

## 감마분포 공정을 위한 변동계수 관리도의 통계적 설계

이동원\* · 백재원\*\* · 강창욱\*\*\*

\*BOSCH-KAMCO CLP

\*\*한양대학교 산업공학과

\*\*\*한양대학교 정보경영공학과

## The Statistical Design of CV Control Charts for the Gamma Distribution Processes

Dong-Won Lee\* · Jae-Won Paik\*\* · Chang-Wook Kang\*\*\*

\*Dept. of Customer order Logistics & Material/Production Planning, BOSCH-KAMCO

\*\*Dept. of Industrial Engineering, Hanyang University

\*\*\*Dept. of Information & Industrial Engineering, Hanyang University

Recently, the control chart is developed for monitoring processes with normal short production runs by the coefficient of variation(CV) characteristic for a normal distribution. This control chart does not work well in non-normal short production runs. And most of industrial processes are known to follow the non-normal distribution. Therefore, the control chart is required to be developed for monitoring the processes with non-normal short production runs by the CV characteristics for a non-normal distribution. In this paper, we suggest the control chart for monitoring the processes with a gamma short runs by the CV characteristics for a gamma distribution. This control chart is denoted by the gamma CV control chart. Furthermore evaluated the performance of the gamma CV control chart by average run length(ARL).

**Keywords :** Control chart, Coefficient of variation, Average run length, Short production runs, Gamma distribution

### 1. 서론

관리도(Control Charts)는 공정을 모니터링 하여 공정에 존재하는 변동(variability)의 이상원인(assignable cause)을 찾아내기 위해 널리 사용되는 효율적인 통계적인 공정관리 도구이다. 또한 이것은 합리적으로 정한 관리한계선을 이용하는 그래프이다.

최근의 생산 공정은 짧은 생산주기를 갖는 공정으로 변하고 있다. 이러한 공정에 전통적인 관리도를 적용하는 것은 통계적으로 공정이 불안정한(unstable) 상태라는 문제를 발생시킨다. 최근에는 이러한 공정을 모니터링하기 위해 변동계수(coefficient of variation : CV)의 특징을 이용하여 짧은 생산주기를 갖는 정규분포 공정의 변동을

효율적으로 모니터링 할 수 있는 정규분포 CV 관리도가 연구되었다[4]. 그러나 짧은 생산주기를 갖는 공정이 감마분포를 따르는 경우, 정규분포 CV 관리도의 적용은 이상원인에 대한 관리도의 민감도가 떨어지는 문제가 있다. 따라서 짧은 생산주기를 갖는 공정이 감마분포를 따르는 경우에 적합한 감마분포에 관한 CV 관리도의 연구가 필수적이다. 하지만 현재까지는 감마분포 변동계수의 확률분포에 대한 연구가 미흡하고, 이 확률분포를 이용하여 관리도에 적용한 연구가 없었다. 본 논문은 짧은 생산주기를 갖는 감마분포 공정을 효율적으로 모니터링하기 위해 통계적으로 감마분포 변동계수의 특징을 이용하여 감마분포 변동계수에 관한 관리도를 설계한다.

본 논문에서는 짧은 생산주기를 갖는 공정이 감마분

포를 따르는 경우에 감마분포 변동계수의 확률분포로 유도한 신뢰구간을 이용하여 여러 가지 제품의 변동을 효율적으로 모니터링하기 위한 관리도를 제안한다. 이 관리도를 본 논문에서는 감마분포 CV 관리도라 한다. 관리도를 설계하기에 앞서 짧은 생산주기를 갖는 감마분포 공정에 기존의 정규분포 CV 관리도를 적용했을 경우 수행도 분석을 통하여 어떠한 문제가 발생하는지 알아보고, 감마분포 CV 관리도의 필요성을 검토해본다. 다음으로 짧은 생산주기를 갖는 감마분포 공정에 적합한 감마분포 CV 관리도를 통계적으로 설계한다. 마지막으로 앞에서 설계된 감마분포 CV 관리도의 수행도 분석을 통하여 짧은 생산주기를 갖는 감마분포 공정의 변동을 모니터링하기 위한 관리도로서의 적합성에 대한 평가를 한다.

## 2. 감마분포 공정에 정규분포 CV 관리도 적용

### 2.1 감마분포 공정

감마분포는 물리적인 현상을 표현하는데 유용한 분포이므로, 여러 분야에서 광범위하게 사용되고 있다[3]. 본 논문에서는 공정의 데이터가 감마분포 모집단으로부터 발생하는 공정을 감마분포 공정이라 정의한다. 이러한 감마분포 공정의 예를 들어보면 다음과 같다. Monfort[6]는 섬유지름의 분포가 감마분포를 따른다는 것을  $\chi^2$  적합도검정을 통하여 증명하였다. 그리고 재료의 인장강도의 분포, 파괴강도의 분포는 일반적으로 감마분포, 와이블 분포 등을 따른다.

### 2.2 정규분포 CV 관리도

본 논문에서는 정규분포 CV 관리도 중 수행도가 좋은 Vangel[9]의 근사분포함수를 적용하여 설계한 정규분포 CV 관리도를 사용한다[4]. 정규분포 CV 관리도의 관리상한선(Upper Control Limit : UCL), 중심선(Center Line : CL), 관리하한선(Lower Control Limit : LCL)은 다음과 같다.

$$UCL = \left[ \frac{\chi^2_{1-(\alpha/2), n-1}}{(n-1) \cdot (1 + K^{-2}) - \theta \cdot \chi^2_{1-(\alpha/2), n-1}} \right]^{0.5},$$

$$CL = \left[ \frac{\chi^2_{0.5, n-1}}{(n-1) \cdot (1 + K^{-2}) - \theta \cdot \chi^2_{0.5, n-1}} \right]^{0.5},$$

$$LCL = \left[ \frac{\chi^2_{\alpha/2, n-1}}{(n-1) \cdot (1 + K^{-2}) - \theta \cdot \chi^2_{\alpha/2, n-1}} \right]^{0.5}.$$

여기서,  $K$ 는 모집단 변동계수,  $\chi^2_{n-1}$ 은 자유도  $n-1$ 인  $\chi^2$  확률변수,  $\alpha$ 는 유의수준(significance level),  $\theta = \frac{n-1}{n} \left( \frac{2}{\chi^2_{n-1}} + 1 \right)$ 로 정의된다.

### 2.3 정규분포 CV 관리도 적용과 문제점

본 절에서는 짧은 생산주기를 갖는 감마분포 공정의 변동을 모니터링하기 위해 기존에 제시된 정규분포 CV 관리도를 적용하였을 때 발생하는 문제점을 시뮬레이션을 이용한 수행도 분석을 통해 확인한다.

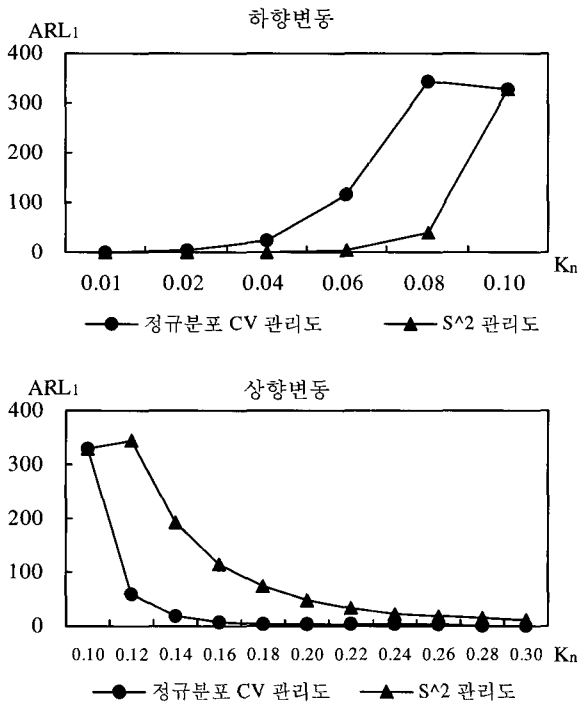
관리도에서 이상원인이 발생한 후부터 이상신호를 줄 때까지 샘플링 한 횟수를 런 길이(Run Length: RL)라 한다. 관리도의 수행도는 런 길이의 기댓값인 평균 런 길이(Average Run Length: ARL)를 이용하여 평가한다. 공정이 관리상태일 때의 ARL을  $ARL_0$ 라 하고, 이상상태일 때의 ARL을  $ARL_1$ 이라고 한다. 효율적인 관리도는 공정이 관리상태일 때의  $ARL_0$ 이 크고, 공정이 이상상태일 때의  $ARL_1$ 이 작은 값을 갖는 특성이 있다[7].

시뮬레이션을 위해 사용한 프로그래밍 언어는 Visual C++이고, 정규분포 난수를 발생시키기 위하여 IMSL에서 제공하는 난수발생함수를 사용한다. 시뮬레이션은 50,000번 반복하였고, 반복 시점별 RL의 평균값인 ARL로 관리도의 수행도를 평가하였다.

샘플 변동계수를  $K_n$ 이라 정의하고  $K_n$ 이 0.1인 경우를 공정이 관리상태일 때의  $ARL_0$ 로 고정시킨 후, 공정이 관리이탈상태(out-of-control)일 때 정규분포 CV 관리도와  $S^2$  관리도의  $ARL_1$ 을 상향변동(upward shift)과 하향변동(downward shift)에 대해서 비교한다. 본 논문에서의 상향변동과 하향변동은  $K_n$ 이 0.1인 경우를 기준으로 0.3의 방향을 상향변동, 0.01의 방향을 하향변동이라 정의한다[7].

수행도를 분석한 결과 <그림 1>은 샘플의 크기( $n$ )가 5인 경우에 공정의 다양한 변동에 대해 정규분포 CV 관리도와  $S^2$  관리도의  $ARL_1$ 을 상·하향변동으로 나누어 분석한 결과이다.

<그림 1>의 결과를 살펴보면 정규분포 CV 관리도는  $S^2$  관리도에 비해 상향변동에서  $ARL_1$ 이 짧지만, 하향변동에서는  $ARL_1$ 이 길다. 이는 정규분포 CV 관리도가 하향변동을 모니터링하기에는 관리도의 수행도가 나쁜 문제점이 있다는 것을 의미한다. 이러한 문제점은 관리도의 성능을 저하시키는 주된 원인이 된다. 그러므로 이러한 문제점을 해결하기 위해서는 짧은 생산주기를 갖는 감마분포 공정에서 변동을 모니터링하기 적합한 관리도의 연구가 필수적이다.



〈그림 1〉 정규분포 CV 관리도, S<sup>2</sup> 관리도의 ARL<sub>1</sub> 비교

### 3. 감마분포 변동계수의 통계적 특성과 확률분포

#### 3.1 감마분포 변동계수의 통계적 특성

확률변수  $X$ 는 형상모수(shape parameter)  $\lambda$ 와 범위모수(scale parameter)  $\alpha$ 인 다음과 같은 감마분포 모집단을 따른다.

$$f(X; \lambda, \alpha) = \frac{1}{\Gamma(\lambda/2)(2\alpha)^{\lambda/2}} X^{(\lambda/2)-1} e^{-X/2\alpha},$$

$X > 0, \lambda > 0, \alpha > 0.$

이 모집단의 변동계수는 식 (1)과 같다.

$$K = CV = \frac{\sigma}{\mu} = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \dots\dots\dots (1)$$

이 모집단으로부터 추출된 샘플  $X_i \sim iid \Gamma(\lambda, \alpha), i = 1, 2, \dots, n$ 이라고 할 때, 샘플의 변동계수는 식 (2)와 같다.

$$K_n = CV_n = \frac{S}{\bar{X}} = \frac{E(S)}{E(\bar{X})} = \sqrt{\frac{2n}{n\lambda + 2}} \dots\dots\dots (2)$$

식 (1)과 (2)에서 감마분포 변동계수는 형상모수  $\lambda$ 에 의존한다는 특징을 확인할 수 있다.

대부분의 연구에서는 점추정치만을 비교하여 변동의 상대적 크기만을 판단하고 있다[7]. 하지만 변동계수 통계량은 확률변수로서 특정한 분포를 갖는다. 그러므로 감마분포 변동계수의 확률분포를 이용하여 신뢰구간, 가설검정 등과 같은 통계적인 검정절차를 통해 확률적 의사결정을 해야 한다.

#### 3.2 감마분포 변동계수의 확률분포

##### 3.2.1 Bartlett 근사분포

기존에 Bartlett[1]의 연구에서는 여러 가지 감마분포 모집단에 대해 변동의 동일성 검정을 하기 위해 주축변수  $z$ 를 정의하고  $z$ 의 근사분포를 다음과 같이 유도하였다. 먼저, 주축변수  $z$ 를 정의하면 식 (3)과 같다.

$$z = \ln \bar{X} - \overline{\ln X} \dots\dots\dots (3)$$

이와 같은  $z$ 에 특성함수는 다음과 같다.

$$E(e^{iu}) = \Gamma(n\lambda/2)[\Gamma(\lambda/2 - iu/n)]^n / n^{iu} \Gamma(n\lambda/2 - iu)[\Gamma(\lambda/2)]^n.$$

$z$ 에 정확한 분포는 계산하기 매우 복잡하여,  $z$ 의 근사분포를 식 (4)와 같이 증명하였다.

$$\{[1 + (1 + 1/n)/3\lambda]/n\lambda\} x^{2n-1} \dots\dots\dots (4)$$

또한 Bishop과 Nair[2]의 연구에서는  $z$ 의 근사분포는 정확한 분포와 비교해도 높은 정확도를 가진다는 것을 증명하였다.

##### 3.2.2 Linhart 감마분포 변동계수의 신뢰구간

기존에 Linhart[5]의 연구에서는 감마분포 변동계수의 신뢰구간을 구하기 위해서 Bartlett의 주축변수  $z$ 의 근사분포를 이용하였으며 그 방법은 다음과 같다. 먼저,  $\alpha$ 의 최우추정량(maximum likelihood estimator)은  $\bar{X}/\lambda$ 이고,  $\lambda$ 는  $\lambda$ 의 최우추정량이므로 여기에서 식 (5)와 같은 식을 정의하였다.

$$\ln \bar{X} - \overline{\ln X} = \ln(\lambda/2) - \psi(\lambda/2) \dots\dots\dots (5)$$

식 (5)에서 Euler의 psi-function은 digamma function이라고도 하며, 이는 감마함수의 로그 도함수(log derivative)에 형태로서 다음과 같이 정의된다.

$$\psi(x) = \frac{d}{dx} \ln(\Gamma(x)) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}.$$

식 (5)에서 Euler의 psi-function이 존재하는 우변의  $\lambda$ 이

충분히 클 경우, 우변을  $1/\left(\hat{\lambda} - \frac{1}{3}\right)$ 로 근사시켜  $\lambda$ 의 점 추정치인  $\hat{\lambda}$ 을 식 (6)과 같이 증명하였다.

$$\hat{\lambda} = (\ln \bar{X} - \overline{\ln X})^{-1} + \frac{1}{3} \dots\dots\dots (6)$$

식 (6)에서 우변 첫째항의 역수를 주축변수  $z$ 의 식 (3)과 같이 정의한다. 여기에서 주축변수  $z$ 는 근사분포 식 (4)를 이용하여, 감마분포 변동계수의 신뢰구간을 다음과 같이 증명하였다.

$$K_U = \left[ \frac{2nz}{\lambda_U^\pi \cdot \chi^2_{\frac{1}{2}(1-\pi), n-1}} \right]^{0.5},$$

$$K_L = \left[ \frac{2nz}{\lambda_L^\pi \cdot \chi^2_{\frac{1}{2}(1+\pi), n-1}} \right]^{0.5}.$$

여기에서,  $K_U$ 와  $K_L$ 은 모집단 변동계수의 신뢰상한선과 신뢰하한선,  $n$ 은 샘플크기,  $z$ 는 주축변수,  $\pi$ 는 신뢰수준(confidence level),  $\chi^2_{n-1}$ 은 자유도  $n-1$ 인  $\chi^2$  확률변수이다. 그리고  $\lambda_U$ 와  $\lambda_L$ 은  $\lambda$ 의 신뢰상한선과 신뢰하한선이며 다음과 같다.

$$\lambda_U = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left[ 1 + \frac{4(n+1)z}{3 \cdot \chi^2_{\frac{1}{2}(1-\pi), n-1}} \right]^{0.5} \right\},$$

$$\lambda_L = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left[ 1 + \frac{4(n+1)z}{3 \cdot \chi^2_{\frac{1}{2}(1+\pi), n-1}} \right]^{0.5} \right\}.$$

#### 4. 감마분포 CV 관리도의 통계적 설계

이 장에서는 앞장에서 살펴본 감마분포 모집단에서 발생된 변동계수의 통계적 특성 및 근사분포를 이용한 변동계수의 신뢰구간을 이용한 관리도의 통계적 설계에 대해 알아본다. 관리도를 설계하기 위해서는 샘플의 크기, 샘플링 간격, 관리한계선을 결정해야 한다. 이를 관리도의 설계모수(design parameters)라 한다.

관리한계선은 관리도를 설계하는데 중요한 설계모수이다. 본 논문의 관리도의 설계는 일반적인 형태인 고정 샘플링크기(Fixed Sample Size: FSS)와 일정한 샘플링 간격(Fixed Sampling Interval: FSI)을 이용하며, 관리한계선은 확률관리한계선(probability control limit)을 이용한다. 확률관리한계선은 관리도에 타점되는 통계량이 따르는 확률분포함수에서 제 1종 과오를 범할 확률  $\alpha$ 를 적절하게 결정함으로써 관리한계선을 설정하는 방법이다. 이와 같은 확률관리한계선의 계산방법은 다음과 같다.

$$\Pr(K_n \leq UCL) = 1 - \frac{\alpha}{2},$$

$$\Pr(K_n \leq CL) = 0.5,$$

$$\Pr(K_n \leq LCL) = \frac{\alpha}{2}.$$

여기서, UCL, LCL, CL은 관리상한선, 관리하한선과 중심선이며  $\alpha$ 는 제 1종 과오를 범할 확률이다. 일반적으로  $\alpha$ 는 0.0027로 설정한다.

관리도를 사용하는 것은 통계적 가설검정과 밀접한 관계가 있다. 관리도의 적용은 통계적 가설검정의 반복적 적용으로 설명될 수 있다. 다시 말해서 통계적 가설검정과 관리도는 모집단에서 추출한 샘플에 대하여 통계적 가설의 기각 혹은 채택을 판단한다[7]. 이와 같은 개념을 이용하여 Bartlett의 근사분포를 이용한 Linhart에 감마분포 변동계수의 신뢰구간으로부터 감마분포 CV 관리도의 관리한계선을 구할 수 있다. 즉, 신뢰구간은 모집단 변동계수  $K$ 의 구간에 관한 것이다. 그리고 가설검정은 샘플 변동계수  $K_n$ 의 구간에 관한 것이다. 그러므로 모집단 변동계수  $K$ 에 관한 전개를 샘플 변동계수  $K_n$ 에 관한 전개로 변환하면 감마분포 변동계수의 신뢰구간으로부터 감마분포 CV 관리도의 관리한계선을 구할 수 있다. 이와 같은 개념을 바탕으로 하여 감마분포 CV 관리도의 관리한계선을 구하면 다음과 같다.

$$UCL = \left\{ K^2 \cdot \left[ \frac{\lambda_L \cdot \chi^2_{1-\alpha/2, n-1}}{z(n(z^{-1} + (1/3)) + 2)} \right]^{0.5} \right\},$$

$$CL = \left\{ K^2 \cdot \left[ \frac{\lambda_C \cdot \chi^2_{0.5, n-1}}{z(n(z^{-1} + (1/3)) + 2)} \right]^{0.5} \right\},$$

$$LCL = \left\{ K^2 \cdot \left[ \frac{\lambda_U \cdot \chi^2_{\alpha/2, n-1}}{z(n(z^{-1} + (1/3)) + 2)} \right]^{0.5} \right\}.$$

여기에서,  $K$ 는 모집단의 변동계수,  $n$ 은 샘플 크기,  $z$ 는 주축변수,  $\alpha$ 는 유의수준,  $\chi^2_{n-1}$ 는 자유도  $n-1$ 인  $\chi^2$  확률변수이다. 그리고  $\lambda_U$ 와  $\lambda_L$ ,  $\lambda_C$ 은  $\lambda$ 의 신뢰상한선과 하한선, 중심선으로 식 (7)과 같다.

$$\lambda_U = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left[ 1 + \frac{4(n+1)z}{3 \cdot \chi^2_{\alpha/2, n-1}} \right]^{0.5} \right\},$$

$$\lambda_C = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left[ 1 + \frac{4(n+1)z}{3 \cdot \chi^2_{0.5, n-1}} \right]^{0.5} \right\}, \dots\dots\dots (7)$$

$$\lambda_L = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left[ 1 + \frac{4(n+1)z}{3 \cdot \chi^2_{1-\alpha/2, n-1}} \right]^{0.5} \right\}.$$

<표 1>은 식 (7)에서  $\lambda_U$ ,  $\lambda_C$ ,  $\lambda_L$ 이  $z$ 와  $n$ 의 값에 따라 결정되는 특징을 이용하여 감마분포 CV 관리도에 계산의 편이를 위해 다음과 같이 정리하였다.

<표 1> z와 n의 변화에 따른 λ<sub>U</sub>, λ<sub>C</sub>, λ<sub>L</sub>

		z					
		0.00001	0.0001	0.001	0.01	0.03	0.05
n=5	λ <sub>U</sub>	1.01375	1.04348	1.13751	1.43485	1.75318	1.97235
	λ <sub>C</sub>	1.00244	1.00772	1.02441	1.07719	1.13370	1.17260
	λ <sub>L</sub>	1.00106	1.00335	1.01060	1.03352	1.05806	1.07495
n=6	λ <sub>U</sub>	1.00917	1.02899	1.09168	1.28991	1.50214	1.64826
	λ <sub>C</sub>	1.00214	1.00678	1.02144	1.06779	1.11742	1.15159
	λ <sub>L</sub>	1.00100	1.00318	1.01005	1.03177	1.05502	1.07103
n=7	λ <sub>U</sub>	1.00687	1.02173	1.06873	1.21735	1.37646	1.48600
	λ <sub>C</sub>	1.00193	1.00612	1.01934	1.06115	1.10592	1.13674
	λ <sub>L</sub>	1.00096	1.00303	1.00959	1.03033	1.05254	1.06782
n=8	λ <sub>U</sub>	1.00552	1.01746	1.05521	1.17458	1.30238	1.39037
	λ <sub>C</sub>	1.00178	1.00561	1.01775	1.05614	1.09724	1.12553
	λ <sub>L</sub>	1.00092	1.00291	1.00921	1.02912	1.05044	1.06512
n=9	λ <sub>U</sub>	1.00464	1.01466	1.04636	1.14660	1.25392	1.32781
	λ <sub>C</sub>	1.00165	1.00522	1.01650	1.05218	1.09039	1.11669
	λ <sub>L</sub>	1.00089	1.00281	1.00888	1.02808	1.04864	1.06279
n=10	λ <sub>U</sub>	1.00401	1.01269	1.04014	1.12694	1.21986	1.28384
	λ <sub>C</sub>	1.00155	1.00490	1.01548	1.04896	1.08480	1.10948
	λ <sub>L</sub>	1.00086	1.00272	1.00859	1.02717	1.04706	1.06075

<표 1>은 일반적인 제조공정에서 변동계수가 0.3이하의 값을 가지는 특징을 이용하여 변동계수 0.01부터 0.3까지의 범위에서 z의 값을 추정하기 위해 시뮬레이션을 하였다[7]. 또한 샘플의 크기는 일반적으로 변동을 관리하는 경우의 5이상 10이하를 고려하였다[7]. <표 1>을 사용할 경우에 실제 z의 값이 표에 제시되지 않은 경우에는 z의 값이 포함되는 범위에서 보간법(interpolation) 등을 이용하여 z의 값을 추정하여 사용한다.

공정 모수 K<sub>n</sub>을 알지 못할 경우에는 공정으로부터 데이터를 추출하여 모수를 추정해야 한다. 공정이 관리상태일 때의 데이터를 수집하고, 이 데이터를 이용하여 모수를 추정하게 된다. K<sub>n</sub>에 대한 추정치를 다음과 같은 샘플 변동계수들의 평균치를 이용한다.

$$\widehat{K}_n = \overline{K}_n = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m K_{n_i}$$

### 5. 감마분포 CV 관리도의 수행도 분석

이 장에서는 앞장에서 설계한 감마분포 CV 관리도에 대하여 시뮬레이션을 통해 수행도를 분석 및 평가한다. 수행도 분석 방법은 2장 3절과 동일하다. 그리고 짧은

생산주기를 갖는 공정에 특징인 적은샘플의 크기 5이상 10이하인 부분에 대해 적합성을 평가한다[7].

위와 같은 수행도의 분석 절차를 통하여 <표 2>와 <표 3>의 결과를 얻을 수 있다. <표 2>와 <표 3>은 샘플의 크기(n)가 5와 10일 경우에, 샘플의 크기에 따른 공정의 다양한 변동에 대해 감마분포 CV 관리도와 정규분포 CV 관리도, S<sup>2</sup> 관리도의 ARL을 비교한 결과이다.

<표 2> K<sub>n</sub> 변화에 따른 관리도의 ARL 비교(n=5)

K <sub>n</sub>	감마 CV 관리도	정규 CV 관리도	S <sup>2</sup> 관리도
0.01	0.88014	1.35185	1.00362
0.02	0.88260	3.13611	1.05306
0.04	2.30763	25.71907	1.71047
0.06	18.97662	114.74956	5.83020
0.08	85.33093	343.07966	41.77190
<b>0.10</b>	<b>331.04199</b>	<b>328.89882</b>	<b>328.22100</b>
0.12	77.43568	59.35026	343.45900
0.14	13.93465	17.34384	191.81100
0.16	5.13787	8.02594	114.36200
0.18	2.85358	4.79860	72.28240
0.20	1.99695	3.43005	47.89370
0.22	1.60006	2.69939	33.21110
0.24	1.38527	2.27860	24.03190
0.26	1.25940	2.01672	17.76210
0.28	1.17256	1.83580	13.49340
0.30	1.11685	1.71888	10.45910

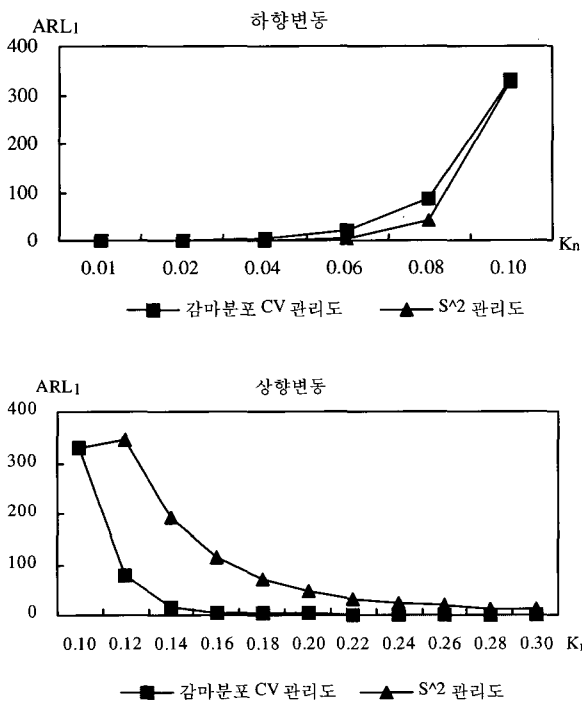
<표 3> K<sub>n</sub> 변화에 따른 관리도의 ARL 비교(n=10)

K <sub>n</sub>	감마 CV 관리도	정규 CV 관리도	S <sup>2</sup> 관리도
0.01	0.85980	1.66100	1.00000
0.02	0.87321	1.66110	1.00076
0.04	0.95876	3.23722	1.12680
0.06	3.47948	22.42748	2.69561
0.08	26.55969	158.54876	21.93780
<b>0.10</b>	<b>323.09139</b>	<b>321.32876</b>	<b>320.18900</b>
0.12	20.92350	36.94148	170.99800
0.14	3.89066	9.53313	54.22890
0.16	1.77775	4.50698	21.78520
0.18	1.25650	2.94870	10.39670
0.20	1.05956	2.32844	5.74663
0.22	0.97291	2.02453	3.56345
0.24	0.92843	1.86935	2.50187
0.26	0.90581	1.78368	1.90546
0.28	0.89190	1.73747	1.55497
0.30	0.88481	1.70741	1.34723

여기서 샘플의 크기가 5인 경우 10인 경우의 <표 2>와 <표 3>을 자세하게 살펴보면, 감마분포 CV 관리도의 ARL<sub>1</sub>은 하향변동에서 S<sup>2</sup> 관리도와 대부분의 경우 ARL<sub>1</sub>의 길이가 유사하며, 상향변동에서는 정규분포 CV 관리도와 대부분의 경우 ARL<sub>1</sub>의 길이가 유사하다. 그리고 공정이 안정상태일 경우에 ARL<sub>0</sub>의 길이가 다른 관리도에 비해 길다. 이러한 결과를 통하여 일반적으로 사용하는 샘플의 크기 5이상 10이하인 경우에 감마분포 CV 관리도는 정규분포 CV 관리도와 S<sup>2</sup> 관리도에 비해 전반적으로 수행도가 우수하다는 것을 알 수 있다.

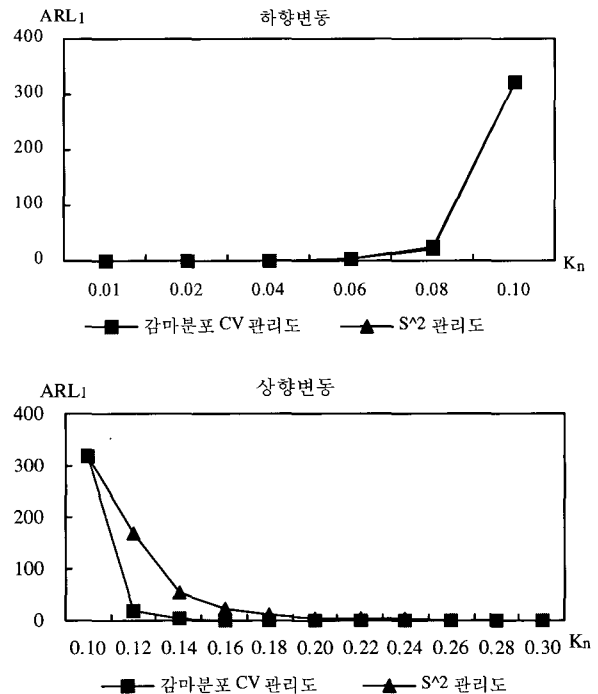
도는 짧은 생산주기를 갖는 감마분포 공정에서 여러 가지 제품의 변동을 모니터링 하는데 있어 적합한 관리도임을 확인할 수 있다. 그리고 한 가지 제품의 변동을 모니터링하기 위해서도 일반적으로 사용되는 전통적인 관리도인 S<sup>2</sup> 관리도보다 우수한 성능을 가지는 특징을 보인다.

모든 결과들을 종합해 볼 때, 본 논문에서 제안하는 감마분포 CV 관리도는 짧은 생산주기를 갖는 공정의 변동을 효율적으로 모니터링하기에 적합한 관리도이며, 일반적인 감마분포 공정에서도 적합한 우수한 성능을 가지는 관리도라는 결론을 얻을 수 있다.



<그림 2> 감마분포 CV 관리도, S<sup>2</sup> 관리도의 ARL<sub>1</sub> 비교

<그림 2>와 <그림 3>은 샘플의 크기(*n*)가 5와 10인 경우에, 샘플의 크기 변화에 따른 공정의 다양한 변동에 대해 상향변동과 하향변동으로 나누어 감마분포 CV 관리도와 S<sup>2</sup> 관리도의 ARL<sub>1</sub>을 자세하게 비교한 결과이다. 이 결과를 살펴보면 감마분포 CV 관리도가 S<sup>2</sup> 관리도에 비해 상향변동에서 ARL<sub>1</sub>의 길이가 짧으며, 하향변동에서는 ARL<sub>1</sub>의 길이가 유사한 결과를 보인다. 이것은 감마분포 CV 관리도가 S<sup>2</sup> 관리도보다 수행도가 우수하다는 것을 나타낸다. 그리고 정규분포 CV 관리도를 적용하여 발생한 하향변동의 수행도 낮은 문제가 개선되는 것은 감마분포 변동계수의 분포에 대한 치우침(skewed)에 적합하게 관리도가 설계되었다는 것을 의미한다. 이와 같은 분석결과를 통하여 감마분포 CV 관리



<그림 3> 감마분포 CV 관리도, S<sup>2</sup> 관리도의 ARL<sub>1</sub> 비교

## 6. 결 론

관리도는 공정을 모니터링 하는데 유용한 도구로써 실제 제조현장에서 많이 사용되고 있을 뿐만 아니라, 이에 대한 연구도 활발히 이루어지고 있다. 최근의 관리도에 대한 연구는 분포에 무관하게 적용할 수 있는 관리도의 연구가 활발하게 진행되고 있다.

본 논문에서는 짧은 생산주기를 갖는 감마분포 공정에 기존의 정규분포 CV 관리도를 적용하였을 때 수행도 분석을 통하여 하향변동에 관한 수행도의 문제점을 증명하였다. 그리고 감마분포 변동계수의 통계적 특성 및 근사분포에 대해 살펴보고, 이 근사분포를 이용하여

유도한 감마분포 변동계수의 신뢰구간으로부터 짧은 생산주기를 갖는 감마분포 공정에 효율적으로 적용할 수 있는 관리도를 설계하고, 수행도 분석을 하였다. 그 결과 본 논문에서 제안하는 감마분포 CV 관리도는 공정의 변동을 모니터링 하는 관리도로서 충분한 기능을 가지는 것을 확인할 수 있었다. 또한 짧은 생산주기를 갖는 감마분포 공정에 특징인 샘플의 크기가 5이상 10이하인 경우에서도 우수한 수행도를 가지는 것을 확인하였다. 결론적으로 감마분포 CV 관리도는 감마분포 공정의 변동을 모니터링 하는데 효율적이고 성능이 우수한 관리도이다.

추후 연구과제로는 짧은 생산주기를 갖는 공정의 분포와는 무관하게 사용할 수 있는 CV 관리도의 연구가 필요하다. 왜냐하면 짧은 생산주기를 갖는 공정의 분포는 다양하다. 따라서 공정의 분포가 달라질 때마다 새로운 관리도를 설계하고 적용해야하는 어려움이 있다. 하지만 공정의 분포와 무관하게 적용할 수 있는 CV 관리도가 연구되면, 짧은 생산주기를 갖는 공정에서는 분포에 무관하게 사용할 수 있는 장점을 가질 수 있다. 그리고 CV 관리도의 특성상 계산과 수식이 복잡하여 사용하기에 어려운 단점을 가진다. 따라서 이러한 단점을 보완하여 실제로 사용하기에 편리하면서도 우수한 성능을 가지는 관리도에 대한 연구가 추가적으로 필요하다.

**참고문헌**

[1] Bartlett, M. S., "Properties of Sufficiency and Statistical

Tests," *Proceeding of the Royal Society of London Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 901 : 268-282, 1937.

[2] Bishop, D. J. and Nair, U. S., "A Note on Certain Methods of Testing for the Homogeneity of a Set of Estimated Variances," *Supplement to the Journal of the Royal Statistical Society*, 6 : 89-99, 1939.

[3] Johnson, N. L. and Kots, S., *Introduction in Statistics - Continuous Univariate Distribution*, 1st ed., John Willey & Sons, NY, 1970.

[4] Lee, M. S., Kang, C. W., and Sim, S. B., "Statistical Design of CV Control Charts with Approximated Distribution," *Journal of the Society of Korea Industrial and Systems Engineering*, 27(3) : 12-20, 2004.

[5] Linhart, H., "Approximate Confidence Limits for the Coefficient of Variation of Gamma Distribution," *Biometrics*, 21(3) : 733-738, 1965.

[6] Monfort, F., "A Fitting Gamma Distributions to Fibre-Diameter Measurements on Wool Tops," *Journal of the Textile Institute*, 54 : 185-191, 1964.

[7] Montgomery, D. C., *Introduction to Statistical Quality Control*, 4th ed., John Wiley & Sons, NY, 2001.

[8] Nelson, L. S., "Some Notes on Variation," *Journal of Quality Technology*, 31(4) : 459-462, 1999.

[9] Vangel, M. G., "Confidence Intervals for a Normal Coefficient of Variation," *The American Statistician*, 15(1) : 21-25, 1996.