동양 수학에서의 구결 및 그 교수학적 함의

진주교육대학교 수학교육과 **장혜원**
hwchang@cue.ac.kr

중국, 한국, 인도, 아라비아 등 동양 수학에서는 수학 내용을 구결, 즉 내용을 입으로 전하기 위해 싯구의 형식을 빌려 표현한 경우가 종종 있다. 본 연구에서는 우선 동양 수학책에서 발견되는 구체적인 구결 및 그것이 담고 있는 수학적 지식에 대해 고찰한다. 그리고 구결의 형식을 빌려 수학 지식을 제시한 이유에 대해 추론함으로써 수학 활동에서 구결의 역할에 대해 생각해보고, 나아가 수학교육적 관점에서 절차나 알고리즘 지도와 관련하여 구결을 활용하는 방법에 대해 제안한다.

주제어 : 동양 수학, 구결, 알고리즘, 산대, 수 구구, 정수의 연산 법칙, 단위 환산, 연립합동식, 급수, 부정방정식, 방정식

0. 서론

중국이나 조선 시대의 산학서를 보면 한문 교과서에 나올 법한 한시 형태가 눈에 띈다. 수학적 지식을 표현하기 위해 운을 담은 시의 형식을 빌린 것으로 흔히 구결(口訣)이라 말하는 것이다. 구결의 사전적 의미는 입으로 전하는 비결 또는 한문의 구절 끝에 다는 토에 해당하는데([2]), 본 논문에서는 전자와 관련하여 수학적 지식을 담고 있는 시 또는 노래 형식을 말하기로 한다.

오늘날 수학교육의 주도적인 흐름은 구성주의 관점에서 개념의 이해와 의미를 강조하는 추세이다. 그러나 알고리즘과 같은 자동적인 절차의 이용은 수학 활동에서 필수적인 요소이며, 또한 유창한 계산 알고리즘의 수행을 위해서는 한 자리 수의 기본 사칙 연산에 대한 수 구구를 알아야 한다. 그 대표적인 것이 곱셈 구구단의 암송이다. 여러 계산 절차를 수행하는 과정에서 매번 곱셈 구구의 의미를 상기하는 것은 시간적인 낭비일 뿐만 아니라 인지적인 낭비로 볼 수 있다. 따라서 곱셈 구구의 암송은 학교 수학에서 만나게 되는 대표적인 구결의 지위를 확보하고 있다. 구구단 암송에 적합한 우리나라의 구어나 리듬감은 외국의 시각에서 볼 때 우리나라 학생들이 수학을 잘하는 원동력으로 평가되기도 하며, 학교 현장에서는 특히 수학 부진아들에게 구구단을 쉽게 외우도록 하기 위하여 국악 및 동요를 비롯한 여러 버전의 구구단송을 이용하기도 한다([18]). 이와 같이 어떠한 사실이나 지식을 외울 필요가 있을 때 그 암

기를 용이하게 하기 위해 리듬 있는 가락으로 만들어 부르는 것을 학교 수학에서의 구결이라 할 수 있다.

이와 같이 학교 수학에서 다루어지는 구결의 역할 및 필요성을 생각할 때 수학사 속의 수학 활동에서도 구결이 발견될 것이라는 예측은 별 무리가 없다. 이러한 예측은 수학 외적인 영역에서 발견되는 구결에 의해 더욱 확고히 된다. 유휘가 <구장산술>을 주해하며 서문 앞부분에서 언급하고 있는 복희의 '팔괘'는 각각의 괘가 양효(—, 이어진 것)와 음효(--, 끊어진 것)의 두 종류 효(爻)중 3개를 선택하여 이루어진 것으로, 따라서 총 ${}_2H_3=2^3=8$개의 괘가 가능하다. 이 때 양효와 음효의 배열 모양을 쉽게 외우도록 하기 위해 이용한 구결이 송대에 나타난다. 유학자 주희(朱熹)는 <주역>을 주해한 책 <주역본의(周易本義)>에서 '팔괘취상가(八卦取象歌)'라 하여 8개 괘의 혼동스런 모양을 이해하고 기억하는 데 도움이 되고자 그 모양을 노래로 만들어 제시하였다([9, p.27]).

乾三連 ☰	坤六斷 ☷
震仰盂 ☳	艮覆碗 ☶
離中虛 ☲	坎中滿 ☵
兌上缺 ☱	巽下斷 ☴

여기서 세 글자 중 앞의 것은 괘의 이름이고 이어지는 두 글자가 모양을 묘사한 것이다. 예컨대 건(乾)이라는 괘의 모양은 이어진(連) 것 세 개(三)라는 것이다. 즉 양효 3개를 취한 것이다.

실제로 원리의 파악이나 개념의 이해보다는 실용적 관점에서 계산을 위주로 한 절차적 지식에 치중하였다고 알려지는 중국 수학에서는 이러한 구결이 종종 주목된다. 비단 중국 수학에서뿐만 아니다. 그 영향을 받은 조선 시대의 수학은 물론이고 인도의 수학에서도 그러한 특징이 드러나며 비교적 서양과의 교류가 잦았던 아라비아 수학에서도 그 필요성은 간과될 수 없었다.[1)]

본 연구에서는 동양 수학, 특히 중국, 한국, 인도, 아라비아 수학에서 발견되는 여러 가지 구결을 조사하고, 그것이 내포한 수학적 지식을 고찰하며, 수학적 지식의 제시를 위해 그러한 방법이 사용된 이유를 추론함으로써 수학 활동에서 구결의 역할에 대해 생각하고, 나아가 수학교육적 함의점을 도출하고자 한다.

1. 중국 수학과 한국 수학에서의 구결

여기서는 중국 및 조선 시대 산학서에 보이는 구결을 중심으로 고찰한다. 인용한

1) 본 논문에서는 고찰 범위를 동양 수학에 한정하기로 한다. 실제로 서양 수학에서 구결이 사용되었는가 하는 것은 차후의 연구 과제로 남는다.

산학서는 중국의 산학서로 중국 수학의 원형을 보여주는 최고의 산학서인 <구장산술>, 5세기 경으로 추측되는 작자 미상의 <손자산경> 및 <하후양산경>, 양휘(1238년 경~1298년 경)의 <양휘산법 승제통변산보(1274)>, 주세걸(1260년 경~1320년 경)의 <산학계몽(1299)>, 안지제의 <상명산법(1373)>, 정대위(1533~1606)의 <산법통종(1592)>이며, 조선 시대 산학서로 17세기 경선징(1616~?)의 <묵사집산법>, 최석정(1646~1715)의 <구수략>, 18세기 홍대용(1731~1783)의 <주해수용>, 홍정하(1684~?)의 <구일집>, 황윤석(1719~1791)의 이수신편 제21권인 <산학입문(1774)>, 19세기 이상혁(1810~?)의 <익산(1868)> 등이다. 이들 책에 나타나는 구결은 형식상 크게 두 종류로 볼 수 있는데, 주로 각운을 이용하여 문장에 운율을 부여함으로써 시적인 문장을 구성한 가결(歌訣)과 문학적인 측면의 고려 없이 다만 암송을 쉽게 하기 위해 만든 단순 구결이 있다. 다음은 구결에 담긴 내용에 근거하여 서술하였지만 그 형식상 구구합수, 근하유법, 낭수작근송, 정부술 등은 단순한 암송용 구결인 반면, 그 외의 것은 칠언절구 등의 형식을 띤 가결에 해당한다. 그러나 수학적 내용의 측면에 초점을 맞춘 본 논문에서는 한자어의 중국어 음에 따른 운율을 엄밀히 파악하기가 쉽지 않고, 다만 한자어의 우리 음을 달아도 대략적인 운을 확인할 수 있는 정도에 제한됨을 밝힌다.

1) 산대 배열

중국에서 시작되어 한국, 일본에까지 전래된 수 표기 도구인 산대는 철저하게 십진 위치적 기수법에 의거하여 배열되었으며, 따라서 계산을 하는 데 매우 유용한 도구였다. 1부터 9까지의 숫자를 그림 1과 같이 배열하는데, 자릿수에 따라 한 자리 건너 같은 표기를 반복하여 바로 옆 자리와 구분함으로써 혼동하여 잘못 읽는 것을 막고자 하였다. 다시 말해 일, 백, 만, …, 10^{2n}의 자리는 세워 놓고 십, 천, 십만, …, 10^{2n+1} 자리는 뉘어 놓아 표시하였다. 그 원리를 알려주는 구결은 <손자산경> 및 <하후양산경>에서부터 보이며 <산학계몽>에서는 종횡결(縱橫訣)이라는 이름으로 소개된다. 한편 조선 시대 산학서 중에는 <묵사집산법>에서 종횡법(從橫法)으로 설명하고 <산학입문>에서는 <산학계몽>의 종횡결을 포산결(布算訣)이라는 이름으로 소개하는 한편, 유사한 내용의 행산위(行算位)를 실었는데 그 내용은 다음과 같다.

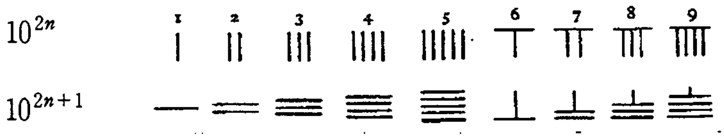

그림 1. 산대에 의한 숫자 표기법

<손자산경>에는 구결 앞에 '무릇 계산법은 우선 그 위치를 알아야 한다(凡算之法先識其位)'라고 적어 모든 계산의 출발점이 산대 배열임을 말하고 있다.

一縱十橫 百立千僵
千十相望 百萬相當 ([8, p.164])

<하후양산경>에서는 위에서 百萬이 萬百으로 바뀌고 다음의 두 구절이 첨가되는데, 6이상의 수에서 위에 놓인 하나의 산대가 나타내는 5와 5에서 다섯 개의 산대로 5를 나타내는 것의 차이를 설명한 것이다.

滿六已上 五在上方
六不積筭 五不單張 ([8, p.206])

<산학계몽>에서는 積筭을 積聚라 하였으며, 또다시 두 구절을 첨가함으로써 10이 되면 자리올림이 되는 십진법의 원리를 설명하고 <구장산술>을 들어 산대로 수를 표현하는 것이 산학의 기초임을 말한다. 또한 각 행의 마지막 글자 僵, 當, 方, 張, 當, 章에서 보이는 분명한 각운은 가결의 특징을 보여주는 예로 적절하다.

言十自過 不滿自當
若明此訣 可習九章 ([8, p.1318])

한편 <산학입문>의 구결은 특히 주목할 만하다.

零爲之立十當橫
百立千橫萬亦竪
億兆至會次次推
各當其上置五數 ([14, p.6])

우선 1행과 2행에서 천까지 설명한 다음, 만을 설명할 때 백과 비교하여 간접적으로 제시하는 것이 아니라 직접적으로 '역시 세운다(亦竪)'고 말하고 있다는 점에서 앞의 구결들과 차이가 있다. 더욱이 3행의 '지회(至會)'는 會를 다른 산학서에서는 마땅히 경(京)이라고 해야 하지만 우리나라 민간에서 사용되는 방법이라는 주석([14, p.7])을 첨가한 것으로 볼 때 이 구결이야말로 우리나라 고유의 수학을 담은 것이라 할 수 있다.

2) 구구 구결

오늘날과 마찬가지로 곱셈과 나눗셈을 하기 위해서는 한 자리 수의 곱에 대한 기본사항을 외우고 있어야 한다. <하후양산경>에서도 '무릇 곱셈과 나눗셈은 우선 구구를 알아야 한다(夫乘除之法 先明九九)'라 하여 같은 뜻을 밝히고 있다. 곱셈을 위해 필요한 구구단, 즉 '구구합수'가 있고, 나눗셈을 위해서는 '구귀제법'을 외워 이용하곤 했다.

진·한대의 고서 및 유물에서 구구단의 일부가 발견되지만([4, pp.378-379]), 九九八十一에서 一一如一까지 완전한 배열이 처음 보이는 곳은 <손자산경>이다. <산학계몽>, <상명산법>에도 있듯이 13, 14세기에 오면 그 순서가 뒤바뀌어 1단부터 시작하여 9단까지 제시된다. 조선 시대 산학서 중에는 9단부터 시작되는 <묵사집산법>과 1단부터 시작되는 <산학입문>, <구수략>이 있다.

一一如一
一二如二 二二如四
一三如三 二三如六 三三如九
一四如四 二四如八 三四一十二 四四一十六
一五如五 二五一十 三五一十五 四五二十 五五二十五
一六如六 二六一十二 三六一十八 四六二十四 五六三十 六六三十六
一七如七 二七一十四 三七二十一 四七二十八 五七三十五 六七四十二 七七四十九
一八如八 二八一十六 三八二十四 四八三十二 五八四十 六八四十八 七八五十六 八八六十四
一九如九 二九一十八 三九二十七 四九三十六 五九四十五 六九五十四 七九六十三 八九七十二 九九八十一

구구합수는 그 문자 배열로 보아 오늘날 구구단을 외우듯이 리듬감 있게 외워졌을 것으로 추측된다. 곱이 한 자리일 때는 리듬을 타기 위해 오늘날의 '는', 즉 등호에 해당하는 '如' 자를 첨가하였지만 곱이 두 자리가 되면 그것이 생략되고 곧바로 읽혀야 리듬이 맞는 것이다. 한편 식의 표현에 있어 二四如八은 二와 四 사이에 乘이 생략된 것이므로 전통 수학에서 연산자를 쓰는 방식에 따라 4×2=8로 해석되며 나머지도 위와 같이 표현할 수 있다. 조선 시대 사대부 황윤석이 '구구합수는 한쪽 절반이고 거꾸로 생각하면 다른 한쪽 절반(此止一半 倒念上一字又一半也)'이라고 언급한대로 그들은 곱셈 연산의 가환성을 염두에 두었다.

<구수략>에서는 곱셈 구구 외에 덧셈과 뺄셈에 대해서도 한 자리 수의 연산 결과인 수 구구에 대해 설명하고 있지만 사실 그것은 굳이 암기하지 않아도 직관적으로 해결되는 것이므로 구구의 백미는 역시 곱셈에 있다 할 것이다. 그런데 전통 수학에서는 나눗셈에 대해서도 구구를 만들어 불렀다. 바로 구귀구결이다. 곱셈 구구인 구구합수에 상응하여 나눗셈 구구를 의미하는 이 노래는 한 자리 수의 나눗셈에서 몫과 나머지에 대한 정보를 담고 있다.

중국에서는 <양휘산법 승제통변산보> 중권의 구귀신괄(九歸新括), <산학계몽>의 구귀제법(九歸除法), 조선에서는 <묵사집산법>의 구귀법(九歸法), <주해수용>의 구귀가(九歸歌) 등 산학서마다 약간 다른 이름과 형태를 띠는데, 내용상 큰 차이는 없다. 여기서는 <산학입문>의 구귀제법을 그대로 옮긴다.

一歸 一歸如一進 見一進成十
二歸 二一添作五 逢二進成十
三歸 三一三十一 三二六十二 逢三進成十
四歸 四一二十二 四二添作五 四三七十二 逢四進成十
五歸 五一倍作二 五二倍作四 五三倍作六 五四倍作八 逢五進成十
六歸 六一下加四 六二三十二 六三添作五 六四六十四 六五八十二 逢六進成十
七歸 七一下加三 七二下加六 七三四十二 七四五十五 七五七十一 七六八十四 逢七進成十
八歸 八一下加二 八二下加四 八三下加六 八四添作五 八五六十二 八六七十四 八七八十六 逢八進成十

九歸 九一下加一 九二下加二 九三下加三 九四下加四 九五下加五 九六下加六 九七下加七 九八下加八 逢九進成十

이 구결을 외워서 그대로 따르면 곧 구귀법의 알고리즘을 낳는다. 물론 노래를 잊었다 해도 위 노래의 원리는 어렵지 않으므로 곧 만들어 쓸 수 있다. 그 원리란 구결의 첫째 숫자는 제수이고 다음 숫자는 피제수의 각 자릿수이며 그 나눗셈의 몫과 나머지를 이어 쓰는 것이다. 예컨대 육오팔십이(6 · 5는 82)는 50÷6의 몫 8과 나머지 2를 나타내며, 피제수에 있는 5를 제수 6으로 나눌 때 8로 5를 치환하고 5 아랫자리에 2를 더하도록 한다. 이 원리를 고려하면 구결에 등장하는 용어의 뜻을 파악할 수 있다([14, p.49]). 이 구결 덕분에 삼격산인 일반적인 나눗셈 방법 대신 일격산인 구귀법과 이격산인 귀제법이 가능한 것이다. 이 외에도 나눗셈을 간편하게 실행하도록 돕는 또 다른 구결을 다수 발견할 수 있다. 즉 나눗셈의 편법을 위한 알고리즘을 담고 있거나 각각을 소개하는 구결들이다.

정신제 또는 (신외)감법이라 불리는 나눗셈법은 제수의 첫째 자리가 1인 경우에 사용하는 방법을 말한다.

減法根源必要知　卽同求一一般推
呼如身下須當減　言十從身本位除([8, p.1325])[2]

減法須知先定身　得其身數始爲眞
法雖有一何曾用　身外除零妙入神([8, p.1586])

제수의 첫째 자리가 1이 아닌 경우에는 정신제를 사용할 수 없으므로 그때의 나눗셈법인 귀제법에 대해 설명한 것과 귀제법을 사용하는 과정에서 특별한 경우에 사용하는 당귀법과 기일법을 설명한 구결도 있다.

惟有歸除法更奇　將身歸了次除之
有歸若是無除數　起一回將元數施
或遇本歸歸不得　撞歸之法莫教遲
若人識得中間意　筭學雖深可盡知([8, p.1589])

實少法多從法歸　實多滿法進前居
常存除數專心記　法實相停九十餘
但遇無除還頭位　然將釋九數呼除
流傳故泄眞消息　求一穿韜總不如([8, p.1326])

정신제를 이용할 수 없는 경우인데 제수의 첫째 자리를 1로 만들어 정신제를 이용하는 나눗셈법이 구일제(求一除)이다.

2) 이하 나눗셈 구결의 자세한 뜻은 [14]를 참조.

求一明敎置兩停 二三折半四三因
五之以上二因見 去一除零要定身([8, p.1591])

제곱근을 구할 때 두 자리마다 몫을 정하는 나눗셈법을 상제(商除)라 한다.

數中有術號商除 商總分排兩位居
惟有開方須用此 續商不盡命其餘([8, p.1592])

마지막으로, 제수를 피제수의 윗자리부터 빼나가면서 뺀 회수를 세어나가는 방법인 가일제(加一除)가 있다.

金蟬脫殼法如何 有隔無挨仔細科
加一除原爲要訣 頻頻拈去莫差訛([14]재인용)

3) 단위 환산을 위한 구결

단위 환산은 단위 사이의 기본 관계를 알고 있어야 가능하다. 오늘날 표준단위인 미터법이 편리한 점 중 하나는 10의 거듭제곱배 관계로 인해 단위 사이의 관계를 굳이 외울 필요가 없이 접두어의 의미만 파악하고 있으면 쉽게 환산할 수 있고 단위 사이에 논리적 구조가 들어맞는다는 것이다. 그러나 전통적인 단위 관계에는 10의 거듭제곱배가 아닌 것이 있다. 이를테면 무게 단위에서 근과 냥(1근=16냥), 또는 냥과 수(1냥=24수)의 관계 등이 대표적인 예이다. 간단한 계산으로 쉽게 도출할 수 있는 단편적인 사항이지만 구결로 만들어 불렀다는 사실은 그 관계가 수학 학습 및 일상에서 얼마나 절실히 요구되고 빈번하게 사용되었는가를 대변해준다. 특히 냥 수를 근으로 나타낼 때 사용하는 두 가지 구결로 근하유법과 냥수작근송이 <산학입문>에 보인다.

근하유법(斤下留法)은 1근이 못되는 냥의 수를 근으로 나타내는 것과 관련된다. 1근=16냥이므로 16냥보다 작은 1~15냥을 근으로 표현할 때 냥 수를 16으로 나누면 소수를 써서 근으로 나타낼 수 있다. 예컨대 1냥=0.0625근, 즉 6리 2호 5사이며 2냥=0.125근, 즉 1분 2리 5호이다. 다음에서 각 수의 자릿수는 분(分), 리(厘), 호(毫), 사(絲)이다.

一退六二五[3]	二留一二五	三留一八七五	四留二五
五留三一二五	六留三七五	七留四三七五	八留單五
九留五六二五	十留六二五	十一留六八七五	十二留七五
十三留八一二五	十四留八七五	十五留九三七五 ([14, p.21])	

한편 냥수작근송(兩數作斤頌)은 반대로 큰 냥 수를 근으로 나타내기 위해 역시 16으로 나눈 몫과 나머지를 담은 구결이다.

3) 한 자리 물러서므로 0.0625임을 의미한다.

(一) 六空四	(二) 一二空八
(三) 一八一二	(四) 二五空空
(五) 三一空四	(六) 三七空八
(七) 四三一二	(八) 五空空空
(九) 五六空四	(十) 六二空八 ([14, p.22])

(1)부터 (10)까지의 수는 100냥부터 100씩 증가하여 1000냥까지를 나타낸다. 따라서 100, 200, …, 1000냥까지를 근으로 고친 결과를 담고 있다. 가령 100냥이 몇 근인지 나타내려면 16으로 나누면 된다. 각각의 세 자리 또는 네 자리 수에서 뒤의 두 자리는 냥의 수, 앞의 하나 또는 두 자리는 근의 수를 나타내는 것이다. 예컨대 100냥을 근으로 나타내려면 16으로 나누어 6근과 나머지 4냥이다. 900냥은 56근 4냥이다.

4) 정수의 연산 법칙

중국 및 조선의 산학서에서 공통적으로 다루어지는 내용 중 하나가 정부술(正負術)이다. 그 기원은 <구장산술>인데 제8권 방정(方程)에서 오늘날 일차연립방정식에 해당하는 문제의 해법을 다루면서 음수의 출현이 불가피하므로 그 연산 규칙을 설명한 것이다([5]). 다시 말해 정부술은 방정술에 예속되어있는 사항이라 할 수 있기 때문에 <구수략>에서는 이를 '방정구결(方程口訣)'이라 부르고 있는 것이다([10]).

同名相除 異名相益
正無負之 負無正之
異名相除 同名相益
正無正之 負無負之

여기서 명(名), 곧 이름이란 부호를, 정(正)은 양수를, 부(負)는 음수를 뜻한다는 것을 알면 쉽게 추론할 수 있는 내용이다. 설명한 규칙은 오늘날과 동일하며 앞의 네 가지는 뺄셈 규칙, 이어지는 네 가지는 덧셈 규칙에 해당한다.

5) 연립합동식의 해법

오늘날 '중국인의 나머지 정리(Chinese Remainder Theorem)'라고 불리는 연립합동식 풀이의 기원이 되는 문제는 '손자의 문제'라고 일컫는, <손자산경>의 세 권중 마지막 권의 26번째 문제인 다음 문제이다.

물건의 개수를 알지 못한다. 3씩 세면 2가 남고, 5씩 세면 3이 남고, 7씩 세면 2가 남는다. 물건의 개수를 구하라.

손자의 문제는 식으로 표현하면 곧 연립합동식 $\begin{cases} x\equiv 2(\bmod 3) \\ x\equiv 3(\bmod 5) \\ x\equiv 2(\bmod 7) \end{cases}$을 푸는 문제이다. 일반적으로 $\begin{cases} x\equiv r_1(\bmod m_1) \\ x\equiv r_2(\bmod m_2) \\ x\equiv r_3(\bmod m_3) \end{cases}$인 x를 구하기 위해 $M=lcm(m_1,m_2,m_3)$, $M_i=\dfrac{M}{m_i}$이라 할 때, $\begin{cases} \mu_1 M_1\equiv 1(\bmod m_1) \\ \mu_2 M_2\equiv 1(\bmod m_2) \\ \mu_3 M_3\equiv 1(\bmod m_3) \end{cases}$인 μ_1, μ_2, μ_3를 구하여 각각의 식에 r_1, r_2, r_3를 곱하면 되므로 이후 절차는 쉽게 진행된다[4]. 따라서 해결의 관건은 각 법에 대해 M_i에 곱하여 1과 합동이 되도록 하는 μ_1, μ_2, μ_3를 찾는 것이다. 따라서 각 법에 대해 1과 합동이 되는 수는 역시 구결로 만들어 전하여 문제 풀이를 용이하게 한 것으로 보인다. 손자의 문제를 푸는 데 필요한 관계 $\begin{cases} 70\equiv 1(\bmod 3) \\ 21\equiv 1(\bmod 5) \\ 15\equiv 1(\bmod 7) \end{cases}$과 법 3, 5, 7 모두에 대해 0과 합동이 되므로 구한 특수해에서 빼도 좋은 최소공배수 105는 다음과 같은 구결로 만들어져 불리었다. 우선 <산법통종>에 나오는 구결이다([8, p.2216]).

三人同行七十稀	세 사람이 70살까지 함께 사는 것은 드문 일이다.
五樹梅花廿一枝	다섯 그루 매화나무에 가지가 21개있다.
七子團圓正月半	일곱 사람이 만날 때 한 달의 반이다.
除百零五便得知	105를 빼면 곧 터득할 수 있다.

앞의 세 구는 법 및 1과 합동인 수 3과 70, 5와 21, 7과 15를 제시하며 마지막 구에서는 구한 특수해 $(70\times 2)+(21\times 3)+(15\times 2)$에서 3, 5, 7을 법으로 0과 합동인 105를 빼도 주어진 연립합동식의 해가 됨을 알려준다. 한편 <산학입문>에서는 같은 내용을 천산송(天算頌)[5]이라는 이름 하에 다른 형태를 빌어 표현하였다.

三朋共暇七旬休	세 사람의 친구들이 함께 칠순에 한가하게 쉴 때
五鳳樓前訪昔儔	오봉루 앞의 옛날 무리들을 찾았다.
赤壁秋生寒月滿	적벽강에 가을이 오면 만월도 차갑고
介山春盡落花稠	개산에 봄이 가면 빽빽하게 꽃은 진다.

친구 셋은 3, 칠순은 70, 오봉루는 5, 옛 석(昔)은 21, 가을은 7월, 만월은 15, 봄이 간 것은 한식, 즉 3월이고 한식이 동지로부터 105째 날임을 뜻하여 역시 손자의 문제와 관련된다. 다른 한 가지는 다음과 같다.

4) 자세한 내용은 [13]을 참조.

5) 3, 5, 7이 모두 양(陽)에 속하여 천수(天數)이므로 천산이라 한다([14, p.90]). <구수략>에 보면 1, 3, 5, 7, 9는 천수, 2, 4, 6, 8, 10은 지수(地數)에 해당한다.

三人同行七十稀	세 사람이 70살까지 함께 사는 것은 드문 일이다.
五老峰頭卄廿餘	오로봉 산머리에 21이 남았네.
七月十五初秋夜	7월 15일은 첫 가을 밤이요.
冬至寒食百五除	동지에서 한식인 105를 뺀다.

이 밖에 특히 주목할 것은 <묵사집산법>이다. 중권의 인잉구총문에서 특별한 유형의 연립합동식 문제를 풀기 위해 만든 3개의 구결과 그 예가 되는 3개의 문제를 다룬다([1]). 그 중 첫째 것은 역시 손자의 문제를 풀기 위한 해법이다.

三人同行七十稀
五鳳樓前二十一
七月秋風三五夜
冬至寒食百五除

둘째 구결은 법 5, 7, 9에 대한 것이다. $\begin{cases} 126(=2\cdot7\cdot9)\equiv1(\mathrm{mod}\,5) \\ 225(=5\cdot9\cdot5)\equiv1(\mathrm{mod}\,7) \\ 280(=8\cdot5\cdot7)\equiv1(\mathrm{mod}\,9) \end{cases}$ 와 lcm(5, 7, 9)=105×3=315임을 나타내며, 예시 문제로 다룬 $\begin{cases} x\equiv3(\mathrm{mod}\,5) \\ x\equiv1(\mathrm{mod}\,7) \\ x\equiv2(\mathrm{mod}\,9) \end{cases}$를 위한 것이다.

五人同居兩七九	다섯 명이 같이 사는데 양(2)×7×9이고
七貴公侯五九五	일곱 명의 귀한 공후는 5×9×5이요,
重陽節滿八五七	중양절(9월 9일)에는 가득히 8×5×7이고
冬至寒食三合除	동지에서 한식까지의 3배를 뺀다

세 번째는 법 7, 9, 11에 대한 다음 구결이다. $\begin{cases} 99 \equiv1(\mathrm{mod}\,7) \\ 154(=2\cdot77)\equiv1(\mathrm{mod}\,9) \\ 441 \equiv1(\mathrm{mod}\,11) \end{cases}$ 와 lcm(7, 9, 11)=693임을 나타내며, 예시 문제는 $\begin{cases} x\equiv3(\mathrm{mod}\,7) \\ x\equiv2(\mathrm{mod}\,9) \\ x\equiv1(\mathrm{mod}\,11) \end{cases}$이다.

七月七日新月夕	蠡斯生子九十九
重陽佳節風景好	兩叟同庚七十七
至月寒天酒價錢	半貫纔除五十九
六百九十三春和	除夜餘興倣此識

7월 7일 초승달의 저녁에, 방아깨비 알을 99개나 낳았네.
중양 좋은 절기의 풍경이 좋고, 두 노인이 동갑으로 77세(2×77)라.
지월(11월) 추운 날의 술값이, 반관(500문)에 겨우 59문 제한다(441문).
693의 봄날의 따사로움과, 제야의 여흥이 이와 비슷함을 알리라.

6) 급수

중국 및 한국의 전통 수학에서 평면 또는 공간에 일정한 모양으로 물건을 쌓을 때 총 개수를 구하는 방법을 '퇴타술(堆垜術)'이라 한다. 오늘날로 말하면 급수에 해당하는 문제이다. <구장산술>에서 기본적인 수열을 다루고 있지만 보다 본격적인 급수 문제는 <몽계필담>, <양휘산법>, <산학계몽>, <사원옥감>, <상명산법> 등에서 찾아볼 수 있다. 이 책들의 영향으로 조선 수학에서도 급수 문제를 찾는 것은 어렵지 않고 특히 <익산>은 급수에 대해 구조적으로 접근하여 창의적 결과를 얻은 훌륭한 연구로 평가된다([6], [11]).

<상명산법>에는 퇴타술의 기본 공식을 외우기 위한 구결이 소개되어 있다. <상명산법>은 <경국대전>에 적힌 조선 시대 산학의 취재 과목인 상명, 계몽, 양휘를 일컫는 세 가지 수학책 <산학계몽>, <양휘산법>, <상명산법> 중 첫 번째 취재 과목으로 선택될 정도로, 간결하고 이론보다 문제 풀이 위주로 구성된 책이다([12, pp.10-11]). 따라서 <상명산법>은 기본적인 계산 방법 및 자주 사용되는 수학의 기초 지식이 주를 이루며, 그와 같은 맥락에서 퇴타술의 공식을 쉽게 외워 사용하게 하려는 저자의 의도를 추측한다면 다음과 같은 구결의 출현 역시 자연스럽다.

缶瓶堆垜要推詳　　脚底先將闊減長
餘數折來添半箇　　併歸長內闊乘相
再將闊搭一乘實　　三以除之數便當
若筭平尖只添一　　乘來折半法如常
三角果垜也須知　　脚底先求幾箇兒
一二添來乘兩遍　　六而取一不差池
要知四角盤中果　　添半仍添一箇隨
乘此數來以爲實　　始三而一去除之([8, p.1611])

부병퇴타는 상세히 생각할 필요가 있다.
먼저 아랫면의 세로에서 가로를 빼는 것이 마땅하다.
그 나머지를 나눈 다음 반개를 더한다.
다시 세로를 더하고 그것을 가로와 서로 곱한다.
또 가로에 1을 더한 것을 곱한다.
이것을 3으로 나눈 수가 곧 구하는 값이다.

평첨초를 계산할 경우에는 다만 1을 더하여
곱한 다음 반으로 나누는 규칙이 늘 같다.

삼각타 또한 마땅히 알아야 한다.
먼저 아랫면이 몇 개인지 구하고
1과 2를 더한 다음 양쪽으로 곱한다.

여섯 중 하나를 취하는 것과 다름없다.

사각 쟁반 속의 과자도 알 필요가 있다.
반개를 더하고 한 개를 더한 다음
이 수를 곱하여 피제수로 한다.
비로소 셋 중 하나로 이를 덜어낸다.

이 구결은 4개의 급수 공식을 담고 있다. 부병퇴타, 평첨초, 삼각타, 사각타가 그것이다. 부병퇴타는 물건을 추동6) 모양으로 쌓았을 때 총 개수인 심괄의 극적술([3])에서 윗면인 직사각형의 한 변이 1인 경우를 말한다. 따라서 아랫면의 긴 변(d)과 짧은 변(c)이 주어질 때 윗면의 긴 변은 d-c+1, 짧은 변은 1, 높이가 c인 경우의 총 개수가 $\{(\frac{d-c}{2}+\frac{1}{2})+d\}c(c+1)\times\frac{1}{3}$ 임을 말한다([11]). 한편 평첨초는 평면에서 삼각형 모양으로 배열하는 것으로, 1부터 n까지의 자연수의 합인 급수 $1+2+3+\cdots+n$을 말하며, 그 합은 $\frac{n(n+1)}{2}$ 로 표현된다. 삼각타와 사각타는 삼각수 개수의 정삼각형과 사각수 개수의 정사각형을 입체로 쌓아올린 것이므로 각각 $1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+3+\cdots+n)$과 $1+2^2+3^2+\cdots+n^2$이다. 공식 $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ 와 $\frac{1}{3}n(n+1)(n+\frac{1}{2})$로 계산된다는 것이 구결에 담겨 있다. 각 공식이 어떻게 유도되었는지에 대한 이해가 생략된 채 공식을 쉽게 외우기 위한 구결을 만든 것이다.

2. 인도 수학과 아라비아 수학에서의 구결

구결은 중국 수학이나 한국 수학만의 특징은 아니다. 인도, 아라비아 수학에서도 구결을 찾아볼 수 있다. 인도 수학의 경우, 초기에는 기록 문화가 매우 빈약하였고([17]), 인도 문화에 관한 최초의 기록이라 할 수 있는 베다경전의 내용 역시 처음에는 구전되었다고 한다([19]). 이렇듯 기록 문화의 결여는 상대적으로 구결에 의한 전래를 조장하였고, 인도 수학책에서 발견되는 구결 역시 이러한 맥락에서 이해할 수 있다.

1) 부정방정식의 해법

5세기 인도의 아리아바타(Aryabhata)는 소위 디오판토스 방정식이라 일컫는 부정방

6) <구장산술>에서 다루는 입체도형 중 하나로, 위, 아래 면이 직사각형인 사각뿔대와 유사한 형태로 생긴 도형을 말한다.

정식 $ax-by=c$를 풀기 위한 알고리즘을 난해한 구결로 만들어 그의 책 <아리야바티야(Aryabhatiya, 499)>에 싯구 32, 33번째로 소개하였다. 그 난해함 때문에 의미를 파악하기 어려우나 다행히도 제자 바스카라 I[7]이 천문에 관한 24개의 구체적인 문제를 통해 알고리즘을 예시한 덕분에 그 의미를 파악할 수 있다고 한다. 바스카라 I은 원문에 빠진 몇 단계를 첨가하면서 그 알고리즘을 쿠타카(kuttaka), 즉 분쇄기라고 칭하였다. $ax-by=c$꼴의 부정방정식을 풀기 위한 알고리즘은 다음과 같다([20]).

더 작은 항에 해당하는 약수를 나누어라.
그 나머지와 더 작은 항에 해당하는 약수를 서로 나누어간다.
마지막 나머지에 적절한 정수를 곱하여 (나누기 과정에서 몫의 개수가 짝수이면) 항들의 차[8]를 더하고 (홀수이면) 빼서 끝에서 두 번째 나머지에 의해 나누어지도록 한다.
몫을 일렬로 아래로 배열하라.
그 아래에 선택한 정수를 놓고, 다시 그 아래 방금 몫[9]을 써라.
끝에서 두 번째 수에 바로 위의 수를 곱하고 바로 아래 있는 수를 더한다.
이 과정을 반복하여 더 작은 항에 해당하는 약수로, 얻은 마지막 수를 나누어라.
그리고나서 그 나머지에 더 큰 항에 해당하는 약수를 곱하고, 더 큰 항을 더하라.
그 결과가 두 약수에 대응하는 수이다.

이제 부정방정식 $123x+8=20y$를 이 알고리즘에 따라 풀어보자. $123x$가 더 작은 항에 해당하며 $20y$가 상대적으로 더 큰 항에 해당한다. 따라서 더 작은 항에 해당하는 약수인 123을 더 큰 항에 해당하는 약수 20으로 나눈다.

$$123=20\times 6+3$$

이 식에서 나머지 3으로 더 작은 항의 약수 20을 나누는 식을 반복하여 다음을 얻는다.

$$20=3\times 6+2$$

$$3=2\times 1+1$$

나누기 과정이 2개, 곧 짝수이므로 마지막 나머지 1에 어떤 정수를 곱하여 항의 차 8을 더한 결과가 끝에서 두 번째 나머지인 2로 나누어지도록 어떤 정수를 선택한다. 2가 가능하다. 물론 그 외의 짝수를 선택해도 알고리즘은 성립한다.

$$1\times(2)+8=2\times(5)$$

몫을 아래로 배열하고 이어 선택한 정수 2와 두 번째 나머지 2로 나눈 몫 5도 순서대로 배열한다.

7) 12세기의 수학자 바스카라(1114~1193?)와 구별하여 이와 같이 지칭한다.
8) x항과 y항의 차를 말하므로 결국 상수항이다.
9) 두 번째 나머지에 의해 나누어지도록 하였으므로 그 때의 몫을 말한다.

6
6
1
2
5

이제 알고리즘에 나오는 연산을 시행하면 다음을 얻는다.

	①	②	③
6	6	6	$44\times6+7=271$
6	6	$7\times6+2=44$	44
1	$2\times1+5=7$	7	
2	2		
5			

이 때 특수해 $x=44$, $y=271$을 얻는다. 이로부터 일반해 $x=44+20k$, $y=271+123k$를 얻을 수 있고, 이 알고리즘은 상수항이 음인 경우에도 일반성을 잃지 않음을 확인할 수 있다.

2) 방정식의 해법

대수 algebra와 알고리즘 algorithm의 어원이라 일컬어지는 9세기 아라비아의 위대한 수학자 알콰리즈미(al-Khowârizmî)와 그의 책 제목 알자브르 알무카발라(al-jabr w'al-muqâbalah)는 잘 알려져 있다. 책의 제목은 방정식 풀이에서 이용되는 두 가지 절차 알자브르 al-jabr와 알무카발라 al-muqâbalah를 빌어 쓴 것이며, 각각 음의 항을 소거하는 것과 양의 항을 소거하고 간단히 하는 것을 의미한다. 이 절차는 구결로 만들어졌고 아랍계 학교에서 일반적으로 알려지게 되었다. 대략 12세기 이후에 쓰인 대수책에서 발견되는 다음과 같은 내용이다([17, p.389]).

음의 항을 소거하라. 그리고 나면,
al-jabr를 하여 복구한다.
동류항을 더하라.
이것을 al-muqâbalah라고 한다.

이것은 음의 항을 없애기 위해 양변에 더해주는 과정 알자브르를 시행한 다음, 동류항을 간단히 하는 알무카발라를 해야한다고 알려준다. 예컨대 $bx+2q=x^2+bx-q$로부터 알자브르에 의해 $bx+2q+q=x^2+bx$, 다시 알무카발라에 의해 $3q=x^2$으로 변형시키는 과정을 말한다.

3. 결론

지금까지 고찰한 내용을 토대로 하면 동양 수학에서 수학 내용을 구결로 만든 이유는 수학적 지식의 암기를 돕기 위한 것이라 할 수 있다. 즉 쉽게 익혀서 사용하게 하려는 교육적 목적을 지닌 도구적 성격의 것이다. 중국이나 조선에서 산학 취재를 준비하기 위해 산학서의 내용을 그대로 외워야 했던 상황이나 인도에서 기록 문화가 빈약하여 구전이 성행했던 상황을 생각하면 납득할 수 있을 것이다. 이렇듯 전통적인 수학 활동의 성격상 그 범위가 수학자 집단에 국한된다는 제한점이 있긴 하지만 구결을 통한 수학적 지식의 표현이 수학의 보급 및 확산을 조장하였고 수학 발달에 상당한 기여를 하였을 것으로 추정된다. 따라서 손쉬운 학습과 암기를 통한 지식의 보급이라는 구결의 역할은 오늘날 우리의 교육적 관심을 불러일으키기에 충분하다.

또한 구결이 담고 있는 수학적 지식의 내용 면에서 두 가지 경향을 구별할 수 있는데, 산대의 배열 원리를 담은 구결처럼 개념이나 원리를 설명한 것과 계산 절차나 알고리즘을 담고 있는 경우이다. 특히 후자와 관련된 구결이 다수 있었다. 이에 학습의 용이성이라는 목적에 의해 원리에 대한 이해가 생략된 채 절차적 지식을 가르치는 문제가 정당화될 수 있는지에 대한 논의는 수학교육적 관점에서 의미 있을 것이다.

여기서 수학교육적 관점으로부터 논의 가능성이 있는 두 가지 측면을 생각할 수 있다. 하나는 알고리즘에 대한 강조와 관련된다. 전술한 바와 같이 구결로 다루어진 수학 내용을 양분할 때 구귀제법, 퇴타술의 공식, 아리아바타의 부정방정식 해법, 알콰리즈미의 방정식 풀이 절차 등 대부분이 계산 공식이나 알고리즘을 다룬 것이다. 이는 암기라는 구결의 역할과도 직결된다. 한편 오늘날 학교 수학은 공식이나 알고리즘을 적용한 계산력의 강조보다는 개념 중심이 되어야 한다고 가정된다([15]). 그 이유 중 하나를 학교 밖에서 계산기나 컴퓨터를 광범위하게 이용할 수 있다는 점에서 찾을 수 있다. 그러한 기계가 흔치 않았을 때는 복잡한 계산을 잘 수행하도록 준비시키는 것이 학교 수학의 중요한 역할이었지만 이제는 수학적으로 사고하는 것이 더 중요한 문제가 되면서 탁월한 계산력은 더 이상 그렇게 중요한 수학교육 목표가 아닌 것이다. 적어도 과거에 비하면 분명히 그러하다. 계산력 말고도 문제해결, 어림, 수 감각, 자료 정리, 수학적 사고력 등 오늘날 주목받고 있는 수학적 주제는 새롭게 생겨나고 있다. 다룰 것이 많다보니 이제는 공식이나 알고리즘에 대한 강조가 약화되는 것이 사실이다. 그러나 알고리즘은 수학 활동에 필수적인 것이다. 정보처리 심리학에서 말하는 시간이나 기억 장치의 효율성을 굳이 거론하지 않더라도 수학 활동시 알고리즘이 없다고 가정할 때 발생할 사고의 간헐적 단절을 생각하면 쉽게 납득이 가는 사실이다. 결과적으로 동양 수학에서 발견되는 구결의 역할은 오늘날 수학 학습에서도 개선된 모습으로 이어질 수 있을 것이다.

다른 하나는 바로 그러한 구결이 단순한 암기를 통한 적용이었는가, 아니면 내용 학습이 충분히 이루어진 후 암기를 위한 전략이었는가 하는 것이다. 계산 공식이나

알고리즘이 수학 활동에 필수적임을 부정하기 어렵지만 구결에는 그 원리에 대한 설명이나 타당성에 대한 설명은 생략되어 있다[10]. 중국 수학의 원조격인 <구장산술>의 서술 방식에서 비롯된 문제와 해답 제시에 이어지는 알고리즘적 특성의 풀이를 상기한다면, 그리고 구결이 다수 등장하는 중국의 수학책이 주로 수학 입문서로 의도된 책이었음을 주목한다면 유사한 맥락에서 수학책의 구결은 내용의 배경 지식이나 근거에 대한 이해가 충분하지 않은 상태에서 지도되었을 가능성을 배제할 수 없다. 실제로 중국 수학에서 연립합동식의 해법은 13세기에 진구소에 의해 완벽하게 이론화되었지만 그 이후 19세기까지 손자 문제 해법 수준의 지식이 계속 전해진 이유 중 하나로 구결의 단순한 적용을 넘어 해법의 구조에 대해 더 이상의 이해를 추구하지 않은 지적 태만을 생각해볼 수 있다.

그러한 대비점에 초점 맞춘다면 오늘날 수학학습 심리학자인 스켐프(R.Skemp)가 말하는 도구적 이해와 관계적 이해의 개념([16])을 통해 구결의 역할을 재조명해 보는 것은 의미 있는 일이라 생각된다. 다시 말해 구결은 도구적 이해 수준에서 학습되었을 가능성이 있는 것이다. 두 종류의 이해를 구별 짓는 결정적인 요소는 망각시 지식의 재생 가능성, 즉 관련 지식을 잊었을 때 구성해낼 수 있는지의 여부인데, 암기라는 구결의 역할 덕분에 구결의 학습 결과는 양쪽의 이해가 모두 가능한 것이다. 구결을 도구적 이해 또는 관계적 이해로 학습했는지에 따라 학습 결과는 다른 위상에 있다할 것이다. 이렇게 보면 스켐프의 주장대로 관계적 이해가 더 바람직한 것으로 추구되지만, 일시적으로 도구적 이해 수준에서 구결을 적용하고 차후 그 원리를 탐구하는 학습 과정을 주장할 수도 있다.

그렇다면 동양 수학에서 많은 사람들에게 수학적 지식의 학습과 암기를 돕기 위해 이용된 구결의 의미를 오늘날 수학교육에서 살릴 수 있는 방안 또한 함축적이다. 수학 학습에서 구결의 활용 가능성을 모색해본다.

가장 직접적으로 생각할 수 있는 것은 수학적 지식을 담은 구결을 만들어 보는 활동이다. 앞서 고찰한 구결은 한자에 익숙하지 않고 과거 또는 다른 나라의 싯구의 리듬을 타기 어렵기 때문에 진정한 구결의 맛을 음미하는 데는 한계가 있을 것이다. 따라서 암기할 필요가 있는 수학적 지식, 예컨대 삼각함수의 관계 등을 리듬 있는 구절로 압축시킬 수 있다면 구결을 만드는 활동까지 의도할 수 있다. 그러나 역시 한계가 따르므로 본격적인 활용의 측면에서 두 가지를 생각할 수 있다. 하나는 구결에 담긴 수학적 지식을 탐구하도록 하는 것이다. 중국 및 조선 시대 산학서에 제시된 많은 해법이 원리에 대한 설명 없이 절차만을 제시하고 있기 때문에 그 절차나 공식의 타당성에 대한 탐구는 훌륭한 수학 학습 활동이 된다([7]). 구결 역시 원리에 대한 설명이 없기 때문에 같은 맥락에서 구결의 내용에 대한 타당성 및 효율성을 탐구하는 것은 의미 있는 학습 활동이 될 가능성이 높다. 학년 수준에 따라 다르겠지만 수학적 의미

10) 각 알고리즘의 타당성에 대한 검토는 본 연구의 범위를 벗어나므로 참고문헌을 참조하면 될 것이다.

에서의 엄밀한 증명이 아니더라도 여러 가지 사례에 알고리즘을 적용해보는 경험은 직관적 확신에 많은 도움이 될 것이고 출발점은 이것으로 충분해 보인다. 내용 자체에 대한 이해가 충분하다면 다음 단계로 생각할 수 있는 것이 내포된 절차의 적용 범위라는 측면이다. 그 절차가 모든 경우에 적용되는 것인지, 그렇지 않다면 모든 경우에 적용 가능하도록 일반화 가능한지를 생각해보거나, 아니면 다른 경우에 적용 가능한 절차를 고안하여 구결을 만들어 보는 것도 바람직한 학습 활동이 될 것이다. 학교수학을 벗어난 주제이기는 하지만 몇 개 문제에만 국한되어 적용되는 연립합동식을 위한 구결이 대표적인 사례이다. 이것은 학습의 초기 단계에서 동기 유발 자료로 매우 유효할 것이며, 절차의 적용 경우를 고려하여 일반화하는 것이 가능할 것이다.

다른 한 가지는 구결을 적용하여 해결할 수 있는 적절한 문제 상황을 만들어 보는 것이다. 흔히 문제 제기(Problem Posing)라고 말하는 활동에 속하는 것으로, 문제를 만들 수준이 된다는 것은 이미 이해를 완성했다고 할 수 있고, 혹은 조금 미흡한 이해를 완성시킬 수 있는 묘책으로 간주된다. 이를테면 알콰리즈미의 방정식 해법을 적용할만한 문제를 내고 그것을 풀면서 그 알고리즘이 적절한지, 보충되어야 할 점은 없는지, 오늘날과 차이가 있는지 등에 대해 재고하는 것은 알고리즘을 단순히 암기해야 할 절차가 아닌 수학적 지식의 압축물로 간주하도록 할 것이다.

참고 문헌

1. 경선징, 묵사집산법(천 · 지 · 인), 유인영, 허민 역, 교우사, 2006.
2. 두산동아, 동아백년옥편, 두산동아, 2004.
3. 심 괄, 몽계필담, 최병규 역, 범우사, 2002.
4. 오문준 편, 중국수학사대계, 제1권, 북경사범대학출판사, 1998.
5. 유 휘, 구장산술, 차종천 역, 구장산술 주비산경, 범양사출판부, 2000.
6. 이상혁, 익산(상 · 하), 홍성사 역, 교우사, 2006.
7. 장혜원, 조선시대의 산학서 <구일집>의 내용 분석 및 교육적 활용 방안 탐구, 대한수학교육학회지 수학교육학연구 13(2003), No.4, 429-446.
8. 정옥수 외 편, 중국역대산학집성 상 · 중 · 하, 산동인민출판사, 1993.
9. 주백곤 외, 易學漫步, 1997, 김학권 역, 주역산책, 예문서원, 1999.
10. 최석정, 구수략(건 · 곤), 정해남, 허민 역, 교우사, 2006.
11. 홍성사, 朝鮮 算學의 堆垛術, 한국수학사학회지 19(2006), No.2, 1-24.
12. 홍성사, 홍영희, 朝鮮의 算學訓導와 算學敎授, 한국수학사학회지 19(2006), No.3, 1-20.
13. 홍영희, 不定方程式의 歷史, 한국수학사학회지 18(2006), No.3, 1-24.
14. 황윤석, 이수신편 제21권 산학입문, 강신원, 장혜원 역, 교우사, 2006.

15. NCTM, *Curriculum and Evaluation STANDARDS for School Mathematics*, 1989.
16. Skemp R.R., *The Psychology of Learning Mathematics*, Lawrence Erlbaum Associates, 1987.
17. Smith, D.E., *History of Mathematics*, volume I, II, 1958.
18. 기탄교육 : http://www.gitan.co.kr/Education/19danSong/19dan_99.asp?mn=H27
19. The MacTutor History of Mathematics Archive : http://www.gap-system.org/~history/
20. Simon Fraser University(Canada) department of mathematics : http://www.math.sfu.ca/histmath/India/5thCenturyAD/Kuttaka.html

Mathematical Rhymes in Oriental Mathematics and Their Didactical Implications

Dept. of Math. Education, Chinju National University of Education **Hye Won Chang**

The purpose of this study is to investigate the meaning and roles of rhymes in oriental mathematics. To do this, we consider the rhymes in traditional chinese, korean, indian, arabian mathematical books and the mathematical knowledge which they implicate. And we discuss the reasons for which they were often used and the roles which they played. In addition, we suggest how to use them in teaching mathematics.

key words : oriental mathematics, rhymes, algorithm, counting rods, number facts, conversion of units, finite series, indeterminate equations, equations

2000 Mathematics Subject Classification: 01A13, 01A35, 01A45, 01A50, 97D40

ZDM Classification: A30

논문접수 : 2006년 8월 심사완료 : 2006년 10월