 구체화시켰다. 그는 공리적이고 연역적인 방법에 대하여 명백히 반대하는 입장을 설파하였다:

"기하학에서는 무엇을 다루는가? 자와 컴퍼스로 공책이나 칠판 위에 그릴 수 있는 도형과 우리 주위의 세상, 들판이나 건물, 사용하는 대상에서 발견할 수 있는 도형일 것이다. 주의해 보면 공리나 증명에 관한 것도 아니고 크기가 없는 점이거나 두께가 없는 선에 관한 것도 아닌 것이다. 이 둘은 모두 내적인 요구가 없이 학생들에게 강제할 수 있는 동기가 없을 뿐 아니라 적절하지도 않다."([54, p.9])

기하학 교육과정에 관한 설명의 말미에 다시 Wittenberg는 이러한 입장을 한층 더 강화하여 언급하고 있다:

"이 기하학적 도형의 나라는 아주 오래 전에는 초보자들이 탐구하려면 머뭇거려야 했지만 이제는 [...]아주 잘 다듬어지고 볼만한 낙원처럼 정돈되어 초보자들도 마치 위풍당당한 지배자처럼 편안함을 느끼기에 이르렀다.[...] 이제 학생들로 하여금 이천년 전에 내리쳐서 오늘날까지 인류의 정신사에 반향을 남긴 우레 소리를 되풀이 경험하도록 해야 할 시점이다. 이 소아적인 낙원에 인류의 성숙기의 폭풍우가 닥쳐야 한다. 정원에 관해 분명해 보였던 현실이 비현실적인 것으로 바뀌고 그 뒤에 예상외로 풍부하게 숨겨진 비밀이 가득한 현실성과 문제 역시 겉으로 드러나게 된다. 동시에 그는 기하학적 행위의 내적 역동성에 사로잡혀야 한다. 고유의 엄격한 법칙성을 경험해야 한다.... 이로써 지금까지 무해하고 밋밋한 것으로 지녀왔던 학문에 대한 상이 특유의 심층적인 차원을 지니고 있는 것으로 받아들이게 되는 것이다."([54, p.9])

이러한 경험을 어떻게 가능하게 할 것인지를 Wittenberg는 무리수의 발견을 예로 다음과 같이 제시하였다.([50])

그의 제안에 따르면 역사적인 사실성을 고스란히 보여줌으로써 성과를 올릴 수 있는 것은 아니지만 흥미로운 방법을 찾을 수는 있다. 즉 그는 역사 발생 원리를 사실

의 전개라는 측면보다 아동의 발달이라는 측면에서 구현하고자 했다는 것이 명백하다.

3) 아동의 발달과 (역사적) 사실의 발달: 심리 발생 원리와의 통일

Klein의 동료인 Alfred Pringsheim은 1898년에 이미 역사-발생 원리의 고정된 한 측면에 대하여 의문을 제기하였다:

"우리는 학문의 발달사에서 이전 세대가 범했던 결정적인 오류나 결함을 피하는 것을 배워야 한다[...] 더 나은 길이 보이지 않는 한 각자는 학문 자체의 발전과정과 근본적으로 같은 길을 거쳐야 한다. 그러나 더 나은 길이 있다면 그 길을 가리켜 줄 뿐만 아니라 그 길을 가도록 해야 하는 게 교사의 의무이자 과제이다."([54, p.12])

한편 많은 교육학자들도 역사-발생 원리에 대하여 회의적인 입장을 취하기도 했다. 그래서 Lutz Führer는 역사-발생 원리를 절대시해서는 안 된다며 그 이유로 첫째, 개인의 발달과 인류의 문화 단계의 전개 사이에 보이는 소위 평행성이라는 것은 단지 표면적인 관찰을 근거로 해서 유효한 것이며, 둘째, 역사적인 길은 그다지 정확히 알려져 있지 않을 뿐 아니라 도달하고자 하는 지식으로 가는 더 쉽고 짧고 분명한 다른 길이 있을 수도 있기 때문이라고 주장하였다([23]).

그리하여 더욱 포괄적으로 이해되는 심리-발생 원리를 제기하였다. 역사-발생원리가 자료의 발달을 중심에 놓고 제기된 것이라면 심리-발생 원리는 아동의 발달을 중심에 놓는 것이다. 이러한 관점에서 학생은 고유한 인식을 지어나가는 목수로 이해된다. 심리-발생 원리는 역사-발생 원리와 비슷하게 20세기 초반에 당시 주류를 이루던 Herbart학파의 정해진 대로 진행되는 수업방법에 반대하는 것을 기조로 한 수학교육 개혁의 커다란 흐름과 더불어 상승기류를 탔다. 교육개혁가인 Johannes Kühnel (1869-1928)은 심리-발생 원리에 기초한 수업방법을 다음과 같이 규정하였다:

"가르치고 제시하고 전달하는 것은 [...] 과거의 수업기술이며 오늘날에 와서는 그 가치가 적어졌다[...].학생들 역시 지식을 습득해야 하겠지만[...]우리는 학생들에게 가르치지 않고 스스로 깨우치도록 해야 할 것이다.[...] 학생들의 활동은 더 이상 수용이 아니라 획득으로 이해해야 한다. 미래의 학습과정은 지도와 수용이 아니라 조직과 활동으로 특징지어져야 할 것이다." ([54, p.13] 재인용)

그런데 아동 중심의 수업과 교과 중심의 수업이 절충 가능할 것인가라는 문제에 대하여 교육가 John Dewey(1859-1952)는 확신을 가지고 긍정적인 답변을 하고 있다:

"아동과 교과내용은 하나의 과정을 정의하는 양극이다. 두 점이 한 선분을 결정하듯이 당면한 아동의 발달 상태와 교과의 내용이 수업을 결정한다."([54, p.13])

심리-발생적인 사고방식에서 중심적인 명제는 교사의 임무가 학습내용을 아동에게 전달해주는 것이 아니라 학습내용과 아동 사이의 작용을 중재해 준다는 것이다.

이 두 가지 방향의 결합은 이차 대전후 Wittenberg, Wagenschein, Freudenthal의 논문에서 찾아볼 수 있다. 그렇지만 '새수학'의 물결에 밀려 빛을 보지 못하다 다시 새수학의 좌초 후에 새로이 부상해 왔다. 앞에서도 언급했듯이 발생 원리를 수학수업에 역사적 요소를 도입하는 근거는 '새수학'에 반대하는 경향으로서 광범하게 제기되었다. 즉 일반적인 개념을 가급적 일찍 도입하려는 시도는 부르바키의 '모구조'(mother structure)를 중심으로 개념의 상대화 또는 변화를 애초부터 불가능하게 함으로써 수학을 정적이고도 역사와 무관한 학문으로 보게 한다는 비판이 제시되면서 그에 대한 대안을 찾기 위한 연구 대상이 되었던 것이다. 다음의 인용문은 그러한 흐름을 대변한다:

"수학의 기본적 관점을 좀 더 명확하게 규정함으로써 여러 입장에 적합한 함수론을 통일적으로 표현할 수 있게 되었다. 이러한 표현을 기초로 역사적으로 함수개념과 결합되어 있는 다양한 직관적 표상에 적합한 개념을 규정할 수 있게 되었다. 그렇지만 역사적 설명은 종종 함수개념의 제대로 이해하는 것을 어렵게 한다. 이처럼 이해를 가로막는 것을 단호하게 막기 위해서 Bourbaki는 '함수'라는 용어를 자신들의 방대한 저서 "수학원론"에서 아예 사용하지 말 것인가를 심각하게 고민하기도 하였다. 오늘날에도 (대학이나 학교의) 해석학 교과서에서 여전히 헷갈리게 하는 어법과 함수 개념의 도입 방식이 얼마나 문제가 많은지를 확인할 수 있다."([48, p.36])

이처럼 수학에 대한 정적인 관점과는 달리 발생 원리는 역동적인 관점을 요구한다.

"수학 수업은 발생적 방법에 따라 조직되어야 한다."([61, p.120])

라는 강력한 주장도 한편에서 제기되었다. Wittmann은 수학이라는 분야를 발생적으로 재현하는 것을 다음과 같이 언급하였다.

"... 수업이 수학의 생성과 응용의 과정에 관한 자연스러운 인식론적 과정일 때이다. 정밀과학의 이론도 원시적인 초기 형태를 정제시키면서 문제를 탐구하여 이론을 발전시킨다는 사실에 상응하여 발생적 재현은 다음의 표식을 통하여 발생적으로 특징지어진다: 학생의 사전 이해와 결부되도록 할 것, 수학 안팎의 더 넓은 통일적인 문제의 맥락에서 고찰하도록 할 것, 전후 맥락에서 개념들을 비공식적으로 도입하도록 할 것, 직관적이고 발견적인 전제에 대하여 엄밀하게 숙고해보도록 지도할 것, 끊임없는 동기유발과 일관성, 진행될수록 안목이 넓어짐으로써 그에 상응하여 관점의 변화가 일어남."([61, p.106])

한편 다음과 같은 견해가 강하게 제기되기도 하였다.

"인간의 두뇌에서 전개되는 인식의 메카니즘은 역사를 관철하는 학문적 방법론의 발달로 표출되기 때문이다. ... 인간 사고의 역사적 발달 단계는 어린이의 개체 발생의 정신적, 심리적 발달에서 재현된다."([35, p.84])

위 인용에서와 같이 심리-발생원리를 지지하는 견해는 주로 J. Piaget의 이론, 즉 발생적 인식론에 근거를 두고 있다. 이는 개인이나 학문 체계에서 지식의 생성은 똑같은 메카니즘을 밟는다고 전제하는 것으로 심리적 발생원리라고도 일컫는다. 흥미로운 사실은 수학교육에 역사적 관점을 접합시키려는 움직임은 '새수학'에 대항하여 더욱 적극적으로 제기가 되었다는 것을 앞에서 언급한 바 있는데 Piaget는 바로 이 '새수학'의 주창자들이 학문적 근거로 즐겨 들었던 것이다.

Stenier/Winter는 Kuhn의 학문 분야의 발전 역학에 관한 이론과 Piaget의 발생적 인식론 및 심리발달 이론 사이의 긴밀한 관계를 근거로 생물학적 발생원리에 대한 확신을 하게 된다.

"생물 발생의 기본 법칙에서 광범하게 논의되는 것처럼 주, 객관적 지식 발달 사이의 평행성은 새롭고 더욱 다양하게 드러난다."([49, p.2])

후에 Steiner는 "Kuhn-Piaget 종합"(Kuhn-Piaget-Synthesis)이라고 일컫기까지 한다([48, p.31]).

때로 어떤 수학적 발전이나 발견이 동시에 여러 수학자들에 의해서 독립적으로 이루어져 왔다는 것은 어렵지 않게 찾아볼 수 있다. Jones는 이러한 사실이야말로 수학자들의 학문적 수준이나 인식의 특정 단계가 다음 단계로 도약하기 위한 필요충분조건이라는 논거로 들고 있다([27, p.61]). 생물교육학자 Kattmann은 좀 더 신중하게 표현하였다. 그는 다음과 같이 주장하였다:

"역사 발생적 방법은 학생들의 가지고 있는 표상과 학문의 역사에서 나타났던 표상이 일치한다는 것을 입증할 수 있거나 자명할 경우에 적합하다..."([43, p.365])

나아가 구성적 학습이론의 주창자 중 한 사람인 Janich는 완곡하게 다음과 같이 표현하고 있다:

"발생적이라 함은...부가적으로 다음을 고려한 방법이다
1. 교과에서 추구하는 목표
2. 학문의 역사."([33, p.124] 재인용)

Möller는 수학사를 실제로 재현할 것인지 아니면 단지 동기 유발을 위하여 사용할 것인지에 답을 열어두고 있다.

"교재를 발생적으로 조직한다는 것은 교과를 단계적으로 입증된 과정으로 이상적으로 재구성한 결과물이다..."([33, p.125])

요컨대 생물학적 발생의 법칙을 근거로 두 갈래로 뻗어나간 심리 발생 원리와 역사 발생 원리가 수학 수업을 위한 하나의 법칙으로 다시 통일 되어야 한다는 것이다.

4) 발생적 수업에서의 수학사의 의미

발생적 수업에서 수학사의 의미를 어떻게 논할 수 있을까? 이는 나아가 더 일반적으로 수학 수업에서 수학사의 역할에 관한 논의와 함께 전개시킬 수 있을 것이다.

수학교육론의 위치를 설명한 중요한 모형 중 하나로 받아들여지고 있는 Erich Wittmann의 모형에 따르면 수학교육학은 핵심영역(core area)과 관련 영역(related area)으로 나뉜다([62]). 핵심 영역에는 다음과 같은 탐구 주제들이 포함되어 있다:

- 수학적 활동과 수학적 사고 방식의 분석
- 수학화, 문제해결, 증명, 연습기술과 같은 국소적 이론의 개발
- 학습자가 이해 가능한 수학 내용의 탐색
- 일반적인 수학 교수 목적에 비추어 본 내용의 점검과 정당화
- 학습의 선행 조건 및 교수, 학습 과정에 대한 연구
- 교육과정과 학습지도안의 작성 및 평가
- 수업 계획, 지도, 관찰, 분석 방법의 개발
- 수학교육사에 대한 연구

그리고 관련 영역에는 수학, 컴퓨터공학, 수학사, 인식론, 논리학, 심리학, 사회학, 인류학, 교육학, 교육사, 일반교수법 등이 포함된다고 하였다. 이에 따르면 수학사는 수학교육학과 관련이 있는 분야이다.

한편 Vollrath에 따르면 수업의 구성을 위해서 고려해야 할 방법적인 변수에는 '수업의 주요단계'와 '방법의 결정' 두 가지가 있다. 수업의 단계에 따라 결정해야 할 방법 역시 달라지므로 이 둘은 서로 밀접하게 연결되어 있다고 할 수 있다. 수업의 주요 단계로는 알고리즘, 논증, 개념전개, 형식화, 관계의 탐구 등이 있으며, 결정해야 할 방법으로는 선택, 조절, 구성, 통제 등이 있다고 보았다. 이 중에서 기본개념의 형성과 밀접한 연관이 있는 변수로는 '구성'을 들 수 있다. Vollrath는 다시 이 변수의 하위 변수로는 '대응'(Zuordnung), '수열'(Reihenfolge), '연결'(Verbindung), '강조'(Akzentierung) 등을 들었다([55]).

이 중 연결이라 함은 수학외적인 주제를 포함해서 각각의 수학적 개념과 연결하는 것을 의미하는데, Wittmann은 이를 Freudenthal의 관점을 차용하여 유관성(Beziehungshaltigkeit)이라 칭하였다. 이른바 응용 위주의 수업은 이 변수를 위주로 진행한다고 볼 수 있다. Wittmann은 나아가 수학내적인 또는 수학외적인 맥락을 고려해야 함을 주장하였다. 그는 Freudenthal이 주장하는 수학화의 관점에서 역사-발생

원리를 구체화하기 위한 방안으로 먼저 관계가 풍부한 수학을 선택하고, 학생의 사전 지식에 대해 연구하고, 역사적 분석을 통해 가르치고자 하는 개념을 발생시킬 수 있는 문제 문맥을 구성할 것을 제안하였다. 그 후에 앞의 문맥과 연결하여 중요한 문제들을 제시하여 학습 내용을 다른 측면에서 부각시키고, 새로운 응용 상황과 관련시키고, 이상의 활동에 대해 반성하도록 하는 동기를 부여함으로써 관점의 전환이 일어나도록 할 것을 제안한다.

이러한 관점을 충실하게 견지하면서도 Hischer는 '발생적 원리'라는 용어가 원래의 뜻에서 상당히 변하였으므로 '역사적 접합'(historische Verankerung)이라는 새로운 용어를 도입한다([26]). 이처럼 방법적 변수로서 '연결'을 통해 수학내적인 관련성이 드러나며, 이러한 의미에서 수학사는 교수학적 측면만이 아니라 문화사의 학습을 위한 수단으로서도 사용될 수 있음을 알 수 있다.

교육학적인 문제는 다양한 관련 분야를 고려하면서 실재 수업에 적용한다는 관점에서 가능하면 전체적으로 다루어야 할 것이라고 본다면 수업을 발생적으로 진행한다거나 역사적 원전을 투입하는 것은 이러한 배경에서 결국 방법을 결정하는 것을 의미한다. 그리고 그 방법의 결정은 다른 방법과 비교, 숙고해서 이루어지는 것이다. 어떤 방법을 선택할 때는 목적이 무엇인지를 철저하게 따져보고 결정해야 한다. 결국 역사적 요소를 투입하는 것 역시 그 자체로 유효한 것이 아니라 각각의 경우에 적절한지를 따져보아야 하는 것이다.

3. 수학사 활용의 기준, 방침, 저해요인

1) 수학사 활용의 기준과 방침

다른 모든 교수-학습 이론과 마찬가지로 수학사 활용을 수학교육과 접목하는 방안의 학습 효과에 대해서 전적으로 보장할 수 있는 것은 아니다. 그렇지만 본 연구에서는 여러 가지 측면에서 이론적 근거가 마련되고 있는 수학사 활용에 대한 긍정적인 입장에 서서 구체적인 방안에 대하여 제시하도록 한다. 우선 앞서 언급한 여러 가지 측면의 의의를 살리기 위하여 중등 수학에서 역사적 측면의 주제를 다루는 방침의 기준은 다음과 같이 제시할 수 있을 것이다:

- 수학을 역사적으로 성장해 왔고 성장하는 것으로 파악한다.
- 동기 유발을 위한 도입을 모색한다.
- 수학 이론의 성립에 대한 탐색을 시도한다.
- 수학, 자연과학, 기술의 상호 관계에 대하여 탐색하도록 한다
- 교사의 교수방법론의 확대를 꾀한다.

이러한 기준에 따라 구체적으로 수학사를 도입하는 방안으로는 아래의 몇 가지를 들 수 있다.([29])

가) 일화 소개

분위기의 활성화와 학습 동기 유발을 위해서 많은 교사들이 수학사에서 흥미 있는 일화를 적당한 위치에 배치하여 수업을 구성하기를 바란다. 그러한 전형적인 사례로 Gauss가 등차수열의 합을 구한 예를 든다. 이밖에 수학자에 얽힌 일화는 많지만 가우스의 예처럼 교육과정상의 내용과 밀접한 관련을 가진 경우는 드물고 대체로 개별 수학자 또는 특정한 시대의 수학에 대한 관점이나 입장 등을 짐작할 수 있을 뿐이다. 일반적으로 이러한 일화를 도입하는 효과는 수업 분위기를 부드럽게 하는 효과 외에 유명한 수학자들을 알게 하고, 그들이 수학에 대해 가지고 있는 관점이나 유대감의 정도를 파악할 수 있다.

나) 동기유발을 위한 단편적인 정보 도입

역사에 남아있는 단편적인 사실들, 예컨대 "데카르트는 음수를 '잘못'이라고 표현하고 사용을 기피하였다"거나 "가우스는 무한 앞에서 공포를 느꼈다"는 등의 문장을 인용함으로써 수학이나 수학자에 관한 토론을 이끌어낼 수 있다.

다) 현대 수학사 소개

통상적인 수학 수업은 수학에 대한 강고하고 변하지 않는 상을 바탕으로 구성된다. 그리고 문제 풀이 위주로 내용이 전개되어 있는 현행 수업에서 새로이 발전하는 수학적 내용을 도입하기란 여간해서 쉽지 않다. 수학 역시 발전하고 있는 학문 분야라는 인식을 할 수 있도록 하기 위해서는, 물리학에서 일반상대성이론이나 양자물리학의 근본적인 사고방식을 설명해 줄 수 있는 것처럼 순수하게 현상학적으로 수학의 현대사를 도입하여야 한다.

라) 문제를 통한 역사적 사실 탐구

문제풀이는 수업을 진행하는 과정에서 주된 역할을 할 뿐만 아니라 수업을 계획하는 데서도 그 배열을 어떻게 할 것인가가 중요한 내용이 된다. 수학사에 남아 있는 문제와 그 풀이를 적절하게 배열할 수 있다.

마) 수학 각 분야의 약사 도입

수학사에 대한 지식을 교사 자신이 가지고 있다 하더라도 수업에 아무런 영향을 미치지 못하는 경우가 허다한데 이는 앞서 언급한 대로 수업의 구성 방식에 그 원인이 있다고 보인다. 수학사적 주제를 수업의 직접적 목표로 삼지 않더라도 학생들로 하여

금 직접 역사적 사실을 접하게 함으로써 수학적 개념이 생성되는 과정에 대한 성찰을 스스로 하게 할 수 있다.

바) 수학적 개념의 종적인 변천사 도입

현행 교육과정은 수학 내적인 체계를 아주 강고한 것으로 삼아 전개되어 있어서 학생들로 하여금 수학적 내용-구체적으로는 각 단원-이 서로 아무런 연관도 없이 제각각 서 있는 것처럼 받아들이게 한다. 이처럼 수학을 단선적인 구조로 파악하게 되면 새로운 수학적 내용의 발견에 대한 시도는 거의 불가능한 것으로 여기게 된다. 따라서 각 분야 혹은 각 개념의 연관성을 파악할 수 있도록 수학적 개념 발달의 종적인 발달 과정을 도입할 필요성이 제기된다.

2) 수학사 활용의 저해요인

한때 수학 수업의 획기적 개선을 위한 최선의 방안인 것처럼 여겨져 많은 관심의 대상이었던 역사발생원리가 실제 수업에 적용되지 않는 근본적인 이유는 무엇인가 하는 문제가 제기된다.

지금까지 이루어졌던 수학교육의 개혁 혹은 수업의 개선을 위한 여러 가지 시도는 사실 새롭게 첨가된 내용에 따라 적당한 과제들을 제시할 수만 있다면 원칙적으로 아무런 문제도 없었다.

"이 연습문제 중 많은 경우는 작위적인 성격이 강하다. 말하자면 학교에서 배우는 수학을 익히기 위해서만 고안된 것이라서 학문적 수학이나 다른 종류의 전문적 수학에서는 유사한 문제를 발견할 수 없다"([18, p.63])

그렇지만 계산할 수 있는 수준의 문제를 낼 수가 없는 내용이라면 애초에 고려 대상이 되질 않는다.

"연습할 수 있는 풍부한 기회를 제공하지 않는 주제는 학교 수학에는 적합하지 않다. 어떤 이는 심지어 연습 문제의 종류에 따라 학교 수학을 분류하기도 한다."([18, p.63])

이처럼 과정을 중심으로 구성되는 수학 수업의 근저에는 수학 수업이란 관련된 계산과정의 총합이라는 일종의 이데올로기가 깔려있다. 이러한 경향을 "과제교수학"이라 일컫기도 한다([32], p.50]). 그 기본은 "난점 고립화의 원칙이며...수학이란 학생들에게는 관련 없는 문제들의 집합처럼 보인다"([50, p.9]).

수업에 관한 이러한 관점은 단기적인 과정에 대한 방향을 제시해 주므로 수업을 계획하는 입장에서는 매우 환영받지만 수학 전체에 대한 상이나 입장, 가치 등을 세워주는 역할을 하지는 못한다. 이처럼 짧은 과정을 중심으로 한 교수-학습법은 널리 퍼

졌던 발문 중심의 수업 방법과 학교 수학의 체계를 통해 실현되었다. 특히 후자는 Wagenschein이 "축적을 위한 학습"이라고 비판하였다.

"우리의 수업방식을 지배하는 축적론(그것은 언젠가 무엇엔가 쓸모 있을 것이다. 잘 알아둬라!)은 논리적으로 틀리지는 않지만 교육적으로는 빈약하고 그다지 성공적이지 않다는 것이 밝혀졌다; 쌓아놓기만 하고 그래서 서두르게 되고 무엇보다도 아동들에게 동기 부여를 하지 못하고 지겹게 만들어 버린다. 그래서 얼마 못가서 거의 대부분을 잊어버리게 되는 것이다."([57, p.67])

뿐만 아니라 일련의 수업 과정이 끝나면 성적을 매겨야만 하고 이 성적에 따른 결정적인 결과 때문에 가능한 객관적인 평가 기준을 설정할 필요성이 생겨난다. 그 기준은 난해하지 않으면서도 설득력 있고 단일한 근거를 제시할 수 있어야 한다. 그리하여 다시 평가는 연습문제를 통해서 충분히 연습이 되어야 한다는 이데올로기가 확고하게 서 있다. 대부분의 교사들은 연습문제가 시험문제랑 크게 달라서는 안 되며 똑같아서도 안 된다고 생각한다. 이러한 생각에서 통상 계산을 위주로 한 연습문의 형태로 한 단원을 마무리 짓곤 한다.

"연습문제는 학생과 교사 모두에게 유용하다. 교사는 연습문제 덕에 준비해야 할 내용을 최소화시킬 수 있다. 수업은 연습문제를 가지고 연쇄적으로 구성하게 된다. ... 학생 역시 연습문제에 쉽게 경도된다. 학생들은 연습문제를 학습한다. 기대되는 성취도는 잘 정의되어 있고 요구되는 기능 역시 훈련이 가능하다. ... 그러한 성취도를 달성하기 위해 얼마나 단조롭고 우둔하게 수업이 진행되어야 하는지를 간과하게 된다. 연습문제를 강조하는 것은 교수학적인 균형을 어지럽힌다. 도입과정은 축소되며 원리를 밝히는 일은 하찮은 일이 되어버린다. 개념은 뒷전이고 반복적인 일이 기발한 착상을 압도하게 된다... Wagenschein에 따르면 '이해하지 못하는 것에 대해 적응'이 되는 것이다."([55, p.376], cf. [32, p.35])

그런데 문제는 이와 같은 수업에 대한 태도가 명시적인 이론에 입각한 것이라기보다는 전통적인 내용이나 관점을 의식하지 않는 가운데 이어받게 된다는 사실이다. Rogers는 이와 관련하여 "교사 신념 체계"라는 개념을 도입하여 다음과 같이 설명하고 있다([39]).

"신념체계의 변화는 겨우 마지못해서 용인된다. 변화의 달인은 카운슬러, 정신과 의사, 심리학자들이다. ... 우리는 교사 자신이 변화를 받아들일 수 있도록 접근할 수 있는 의미 있는 자료를 사용한 레토릭(설득력 있거나 인상적인 화법, 글쓰기)을 찾아내야 한다. ... 신념이란 말을 사용하는 것은 적어도 처음에는 무비판적이라는 것을 일반적으로 시사한다. 무엇보다 사실과 관련해서는 선험적이라는, 과정과 관련해서는 심리

적이라는, 진실과 관련해서는 오류가 없다는 모종의 이데올로기를 포함한다."([39, p.65])

교사가 설령 수학사 활용의 의의를 부분적으로 인정한다 하더라도 전통적인 수업 방식을 고수하는 것이 일종의 신념 체계로 굳어져 있는 상황에서는 그 변화를 꾀하는 것이 그리 용이하지 않다는 것이다. 지난 수십 년간 이루어진 교육과정의 변화와 그것이 실제로 수학수업에 끼친 영향을 보면 Rogers의 견해가 상당 부분 타당했다는 것을 확인할 수 있다.

수학 수업의 모습은 사실 결정적인 개혁의 움직임이 있었음에도 불구하고 크게 달라지지 않았다. 오히려 역으로 개혁에서 의도했던 목표를 일정한 틀 안에 가둬둠으로써 본말이 전도되어 버리기도 하였다.

수학사를 수업에 접목시키려는 노력 역시 유사한 문제에 봉착하였다. 많은 교사들이 수업 분위기를 활성화시키기 위하여 수학사를 도입함으로써 일시적으로 학생들의 주의를 집중시켜 수업을 좀 더 잘 진행시킬 수 있지 않을까 하는 기대를 가지고 있다. 그래서 산발적으로 흩어져 있는 수학사의 일화들을 활용하곤 한다.

말하자면 이와 같이 수학사는 단지 만화, 수수께끼, 우스개와 같은 역할을 떠맡게 된 게 현실이다. 통상적인 목표에 근거한 수업에 대한 관점은 역사적 일화를 접목시키기 위해서는 어쨌든 변화해야만 하는 것이다.

그렇다면 과연 역사적 지식을 전달하는 것이 수학 수업의 목표가 될 수 있는가?

이 질문에 대하여 모든 학교에서 다 긍정적인 대답을 할 필요는 없겠지만 수학의 다양한 측면을 보여준다는 점에서 수학사를 활용할 수 있다는 것은 분명한 사실이다. René Thom은 아래와 같이 언명하기도 하였다:

"사실 바라건 바라지 않건 모든 수학 교육은 일관되지는 않는다 해도 수리 철학에 뿌리를 두고 있다."([46, p.7] 재인용)

역사적 지식을 알려주는 것이 수학 수업의 목표가 될 수 있는가에 대한 물음에 긍정적인 답을 한다면 두 가지 문제가 제기 된다:

1. 어떠한 목표/내용이 역사적 사실을 통해서 또는 역사적 사실을 강조함으로써 달성될 수 있는가?
2. 역사적 내용은 성취도 평가에 포함되어야 하는가?

첫 번째 질문에 관한 답을 하기 위해서는 교육과정 전반에 관한 검토 등이 필요하므로 여기서는 언급을 하지 않도록 한다. 두 번째 질문에 관해서는 대다수 교사나 학생들은 부정적인 답변을 할 것이라는 예상을 할 수 있다. 그렇지만 수학사가 수업의 언저리에 위치하는 현상을 벗어나려면 성취도 평가에 포함시키는 것을 진지하게 고려

하여야 할 것이다. 다음 인용문의 내용은 수학사만이 아니라 일반적으로도 통용된다:

"수학수업의 거의 모든 목표는 어떤 방향이든지 (귀찮은) 시험이나 성취도평가에 통합되어야만 달성된다. 시험의 예는 수업의 중심 내용을 반영해야만 한다."([18, p.92])

이 때 종종 얘기되는 대안, 즉 성취도 평가에 포함시키지 않으면서도 수학사를 강조할 수 있는 방안은 여러 가지 문제에 봉착하게 된다. 특히 성적이 낮은 학생(또는 그 부모)들은 그와 같이 "근본적인 것에서 비켜난 내용" 또는 "시험과 관련 있는 중요한 모든 문제를 연습하는 것을 경시하는 것"에 반대하게 되는 것이다. 그러나 가장 근본적인 것은 늘 그렇듯이 성취도평가를 해야만 가치를 두게 된다는 점이다.

따라서 현실적으로 수학사를 접목시킨 수업 방안이 유의미하다고 여겨진다면 성취도 평가가 가능한 방향으로 교재를 구성해야 할 것이다.

4. 수학사 활용과 영재교육

영재 교육을 위해서는 영재성을 정확히 판별해 내는 것, 질 높은 영재 교육 프로그램을 개발하는 것, 영재 교육에 관한 전문성을 지닌 교사를 양성하는 것 등 세 가지가 무엇보다도 중요하다고 할 수 있다. Gallagher는 영재교육을 실시하기 위해서는 우선 네 가지 물음에 대한 답을 해야 한다고 했다. 첫째, 영재성이란 것이 있는가, 둘째, 영재성이 존재한다면 어떻게 발견할 수 있을 것인가, 셋째, 이런 학생들을 발견한다면 어떻게 차별화된 교육을 제공할 수 있을 것인가, 넷째, 이렇게 차별화된 교육은 도덕적으로 정당한가라는 것이다([24]).

이 모든 것에 대한 답이 확실하게 마련되어 있는 것은 아니지만 대체로 영재성에 대한 존재 및 판별 가능성에 대하여 어느 정도 합의가 되어 있다고 보이며 이 연구의 방향을 견지하면서 접목할 수 있는 것은 결국 "어떻게 차별화된 교육을 제공할 수 있을 것인가"라는 점이다. 여기서는 지금까지 논의된 수학 영재 프로그램 개발의 방향과 실제를 개관하고 수학사를 접목하는 것에 대한 근거를 밝힌다.

영재학생들은 높은 잠재 능력과 특수한 재능을 지니고 있을 뿐만 아니라 지적 탐구에 대한 요구가 강하고 학습 속도도 빠르며 과업 성취를 위한 도전의식도 강하므로 일반 학교의 교수-학습 과정에서는 영재학생들의 요구에 부응하기가 쉽지 않다.

Wheatley는 영재들의 수학 수업을 관찰하면서 대부분의 영재들은 자신에게 주어진 과제에 몰두하는 경향이 있으며 그 때 교사는 하나의 자원으로서의 역할을 한다고 보았다([59]). 그러므로 영재 교수-학습 방법에서는 학습자들의 이러한 특성에 비추어 자기주도적으로 과제를 완수할 수 있도록 문제중심학습(problem centered learning), 문제해결(problem solving), 문제발견(problem finding), 은유 지도(teaching metaphors),

과제(projects), 협동학습(cooperative learning) 등을 이용해야 한다는 것을 강조하였다.

말하자면 수학적으로 재능이 있는 학생은 일반 학생과는 다른 프로그램과 학습 지도가 필요하다는 것이다. 그렇다고 해서 질적으로 전혀 다른 교육과정이라기보다 일반적인 교육과정의 내용을 수정, 재구성하여 단축, 압축, 다양화시키고 심화과정을 거쳐 보다 진보적이고 복합적인 개념, 추상적인 개념과 자료가 제공되는 특수한 프로그램으로 개발되어야 한다는 것을 주장하기도 한다.

아직까지 통일적으로 받아들여지는 영재교육 프로그램이 확립되어 있는 것은 아니지만 미국 National/State Leadership Training Institute에서 1982년 제시된 '영재를 위한 심화학습 프로그램 구성시 고려해야 할 원칙'이 나름대로 현실성이 있다고 여겨지므로 이 연구에서는 가설적인 지침으로 아래와 같이 제시된 위 원칙을 차용하고자 한다:

- *광범위한 이슈, 문제, 주제와 관련된 내용을 제시한다*
- *다양한 학문 분야를 통합한다*
- *스스로 선택한 주제를 깊이 있게 학습하도록 허용한다.*
- 연구 기능과 방법을 숙달하여 연구 능력을 계발한다
- 개방적인 과제에 초점을 맞춘다
- 복잡하고 추상적이면서도 생산적인 고급 사고 기능을 계발시킨다
- 기존의 아이디어에 도전하는 새로운 아이디어로 산출물을 만들어 내도록 격려한다
- 새로운 기법, 자료, 형태를 활용한 산출물을 만들어내도록 격려한다
- 자기 평가, 준거 평가. 표준화된 검사도구 등을 통하여 적절하고 구체적인 준거를 적용하여 학생의 산출물을 평가한다.

위에 열거한 여러 가지 원칙 중에서 흰 글씨체로 표시되어 있는 내용이 특히 수학사와의 연계를 적용함으로써 구현할 수 있는 내용이라 여겨진다.

이러한 방향에 따른 프로그램 개발 지침은 Sheffield에 따르면 첫째, 수학적 사고를 깊이 있게 하도록 도와주어야 하고, 둘째, 지식이 폭넓은 시민으로 발전시켜야 하며, 셋째, 수학의 재미와 아름다움을 경험하도록 하며, 넷째, 대학 수준과 그 이상에서 경쟁할 수 있어야 하며, 다섯째, *날로 발전하는 기술적인 세계의 지도자가 될 수 있도록 해야 한다*([42]). 이 지침에 따르자면 수학적 재능이 뛰어난 영재를 단지 한 가지 특별한 기능을 키우는 데 그치지 않고 전인적 성장을 도울 수 있도록 정의적 영역의 신장에도 힘을 기울여야 한다는 것이 특별히 강조되어 있다는 것을 알 수 있다.

Velikova는 영재 교육을 위해 준비된 독립 프로그램의 목표를 다음과 같이 설정하고 있다. 첫째, 학생들의 지식을 깊고 넓게 해주어야 하며, 둘째, 학생들의 기술과 습관을 개발하여야 하며, 셋째, 수학의 다양한 영역에 흥미를 가지게 해야 하며, 넷째, 과학적 문헌이나 보고서 사용에 친숙하도록 해야 하며, 다섯째, 수학적 스타일이나 언어를 개발하기 위하여 새로운 과학적 발견이나 저명한 수학자의 작업과 인생에 대하

여 짧은 보고서를 쓸 수 있어야 하며, 여섯째 신문과 학회지에 발표할 준비가 되어 있도록 해야 한다. 이들 목표 역시 Scheffield의 지침과 마찬가지로 지적, 정의적 영역을 두루 아우르는 능력의 계발을 지향하고 있음을 알 수 있다([53]). 특히 다섯 번째 목표를 관철시키기 위하여 수학사 활용을 적극 도모해야 할 필요성이 제기된다는 것을 알 수 있다.

한편 국내에서도 국내외 고등학교 수학 영재 교육과정에 대한 종합 분석을 토대로 영재들의 특성을 최대한 고려하고 이들의 능력을 계발할 수 있도록 고등학교 수학 영재 교육과정의 개발에 대한 기본 방향을 다음과 같이 설정하였다([1]).

첫째, 지적 영역의 발달과 함께 정서적, 사회적 발달을 도모할 수 있도록 하는 교육과정으로 구성하며 소영역별로 통합적/간학문적인 접근이 가능하도록 교육과정을 구성한다.

둘째, 고등학교 수준의 영재 학생들의 특성을 고려하여 이들의 관심과 능력을 최대로 발휘할 수 있는 다양한 교과목 및 프로그램을 개설하여 운영할 수 있도록 한다.

셋째, 속진과 심화를 병행하여 운영할 수 있도록 교육과정을 개설하며 지적 능력에 초점을 맞춘 속진 프로그램보다 지적 욕구에 초점을 둔 심화 프로그램을 강조하는 교육과정으로 구성한다.

넷째, 미래 사회를 이끌어 갈 수 있는 현대 수학과 관련된 내용, 미래의 정보화, 창조화 사회를 대비할 수 있는 교육과정으로 구성한다.

다섯째, 수학적 사고에 관한 의사소통 기능을 강화하기 위한 개인 프로젝트나 연구 프로젝트 등을 포함하여 관심과 능력이 있는 분야에 대하여 전문가적인 연구를 수행할 수 있도록 교육과정을 구성한다.

여섯째, 초・중학교, 대학과 전문기관과 연계가 잘 되는 교육과정으로 구성한다.

그런데 영재학습 프로그램은 교육과정과의 관련성 여부에 따라 속진학습형과 심화학습형으로 나눌 수 있다. 여러 가지 정의와 판별 기준이 없진 않지만 영재들에게 제공되는 프로그램이 속진형인지 심화형인지를 구별하는 것은 쉽지 않다. 다만 일반적으로 받아들여지는 특성에 비추어보면 심화학습이란 정규 교육과정의 내용과 유사한 내용이지만 보다 고차적인 인지활동을 위해 정규 교육과정의 내용을 보다 깊고 광범위하게 확장시킨 것으로 정규교육과정 내용과 직접적인 관계가 없는 제재, 또는 좀 더 높은 인지수준에서 다루어지는 수학 내용까지를 학습대상으로 한다. 따라서 내용의 타당성과 교육적 효용성만 인정할 수 있다면 수학사를 활용하여 수업을 진행하는데 저해요인이 존재하지 않는다고 하겠다.

한편 심화학습의 긍정적 특성은 첫째, 정규 교육과정에서 다루는 형식적인 문제 해결력뿐만 아니라 비정형적인 문제 해결의 기회가 풍부해짐으로써 인지적 측면에서 고차적인 사고력과 창의적인 사고력, 문제해결력을 신장시킬 수 있으며 정의적인 측면에서 학습의 집중력과 지구력 및 학습내용에 대한 적용력을 향상시킬 수 있다. 둘째,

동료 및 교사와 수학적 원리·법칙의 발생과 발달에 대하여 폭넓은 의사소통의 기회를 가지게 됨으로써 자신의 아이디어를 실험하고 검증하며 새로운 아이디어를 자극하며 개인적인 흥미를 끄는 문제에 대하여 탐구활동에 능동적, 주체적으로 참여할 수 있다. 셋째, 학습 속도보다 깊이에 초점을 둠으로써 학생 중심 또는 교사 주도적 수업을 운영하기가 용이하며 학습한 지식과 기능의 적용을 통한 수학의 가치와 유용성을 깨닫게 할 수 있다([4]).

이처럼 여러 학자들에 의해 개발되어 다양하게 시행되고 있는 영재 학습 프로그램의 유형 중에서도 심화학습의 긍정적 특성 중 위의 휜 글자체로 표시된 내용은 특히 수학사 활용을 통하여 실현시킬 수 있는 것이라 여겨진다.

5. 수학사를 활용한 수업의 예: 미분개념의 이해를 중심으로

우선 미분 개념의 이해와 관련하여 두 가지로 수업을 전개할 수 있을 것이다. 먼저 미적분에 관한 선수 학습이 되어 있지 않은 상태에서 극한이나 무한소에 대한 개념을 수학사의 전개과정과 발을 맞추어 받아들일 수 있도록 진행하는 방식과 둘째로는 미분의 알고리즘을 구하는 것을 이미 숙지한 경우 수학사에서 전개되어온 과정과 비교하여 전개하는 활동 등을 통하여 더 깊은 이해를 하도록 하는 한편 적분과의 상관관계에 대해서도 한층 심화된 이해를 하도록 하는 것이다. 전자의 경우는 현행 교육과정을 기준으로 본다면 9 또는 10단계 이후의 적당한 시점 즉 함수 개념과 판별식에 관한 이해가 깔려있다면 적용할 수 있을 것이고 후자의 방식은 변화율을 구하는 방법을 숙지한 후 적분을 배우기 전에 적용할 수 있을 것이라 본다. 두 가지 방식 모두에서 미적분의 창안에 관한 교사의 사전 이해가 필수적이라 여긴다. 여기서는 둘째 방법을 중심으로 예시하도록 한다.

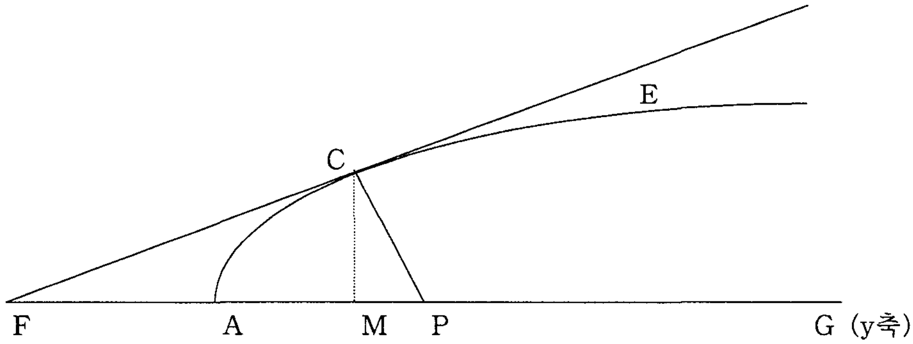
1) 수업의 진행

가) 도입: 미분이 발견된 배경에 대하여 설명

나) 접선을 구하는 방법 이해, 재현, 비교

① 판별식을 이용하여 2차 함수 $y=x^2+2x-3$ 위의 점 $C(1,\ 0)$에서의 접선을 구해보도록 한다(학생활동).

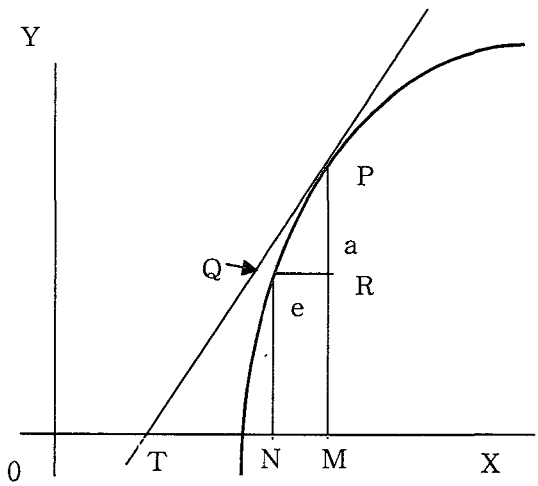
② Descartes의 법선(접선) 구하는 방법 이해 및 재현



설명) Descartes는 점 C의 좌표 $CM=x, AM=y$라 두고 일반적인 변수를 정점과 구별하지 않았다.[4] y축 AG 위에 중심 (0, v)이 있고, 점 C를 지나는 원은 점 C의 근방에서 곡선 CE와 또 다른 한 점에서 만난다. 이 때 원의 반지름이 곡선과 수직으로 만나면 중근을 가지게 되는 셈이다. 따라서 법선을 구하는 것은 곡선 CE의 방정식을 $f(x,y)=0$이라 두면 곡선 $f(x,y)=0$이 점 $C(x_c, y_c)$에서 이중으로 만나는(즉 접하는) 원의 중점 P(0, v)를 결정하는 문제가 된다. 그러므로 두 식 $f(x,y)=0$과 $x^2+(y-v)^2=s^2(s=\sqrt{x_c^2+(y_c-v)^2})$을 연립하여 풀면 법선을 구할 수 있다. 그리고 구한 법선과 점 C에서 수직으로 만나는 직선을 구하면 바로 접선이 되는 것이다.

- Desartes의 방법을 이용하여 위 ①에서 주어진 곡선위의 점에서의 법선 및 접선을 구해보도록 한다.

③ Barrow의 접선의 방정식을 구하는 방법 이해 및 재현:



4) Desartes는 해석기하학의 창시자이며 그 중요한 근거로 좌표평면을 자유롭게 사용한 것으로 알려져 있지만 저서 <기하학>에서 좌표평면을 사용하지는 않았다. 다만 본분 그림에서처럼 어느 한 축을 좌표축으로 바로 해석할 수 잇도록 논의를 전개시켜놓았다.

주어진 곡선 $f(x, y)=0$ 위에서 Q는 곡선 위의 점으로 $P(x, y)$의 근방에 있다고 하자. 그러면 삼각형 PTM와 삼각형 PQR은 거의 닮은꼴이 된다. 이 삼각형이 아주 작아지면

$$\frac{RP}{QR} \approx \frac{MP}{TM}$$

가 성립한다.

$QR=e,\ RP=a$라고 하면 $Q(x-e,\ y-a)$가 되는데 이 값들을 곡선의 방정식에 대입하고 e와 a의 2차 이상의 거듭제곱을 무시하면 비 $\frac{a}{e}$를 얻는다. 그러므로

$$OT=OM-TM=OM-MP\left(\frac{QR}{RP}\right)=x-y\left(\frac{e}{a}\right)$$

이 성립하여 접선이 결정된다.

- Barrow의 방법을 이용하여 $y=x^2+2x-3$위의 임의의 점 $(x,\ y)$에서의 접선의 기울기와 $P(1, 0)$ 위의 점에서의 접선의 기울기를 구하여 보고 앞에서 판별식을 이용하여 구한 결과와 비교하여 보도록 한다(학생활동):

$y-a=(x-e)^2+2(x-e)-3$을 정리하여 $y=x^2+2x-3$을 이용하면

$a-2ex+e^2-2e=0$가 되는데, e의 2차이상의 항을 무시하면 $\frac{a}{e}=2x+2$이 된다.

$P(1, 0)$인 경우 기울기는 4이며 이는 앞에서 판별식을 이용하여 구한 결과와 같다.

다) Fermat의 극값 결정 방법 이해 및 재현

① Fermat의 저서에 나오는 다음의 원문을 이해하게 한다:

"선분 AC를 점 E에서 둘로 나누어 $EC \cdot AE$가 최대가 되도록 하라.

$AC=b$라 놓으면 둘로 나누어 그 중 한 부분을 a라 할 때 남은 부분은 $b-a$가 되며 이 둘의 곱 $ba-a^2$의 최대값을 찾아야 하는 것이다. $a+e$가 b의 첫째 부분이라면 둘째 부분은 $b-a-e$이고 두 선분의 곱은 $ba-a^2+be-2ae-e^2$이며 이는 앞의 $ba-a^2$와 같아야 한다. 동류항끼리 정리를 해주면 $be=2ae+e^2$이 되고 이 식을 e로 나누면 $b=2a+e$가 되는 것이다. 여기서 e를 소거하면 $b=2a$가 된다. 문제를 해결하기 위해서는 b의 절반을 취하면 되는 것이다. 더욱 일반적인 방법을 제시하는 것은 불가능하다."([19])

여기서는 무엇이 문제인가? 우선 페르마는 $AC=b,\ AE=a$로 $EC=b-a$로 나타내었다. 두 선분의 곱이 최대가 되려면 $(b-a)a=ba-a^2$의 값이 최대가 되어야 하는 것이다. 첫째 부분의 길이를 a가 아니라 $a+e$라 한다면 선분의 나머지 부분도

$b-a-e$가 되어 그 곱은 $(b-a-e)(a+e)=ba-a^2+be-2ae-e^2$이다. 페르마는 두 번째로 나온 곱셈식의 결과가 첫 번째 곱셈식과 같다고 전제하였다. 즉 $ba-a^2=ba-a^2+be-2ae-e^2$이고, 같은 항을 소거하면 $0=be-2ae-e^2$이고 $be=2ae+e^2$이므로 각 항을 e로 나누면 $b=2a+e$이 되어 e를 소거하면 $b=2a$인 것이다.

여기서 Fermat가 e를 무한히 작은 편차로 간주했다는 것을 알아챌 수 있다. 그는 이러한 편차로 인해 최대값을 가지는 근방에서 함수값이 아무런 큰 영향을 받지 않는다는 사실을 직관적으로 파악했다.5)

오늘날에 와서는 $f(x)=0$이라는 것은 최대값을 가지기 위한 필요조건이고 Weierstrass의 아이디어에 따라 도함수를 한 점에서의 근사치에 관한 일차식으로 나타낼 수 있다는 것은 다 알려진 사실이다. 즉 h가 작은 값을 취할 때 $f(x+h)\approx f(x)$인 것이다.(왜냐하면 $f(x+h)=f(x)+f(x)\cdot h$이고 $f(x)=0$이다)

③ 수업에서는 이러한 역사적 사실, 혹은 원전을 다음과 같은 단계를 밟아서 활용할 수 있다.

(1단계) 문제를 제시하고 표준적인 해법으로 풀 수 있도록 한다.
(즉 $f(x)=x(x-a)$를 세우고 $f(x)=0$을 이용한다)

(2단계) 학생들로 하여금 자료의 내용을 살펴보도록 한다.(어떤 차이를 보이는지 토론에 부치도록 한다)

(3단계) Fermat의 방법을 공식화할 수 있다
a) 최대 혹은 최소가 되는 식에서 A 대신에 A+E를 대입한다; E는 0보다 아주 작은 값이다.
b) 두 식이 같다고 놓고 식을 간단히 정리한다.
c) 남은 식에서 E=0으로 놓는다.
d) A의 값을 구한다

(4단계) 다른 보기에서 두 방법을 적용하여 비교하기: $f(x)=x(x-3)$에서 극소값 구해보기 등. (이 방법은 언제 사용할 수 있으며 언제 사용할 수 없는가)

(5단계) 정리 및 요약

Fermat가 구한 극대·극소를 구하는 방법은 오늘날 도함수를 구하는 절차인 $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$을 그대로 나타내고 있다. Fermat가 극한의 개념을 갖지 않았던 것은 사실이지만, 그의 방법은 e대신에 기호 h 또는 Δx가 쓰인다는 점을 제외하면, 현재의 미분법과 거의 동일하다. 이와 같이 근방의 값을 이용한 Fermat의 방

5) 당시 Fermat는 이 방법에 대하여 확신을 가지고 있었지만 Descartes는 격렬하게 반대하였다고 한다.

법은 상당 기간 무한소 해석의 기본이 되어 왔다.[6] 미분법이 곡선에 접선을 그리는 문제와 함수의 극대·극소값을 구하는 데에서 유래되었다고 볼 때, 접선과 극대·극소의 개념이 매우 중요함을 알 수 있다.

위와 같은 방식으로 해석 영역의 수업을 풍부하게 할 수 있으며 다음과 같은 이점을 살릴 수 있다([17]).

첫째, 미분법의 유래가 접선 문제와 극값이었음을 알 수 있다. 말하자면 미분 개념의 역사적 기원을 알게 됨으로써 보다 폭넓은 이해를 하게 된다.

둘째, 극값의 기준에 대한 깊은 이해를 할 수 있다.

셋째, 극값을 찾아내기 위해 표준적인 방법만을 사용하는 데서 더 나아가게 된다.

넷째, 정해진 방법을 완전히 숙지하는 것보다 그 아이디어나 의미를 찾아내는 데 가치를 두게 되므로 학습을 위한 토론 주제로도 적합하다.

다섯째, 반면 현대적 방법에서 제시된 조건의 의미가 분명해지면서 페르마의 방법에서 모호한 내용을 밝힘으로써 현대적 방법의 가치를 확인할 수도 있다.

여기서 극값을 구하기 위한 오늘날의 표준적인 방법을 숙지하고 난 후에 Fermat의 방법을 접하게 하는 절차에 대해서 의문을 제기할 수 있다. 알고리즘으로서의 미분법의 숙지는 여러 영재아에 관한 대표적인 현상처럼 예시되어 왔다. 그만큼 표준적인 방법을 익히는 것은 영재아들에겐 기술적으로 어렵지 않을 수 있다는 것이다. 그런데 이 대목에서 '왜 미분을 창안하게 되었을까?' 혹은 '어떻게?' 라는 의문을 제기하면 그에 대한 답변은 역사-발생 원리의 관점에서 표준적인 방법에 대한 접근과 동기부여를 위하여 이러한 예를 사용하는 것은 대단히 흥미롭다고 할 수 있다.

6. 맺음말

앞에서 수학사 활용의 당위적 근거와 방안 및 실례를 살펴보았다. 이론의 여지가 있기는 하지만 수학교육과 관련하여 수학사 활용의 요구나 필요성이 커지고 있는 것은 사실이다. 그럼에도 여전히 남는 문제는 부분적이고도 지엽적이지 않고 일반적 교육과정과 결합하여 수학 교육에서 수학사 활용의 폭을 어떻게 넓혀나가는가 하는 것이다. 그를 위한 아주 구체적이고도 현실적인 노력은 대체로 두 가지 방향으로 기울어져야 할 것이라 본다.

우선 현장에서 경험적으로 확인할 수 있는 성과물을 축적하는 것이다. 수업의 개선

6) 다만 Fermat는 $f(x)$의 도함수가 0이 되는 것은 통상적인 최대·최소값이 되기 위한 충분조건이 아닌 필요조건이라는 사실을 깨닫지 못했다. 또한 Fermat의 방법은 최대값과 최소값 사이의 차이를 구별하고 있지도 않다.

을 실제로 맡는 주체는 역시 교사이며 교사들의 변화는 방법의 변화에서 비롯되는 성과를 통하여 비로소 구체적으로 드러나기 때문이다. 앞서도 언급했듯이 수업을 발생적으로 진행한다거나 역사적 원전을 투입하는 것은 결국 방법을 결정하는 것을 의미한다. 그리고 그 방법의 결정은 다른 방법과 비교, 숙고해서 이루어지는 것이다. 결국 역사적 요소를 투입하는 것 역시 그 자체로 유효한 것이 아니라 각각의 경우에 적절한지를 따져보아야 하는 것이다. 이러한 인식을 기초로 교사, 수학자, 수학교육학자 등이 각자 처한 위치에서 노력을 경주해야 할 것이다.

둘째로 이보다 제도적으로 더 중요하다고 할 수 있는 점으로 수학사가 수학 수업의 질적인 개선을 위하여 중요한 비중을 차지할 수 있으려면 성취도 평가에 포함시키는 것을 진지하게 고려하여야 할 것이다. 따라서 현실적으로 수학사를 접목시킨 수업 방안이 유의미하다고 여겨진다면 성취도 평가가 가능한 방향으로 교재를 구성해야 할 것이며 이를 토대로 교육과정에도 편입시키는 것을 고려해 볼 수 있겠다.

끝으로 이론적으로뿐만 아니라 앞서 제시한 수학사 활용의 여러 방안을 비교적 자유로이 시도해 볼 수 있는 영역이 영재교육이므로 이 영역에서 선도적으로 수학사를 활용하거나 역사발생원리를 적용한 수업을 주도해 나가고 그 성과를 확산시켜 나갈 필요가 있을 것이다.

참고 문헌

1. 구자억, 조석희, 김홍원, 서혜애, 장영숙, 임희준, 방승진, 황동주, 영재교육과정 개발 연구 : 고등학교 영재교육과정 시안 개발을 위한 기초 연구, 서울: 한국교육개발원, 2000.
2. 김명자 역, 과학혁명의 구조, 동아출판사, 1992.
3. 김응태 외, 수학교육학 개론, 서울대학교 출판부, 1995.
4. 남승인, 심화학습 프로그램에 기초한 속진학습 프로그램 개발 방향, 창의적 지식 생산자 양성을 위한 영재교육, 한국교육개발원, 2005, 7
5. 민세영, 역사발생적 수학 학습-지도 원리에 관한 연구, 수학교육학 연구, 제12권, 제3호 p.409-424.
6. 우정호, 학교수학의 교육적 기초, 서울대학교 출판부, 1998.
7. 우정호, 발생적 수학교육원리에 관한 연구, 인천교육대학교 논문집, 제16집, 1981, p.187-205.
8. 황혜정 외, 수학교육학신론, 문음사, 2002.
9. Bazzini, L., Steiner, H. G.(Ed.), *Proceedings of the first italian-German bilateral Symposium on Didactics of Mathematics*, Pavia, Bielefele, 1989.
10. Bender, P., Schreiber, A., *Operative Genese der Geometrie*, Wien-Stuttgart 1985.

11. Boyer, Carl B., *A History of Mathematics*. John Wiley & Sons. New York 1968.
12. Boyer, C. B., *Myth, the muse, and mathesis*, The Mathematics Teacher, April1964, p.242-253.
13. Bruner, J. S., *Der Prozess der Erziehung*, Schwann Verl., Düsseldorf und Berlin 1976.
14. Burscheid, H. J., *Wissenschaftliche Organisation der Mathematikdidaktik JMD* 4 (1983), Heft 3, p.219-240.
15. Burscheid, H. J., *Eine Schulenbildung unter den Gymnasialdidaktikern desausgehenden* 19. Jahrhunderts, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 1984, Heft 6, p.191-195.
16. Cantor, Moritz, Geschichte der Mathematik. Band2. Teubner, Leibzig 1900.
17. Dankwerts, R., Vogel, D., *Ein Blick in die Geschichte* : Fermat und Kepler.In : mathematik lehren 1997 (81), p.59-61.
18. Dörfler, W., Mclone, R. R., *Mathematics as a school subject*, In ; Christiansen, B., Howson, A.G., Otte, M.(ed.) : Perspektives in Mathematics Education, Riedel, Dordrecht, 1986, p.49-97.
19. Fermat, Pierre de. *Abhandlungen über Maxima und Minima*(1629). Leipzig : Akad. Verlagsges., 1934.
20. Flegg, H. G., *The Philosophiy and Materials related to the history of Mathmatics Open University Course*, in : Athen, H., Kunle, H.(ed.) : Proceedings of Third International Congress on Mathematical Education, Karlsruhe 1976, p.306.
21. Flegg, H. G., *Some Questions on the teaching of the History of Mathematics*, Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematik 1978, Heft 2, p.67-69.
22. Freudenthal, H., *Soll der Mathematiklehrer etwas von der Geschichte der Mathematik wissen?* Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematik 1978, Heft2, p.75-78.
23. Führer, L., *Anwendnungsorientierung der Mathematik aus geschichtlicher Sicht*, mathematik lehren, Heft 19, Dezember 1986, p.42-48.
24. Gallagher, J. J., *Research summary on gifted education. Springfield*, III.: State Department of public Instruction, 1996.
25. Heymann, H. W., *Allgemeinbildung und Mathematik*, Weinheim und Basel, 1996.
26. Hischer, Horst, *Geschichte der Mathematik als didaktischer Aspekt*(2): Lösung klassischer Probleme mit Hilfe von Trisectrix und Quadratrix- ein Beispiel für den Sekundarbereich II. In: Mathematik in der Schule,32(1994)5.

27. Jones, P. S., *The History of Mathematics as a Teaching Tool*, Zentralblattfür Didaktikder Mathematik 1978, Heft 2, p.57-63.
28. Klein, F., *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus*. Band 1. Springer, Berlin, Goettingen, Heidelberg 1924.
29. Kronfellner, Manfred, *Historische Aspekte im Mathematikunterricht*, Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, 1998.
30. Kuhn, Thomas, *Die Structur wissenschaftlicher Revolutionen*, Suhrkamp, Frankfurt /Main 1981 (5.Auflage).
31. Lakatos, I., *Bewise und Widerlegungen*. Die Logik mathematischer Entdeckungen Wissenschaftstheorie, Wissenschaft und Philosophie, Band 14, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1979.
32. Lenné, H., *Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland*, Klett, Stuttgart, 1975 (2.ed).
33. Möller, R., *Mathematik in der Weiterbildung*, Eine Fallstudie zu einem Algebrakurs der University of Marylane, Verlag Franzbecker, Bad Salzderfurth 1989.
34. Nagaoka, R., *On the Roll that History of Mathematics play in Mathematics Education*. Why Should We teach Mathematics Also to Those Who Do NotLike It? Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematik 1989, Heft 5, p.176-179.
35. Oeser, E., *Theoriendynamik und Wissenschaftsevolution Mitteilungen der Oesterreichschen Gesellschaft fuer Geschichte der Naturwissenschaften*, Jg. 11 (1991), Heft 3-4, p.80-85.
36. Orton, R. E., *Two Theories of "Theory" in Mathematics Education*: Using Kuhn and Lakatos to Examine Four Foundamental Issues, For the Learning of Mathematics 2(Jund 1988), p.36-43.
37. Richenhagen, G., *Mathematikgeschichte und Mathematikdidaktik-Ueberlegungen am Beispiel des Funktionsbegriffs*. in: Steiner 1990, p.174-186.
38. Riedl, R., *Biologie der Erkenntnis*, Verlag Paul Parey, Berlin, Hamburg 1980
39. Rogers, L., *Implications of History of Mathematics for Teaching*, in: Athen,H., Kunle, H.(ed.): Proceedings of Third International Congress onMathematical Education, Karlsruhe 1976, p.306.
40. Scapolla, T., *Teaching mathematics through prooofs and refutations*: thesuggestions of Imre Lakatos, Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematik 1989, Heft 5, p.179-182.
41. Scriba, C. J., *Die Rolle der Geschichte der Mathematik in der Ausbildung von Schuelern und Lehrern*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereiniung

85(1983), p.113-128.

42. Sheffield, R., *Serving the needs of the mathematically promising.* In L. J. Sheffield (Ed.), Developing mathematically promising students (pp.43-55), Reston, VA: National Council of Teachers of mathematics.
43. Schramm, E., *Wissenschaftsgeschichte und naturwissenschaftlichernterricht-Bemerkungen zu einem komplizierten Verhältnis am Beispiel des Biologieunterrichts*, Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 40/6, p.209-213, 1987.
44. Schubring, G., *Das genetische Prinzip in der Mathematik-Didaktik*, Klett-Cotta Typoscript, 1978.
45. Spalt, D., *Die Bedrohung der Mathematikgeschichte durch die Didaktik Manuskript einies Vortrages*, gehalten auf der 21. Bundestagung für Didaktik der Mathematik in Wppertal, 10-13, März, 1987 (Kurzfassung: Beitraege zum Mathhematikunterricht 1987, p.311-314).
46. Steiner, H. G., *Philosophical nd Epistemological Aspects of Mathematicsand their Interaction with Theory and Practice in Mathematics Education*, For the Learning of Mathematics 7, 1 (1987. Feb), p.7-31.
47. Steiner, H. G.(Ed), *Mathematik-Philosophie-Bildung*, IDM-Series "Untersuchungen zum Mathematikunterricht", Band4, Aulis Verlag, Deubner, Köln 1982
48. Steiner, H. G., *Relations between historico-epistemological studies and research in mathematics education*, In: Bazzini/Steiner 1989, p.25-35.
49. Steiner, H.G., Winter, H.(Ed.), *Mathematikdidaktik*, Bildungsgechichte, Wissenschaftsgeschichte, IDM-Reihe Untersuchungen zum Mathematikunterricht, Band 4, Aulius Verlag, Deubner, Köln 1985.
50. Tietze, U., *Der Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II Curriculumentwicklung und didaktische Forschung*, math. dadact. 15, 1992, Band2, p.3-37.
51. Töplitz, O., *Das Problem der Universitaetsvorlesungen ueber Infinitesimalrechnung und ihre Abgrenzung gegenueber der Infinitesimalrechnung an hoehere Schulen,* Jahresberichte DMV 36(1927), p.88-100, p.94.
52. Toeplitz, Otto, *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung*, 2. impr. 1963.
53. Velikova, E., *Extracurricular work with creative-productive gifted students-program and activities.* In E. Barbeau et al(Ed.) Proceedings of the Topic study Group 4; Activities and Programs for Gifted Students(pp. 71-82). Riga: The 10'th International Congress on Mathematical Education) 2004.
54. Vohns, Andreas, *Mathematikgeschichte und Mathematikunterricht*, Referat Iim Rahmen des Seminars "Geschichte der Algebra".
55. Vollrath, Hans-Johaim, *Die Bedeutung methodishcer Variablen für den*

Analysisunterricht. In: Der Mathematikunterricht 22(1976)5, p.7-24.
56. Wagenschein, M., *Verstehen lehren*, Weinheim, 1989.
57. Wagenschein, M., *Pädagogische Aufsätze zum mathematischen Unterricht*(ed. E. Löffler) Der Mathematikunterricht 8, 1962, Heft 4.
58. Weil, A., *History of Mathematics*: Why and how? Proceedings of theInternational Congress of Mathematicians (Helsinki 1978), Vol.1: Helsinki 1980, p.227-236.
59. Wheatley, G.H., *Instructional Methods for the Gifted*, In Excellence In Education The Gifted, 1989 (National/State Leadership Training Institute, 1982.
60. Wittenberg, Alexander, Israel, *Bildung und Mathematik*. Klett (Stuttgart)1. Aufl. 1963, 2.Aufl. Klett: Stuttgart 1990.
61. Wittmann, E., *Grundfragen des Mathematikunterrichts*, Vieweg, Braunschweig, 1975 (3.Auflage).
62. Wittmann, E., *Mathdmatics education as a 'design science'*, EducationalStudies in Mathematics, 29, p.355-374, 1995.
63. Wuchterl, K., *Die neuesten wissenschaftstheoretischen Entwicklungen undihre Auswirkungen und die Philosophie der Mathematik sowie derendidaktischen Realisierungen*, Steiner1982, p.124-141.

Didactical Meaning of using History of mathematics inTeaching and Learning Mathematics

Department oh Mathematics, Inha University **Kyeong Hye Han**

In this article, the theoretical basis of applying mathematical history in lessons is inquired in various educational aspects.

It also covers the psychological genetic principle, mainly concerning the childish development and states that it has to be compatible with the historico-genetic principle, which is suggested mainly concerning the development of data. In addition, it evolves the arguments about the meaning of mathematical history in math lessons based on the mentioned aspects besides that in ordinary math lessons.

Next, the link between the apply of mathematical history and education for gifted children is examined. Last, cases of mathematic history applied to mathematic education is suggested mainly concerning the understanding of differential concepts.

Key Words: history of mathematics, learning mathematics, applying mathematical history, historico-genetic principle, psycho-genetic principle, new mathmatics,education for gifted children, genetic principle, didactics of differential concepts

2000 Mathematics Subject Classification: 01A05, 01A72, 97D40

ZDM classification: A30

논문접수 : 2006년 7월 심사완료 : 2006년 9월