

잡음이 있는 X선 프로젝션에 적합한 웨이블릿 기반 영상재구성

Wavelet based Image Reconstruction specific to Noisy X-ray Projections

이 남 용*, 문 중 익**

Nam-Yong Lee*, Jong-Ik Moon**

요 약

이 논문의 목적은 X선의 감쇠를 이용한 측정에서 발생하는 여러 종류의 잡음을 효과적으로 제거하는데 적합한 영상재구성 방법을 제안하는 것이다. 구체적으로, X선의 방출기와 검출기의 필연적인 기계적 오류에 의해 발생하는 원형모양 오류와 전반적인 관측오차와 푸리에 변환기반 재구성 과정에서 나타나는 줄무늬 모양 잡음을 효과적으로 제거하기 위해 웨이블릿 방법을 제안한다. 원형모양 오류를 프로젝션에서 제거하기 위해 해당 잡음이 각도방향으로 강한 상관관계를 가지고 있음을 이용하여, 평균화된 정보에서 해당 잡음의 강도를 추정하고 이를 웨이블릿 축소법을 통해 제거하는 방법을 제안한다. 또한, 전반적인 잡음 제거와 영상재구성을 위해 웨이블릿-배규렛 분해법을 제안한다. 제안된 방법은 기존의 푸리에 변환을 기반으로 하는 방법에 비해 원형모양 오류와 영상재구성에 있어서 우수한 영상을 제공함을 시뮬레이션을 통해 확인하였다.

Abstract

In this paper, we present an efficient image reconstruction method which is suited to remove various noise generated from measurement using X-ray attenuation. To be specific, we present a wavelet method to efficiently remove ring artifacts, which are caused by inevitable mechanical error in X-ray emitters and detectors, and streak artifacts, which are caused by general observation errors and Fourier transform-based reconstruction process. To remove ring artifacts related noise from projections, we suggest to estimate the noise intensity by using the fact that the noise related to ring artifacts has a strong correlation in the angle direction, and remove them by using wavelet shrinkage. We also suggest to use wavelet-vaguelette decomposition for general-purpose noise removal and image reconstruction. Through simulation studies, we show that the proposed method provides a better result in ring artifact removal and image reconstruction over the traditional Fourier transform-based methods.

Keywords : Wavelet Shrinkage, Projections, Wavelet-Vaguelette Decomposition, Ring Artifacts, Streak Artifacts

I. 서 론

영상재구성은 주어진 대상에 대한 간접적인 정보를 이용하여 원래 대상을 영상의 형태로 재구성하는 기술을 통칭한다. 이 때 간접 정보는 보통 주어진 대상의 선적분의 형태로 주어지고, 이를 프로젝션(projection)이라 한다. 영상재구성은 의료영상, 비파괴관측, 지질탐사 등 많은 응용분야에서 활발히 연구되고 있다.

영상재구성은 프로젝션을 어떻게 이용하여 영상을 재구성하느냐에 따라 직접법(Direct Method)과 반복법(Iterative Method)

으로 나눌 수 있다. 직접법은 프로젝션과 원래의 대상간의 해석적 관계를 이용하여 프로젝션으로부터 직접 영상을 재구성하는 한다. 가장 대표적인 직접법으로 FBP(Filtered Backprojection)[1]을 들 수 있다. 한편, 반복법은 프로젝션과 원 대상간의 관계를 선형시스템에 의한 출력과 입력의 관계로 이해하고, 영상재구성과정을 선형연립방정식에 대한 반복적 해법으로 처리한다. 대표적인 반복법으로 EM(Expectation-Maximization)[2]을 들 수 있다.

이 논문에서는 X선 단층영상재구성(X-ray Tomography)에 적합한 알고리즘 개발에 관한 것이다. X선은 물질을 투과하면서 감쇠(attenuation)가 일어나고 그러한 감쇠는 X선이 투과한 지역의 물질의 밀도에 따라 결정된다. 즉, X선이 직선 l 을 통해 밀도가 $f(x,y)$ 인 물질을 투과하는 경우, 초기의 X선의 강도 I_0 는 다음과 같이 감쇠하게 된다.

* 인제대학교 수리과학연구소 컴퓨터응용과학부

† 김해대학 중앙전산소

접수 일자: 2006. 5. 19 수정 완료: 2006. 10. 21

논문 번호: 2006-3-3

※ 이 논문은 2004학년도 인제대학교 석사후연수과정지원에 의해 수행되었음.

$$I = I_0 \exp\left(- \int_{\ell} f(x,y) ds\right) \quad (1)$$

여기서 ds 는 직선 ℓ 위에서의 선적분을 의미한다. 이 논문에서 다루고자 하는 문제는 식 (1)과 같이 관측된 데이터로부터 $f(x,y)$ 를 재구성하는 것이다. 가장 단순하게 접근할 수 있는 방법은 기존의 영상재구성 알고리즘이 프로젝트(식 (1)에서 지수함수내의 선적분 $\int_{\ell} f(x,y) ds$ 을 프로젝트이라 한다)에서 $f(x,y)$ 를 재구성하는 방법을 제시하므로 X선의 초기 강도 I_0 를 관측된 강도 I 로 나눈 것을 로그함수를 취해 프로젝션을 구한 후, 기존의 영상재구성 알고리즘을 적용하면 된다고 생각할 수 있다. 그러나, 잡음의 영향은 이렇게 단순한 접근방법을 쓸모없게 만든다[3].

X선 영상재구성 과정에서 문제가 되는 잡음은 여러 이유에서 발생한다. 예를 들어, 모든 X선원이 초기 강도 I_0 을 동일하게 갖게 하기는 사실상 불가능하고, 감쇠된 X선에 대한 검출기의 반응도 모든 검출기에서 동일할 수 없기 때문에 잡음이 발생하게 된다. 한편, X선의 강도 관측 과정 자체에서도 잡음이 발생하기도 한다. 그러나, 기존의 영상재구성 방법들은 해당분야의 특성에 따라 프로젝트이 각 관측에 대해 정규잡음 또는 포아송 잡음으로 가정하고 이에 대한 해결책을 제시하였다 [4],[5],[6],[7]. 앞에서 거론한 X선을 이용한 영상재구성에서 흔히 발생하는 잡음의 일부는 독립적인 형태를 띠지 않고 보통 어떤 패턴을 가지고 발생하기 때문에 기존의 영상재구성에서 사용하는 잡음제거 알고리즘(예: 콘볼루션, 웨이블릿 축소법)에 의해서는 효과적으로 제거되지 않는다.

이 논문의 목적은 X선을 이용한 영상재구성에서 발생하는 잡음에 적합한 잡음제거와 영상재구성 알고리즘을 제시하는데 있다. 이를 위해 이 논문에서는 X선의 감쇠현상을 이용하여 얻은 프로젝트 데이터가 크게 두 종류의 잡음에 의해 오염되었다고 가정한다. 그 하나는 관측각도와 관측대상과 상관없이 X선의 방출기와 검출기의 기계적 결함에 의해 발생하는 잡음이고, 또 다른 하나는 검출기에서 관측한 X선의 강도를 실제로 기록하는 과정에서 발생하는 잡음이다. 전자의 잡음은 관측각도에 대해 강한 상관관계를 갖는 반면, 후자의 잡음은 관측대상에 의존하지만 관측위치와는 무관하게 발생하는 것이 특징이다. 이러한 잡음분석은 X선을 이용한 영상재구성에서 많이 사용되고 있는 방법이다[3],[8].

이 논문에서는 성질이 확연히 다른 두 잡음을 효과적으로 제거하면서 영상재구성을 할 수 있는 방법을 제시하고자 한다. 이를 위해, 잡음제거에 탁월한 효과를 보이는 웨이블릿 축소법 [9],[10],[11]을 이용하여 관측각도에 대해 상관관계가 큰 잡음을 프로젝트 데이터에서 제거한 후, 웨이블릿-배규렛 분해법 [12](WVD: Wavelet-Vaguelette Decomposition)을 이용하여 영상재구성을 하는 방법을 제안한다.

이 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. II장에서는 X선을 이용한 단층영상재구성의 기본적 내용에 대해 다룬다. III장에서는 웨이블릿에 대한 설명과 함께 제안된 방법을 설명하고, IV장에서는

제안된 방법의 시뮬레이션 결과와 그에 대한 고찰을 다룬다. V장에서 이 논문의 결론을 맺는다.

II. X선 단층영상재구성

이 장에서는 X선을 이용한 단층영상재구성의 기본적인 이론을 다루도록 하자.

그림 1은 방출기에서 검출기를 향해 강도 I_0 으로 발사된 X선이 물체 내부의 감쇠분포 $f(x,y)$ 에 따라 감쇠되는 현상을 보여주고 있다. 즉, 각도가 θ 이고 위치가 u 에서 관측된 X선의 강도 $I(\theta, u)$ 는

$$I(\theta, u) = I_0 \exp\left(- \int_{\ell_{\theta,u}} f(x,y) ds\right) \quad (2)$$

$$\ell_{\theta,u} = \{(x,y) | x \cos \theta + y \sin \theta = u\}$$

를 만족하게 된다. 여기서 직선 $\ell_{\theta,u}$ 는 X선이 진행하는 경로이다. X선 단층영상재구성의 핵심은 여러 각도와 위치에서 관측된 X선의 강도 $I(\theta, u)$ 를 이용하여 $f(x,y)$ 를 영상의 형태로 재구성하는 것이다.

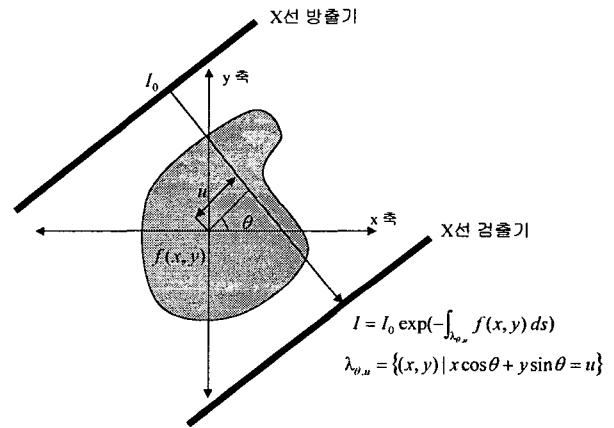


그림 1. X선을 이용한 프로젝트 측정
Fig. 1. Measurement of projection by X-ray

X선의 단층영상재구성과 관련된 수학적 모델은 라돈변환(Radon Transform)과 푸리에 변환(Fourier Transform)이 제공한다. 평면에서 정의된 함수 $f(x,y)$ 에 대한 라돈변환 Kf 은 다음과 같이 정의한다.

$$Kf(\theta, u) = \int_{\ell_{\theta,u}} f(x,y) ds$$

이를 이용하여 식 (2)를 다시 기술하면

$$I(\theta, u) = I_0 \exp(-Kf(\theta, u))$$

이 된다.

영상재구성의 모든 직접법은 다음과 같은 라돈변환에 대한 푸리에 해석에 기반을 두고 있다.

$$Kf(\theta, \cdot)^{\wedge}(w) = \hat{f}(w \cos \theta, w \sin \theta) \quad (3)$$

위의 식에서 기호 \wedge 는 푸리에 변환을 의미한다. 즉, \hat{f} 는 f 에 대한 푸리에 변환을 의미한다. 여기서 주의할 것은 식 (3)의 좌측에 나오는 푸리에 변환은 각도 θ 를 고정한 상태에서 변수 u 에 대한 1차원 푸리에 변환을 의미하고 우측은 변수 x, y 에 대한 2차원 푸리에 변환을 의미한다. 푸리에 역변환(Inverse Transform)을 식 (3)에 적용하여 프로젝션 $Kf(\theta, u)$ 로부터 $f(x, y)$ 를 구할 수 있다. 그 중에서 가장 대표적인 방법이 역투사방법(Backprojection)으로 다음의 수학적 결과에 의해 유도된다.

$$f(x, y) = \int_0^\pi F(\theta, x \cos \theta + y \sin \theta) d\theta \quad (4)$$

$$F(\theta, w) = |w| Kf(\theta, \cdot)^\wedge(w)$$

그러나, 식 (4)에 의한 방법은 잡음에 민감하다는 단점이 있다. X선을 이용한 영상재구성 과정에서 흔히 발생하는 잡음에 대해 알아보도록 하자. 방출기의 모든 위치에서 동일한 강도의 X선을 방출하게 하기는 불가능하다. 이러한 오차를 다루기 위해 다음과 같이 정의된 $m(u)$ 를 고려하자.

$$\text{위치 } u \text{에서의 방출기의 X선의 강도} = m(u) I_0$$

한편, 검출기 자체도 위치에 따라 X선에 대한 반응에 차이가 있다. 이러한 현상을 다루기 위해 반응에 대한 위치 u 에서의 오차를 $b(u)$ 라고 하자.

$$\text{위치 } u \text{에서의 검출기의 반응 오차} = b(u)$$

검출기에서 X선의 강도를 실제 관측하는 과정은 검출기의 반응 오차 외에도 다른 종류의 잡음에 의해 영향을 받게 되는데, 그 중 가장 대표적인 것이 X선의 입자로서의 특성에 의해 발생하는 충격잡음(shot noise, 이를 $s(\theta, u)$ 로 표시한다)과 기록하는 과정에서 발생하는 읽기잡음(readout noise, 이를 $r(\theta, u)$ 로 표시한다)이다. 지금까지 언급한 잡음을 모두 고려하면 실제 관측되는 X선의 강도 $I(\theta, u)$ 는 다음을 만족한다.

$$I(\theta, u) = m(u) I_0 \exp(-Kf(\theta, u)) + b(u) + s(\theta, u) + r(\theta, u) \quad (5)$$

이렇게 잡음에 오염되었다는 사실을 고려하지 않고 얻은 프로젝션에 대한 추정 $\log\left(\frac{I_0}{I(\theta, u)}\right)$ 이 잡음이 전혀 없는 경우에 얻을 수 있는 프로젝션 $Kf(\theta, u)$ 과 상당한 차이가 생기는 당연하다. 이러한 차이를 고려하기 위해 기존의 X선을 이용한 영상재구성에서는 관측된 프로젝션 $Y(\theta, u)$ 에 다음과 같은 통계적 가정을 하였다[5],[6].

$$Y(\theta, u) \sim \text{iid } N(Kf(\theta, u), \sigma^2) \quad (6)$$

여기서, 'iid'는 'independent and identically distributed'의 약자로 잡음이 각기 독립적으로 동일한 정규잡음 N 을 따름을 의미한다. 그러나, 위와 같이 단순한 통계적 가정은 이 논문에서 다루고자 하는 여러 종류의 잡음에 의해 발생하는 영상재구성에서 발생하는 문제를 다루기에는 부족하다. 이 논문에서는 이를

보완하기 위해 관측된 X선 강도 $I(\theta, u)$ 에 대해 다음과 같은 통계적 모델을 가정한다.

$$m(u) \sim \text{iid } N(1, \sigma_m^2)$$

$$b(u) \sim \text{iid } N(0, \sigma_b^2)$$

$$s(\theta, u) \sim \text{ind } P(I_1(\theta, u))$$

$$r(\theta, u) \sim \text{iid } N(0, \sigma_r^2) \quad (7)$$

여기서 'ind'는 'independent'의 약자로 잡음이 각기 독립적으로 주어진 통계적 가정을 따른다는 표시이고, P 는 포아송 분포(Poisson Distribution), 그리고

$$I_1(\theta, u) = m(u) I_0 \exp(-Kf(\theta, u)) + b(u)$$

이다. 식 (7)의 통계적 모델이 식 (6)에 비해 보다 X선을 이용한 프로젝션 관측과정에서 발생하는 잡음에 대해 보다 정확한 모델을 제공함은 자명하다.

이 장을 마치기 전에 식 (6)에서 가정한 것과 같이 단순한 잡음모델에 가장 많이 사용되는 영상재구성 알고리즘 FBP(Filtered Backprojection)에 대해 살펴보도록 하자. FBP는 식 (6)에서 잡음에 의한 영향이 고주파 영역에서 증폭되는 현상을 막기 위해 저주파 영역에서 가중치 필터 $H(w)$ 를 프로젝션 $Y(\theta, u)$ 에

$$F(\theta, w) = H(w) |w| Y(\theta, \cdot)^\wedge(w) \quad (8)$$

와 같이 적용한다. FBP의 그 외의 과정은 역투사와 것과 동일한 절차를 따른다.

원형 오류제거를 위해 가장 널리 사용되고 기존의 방법은 다음과 같다[3]. 이를 MSS(Mean-Smoothing-Subtract)이라 명명하자.

MSS

1) 관측된 X선 강도 $I(\theta, u)$ 에 대해 각도에 대한 평균

$$A(u) = \frac{1}{N_\theta} \sum_{\theta} I(\theta, u)$$

을 계산한다.

2) $A(u)$ 와 평균필터와의 콘볼루션을 이용하여 $A(u)$ 에서 원형오류를 일으키는 잡음을 제거한 $\tilde{A}(u)$ 를 계산한다.

3) 각각의 θ 에 대해

$$\tilde{I}(\theta, u) = I(\theta, u) - (A(u) - \tilde{A}(u))$$

을 계산하여 원형오류를 일으키는 잡음을 $I(\theta, u)$ 에서 제거한다.

그림 2-(a)는 관측된 X선 강도 $I(\theta, u)$ 를 각도에 대해 평균을 구한 $A(u)$ 의 그래프이고, 그림 2-(b)는 원형모양 오류가 없는, 즉, $\sigma_m = \sigma_b = 0$ 인 경우의 $A(u)$ 의 그래프이다. 이 두 그림을 보면 원형모양 오류를 일으키는 $m(u)$ 와 $b(u)$ 이 충격잡음과 읽기잡음에 비해 $A(u)$ 에 더 강하게 나타나고 있음을 알 수 있다. 그림 2-(c)는 길이가 5인 평균필터를 그림 2-(a)의 $A(u)$ 에 적용한 결과이다. 이를 원형모양 오류를 일으키는 잡

음이 전혀 없다고 가정하면 그림 2-(b)와 거의 유사하다. 이를 고려해 볼 때 원형모양 오류를 일으키는 잡음이 대부분 제거되었음을 알 수 있다. 그러나, $A(u) - \tilde{A}(u)$ 는 대부분의 원형모양 오류 $m(u)$ 와 $b(u)$ 를 제거하지만, 그와 동시에 부드럽게 하는 과정에서 발생하는 원래 신호와의 차이가 새로운 원형모양 오류가 발생시킨다(그림 4참조). 이는 모든 각도 θ 에 대해 $A(u) - \tilde{A}(u)$ 를 동일하게 감하는 것이 주요 원인이다. 이를 피하기 위해 각각의 θ 에 대해 컨볼루션을 $I(\theta, u)$ 에 적용하여 원형모양 오류를 제거하는 방법(이는 사실상 FBP와 동일하다)을 고려할 수 있지만, 이 방법도 원형모양 오류제거에는 효과적이지 못하다(그림 7 참조).

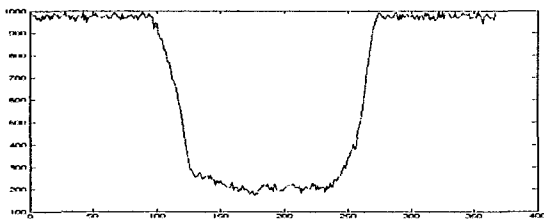


그림 2-a. 잡음이 섞인 $A(u)$
Fig. 2-a. Noisy $A(u)$

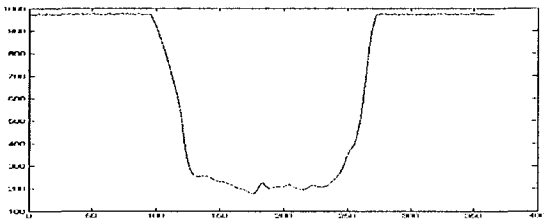


그림 2-b. 원형모양 오류가 없는 $A(\theta, u)$
Fig. 2-b. $A(\theta, u)$ with no ring artifacts

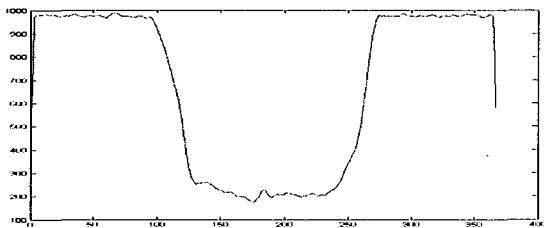


그림 2-c. MSS를 적용한 $A(u)$
Fig. 2-c. $A(u)$ by MSS

III. 제안된 방법

이 장에서는 이 논문에서 제안하고자 하는 X선 영상재구성에 적합한 웨이블릿 방법에 대해 설명하고자 한다. 이를 위해 먼저, 웨이블릿에 대한 개략적인 설명을 한 후에 구체적으로 X선 영상재구성과 관련하여 제안하고자 하는 방법을 설명할 것이다. 웨이블릿에 대한 보다 자세한 설명은 [13]에서 찾을 수 있다.

2차원 영상처리에 사용되는 웨이블릿은 4개의 함수 $\psi^{(i)}$, $i = 0, 1, 2, 3$, 의 평행이동과 수축 및 팽창에 해당하는

$$\psi_{k,j}^{(i)}(x, y) = 2^k \psi^{(i)}(2^k \cdot -j), \quad j = (j_x, j_y)$$

의 모임들이 영상집합에 대하여 기저를 이루는 경우에 그 기저를 의미한다. 지금부터는 $\lambda = (k, j, i)$ 로 표시하여 웨이블릿 기저에 사용하는 점자의 모임을 간단히 표시하자. 주어진 영상 f 은 정해진 규칙에서 계산 가능한 계수 c_λ 에 의해

$$f = \sum_{\lambda} c_{\lambda} \psi_{\lambda}$$

와 같은 표현이 가능하다. 이 때, c_{λ} 를 영상 f 의 웨이블릿 계수라고 하고 f 에서 웨이블릿 계수 c_{λ} 로의 변환을 웨이블릿 변환이라 한다.

웨이블릿 변환은 푸리에변환에 비해 여러 장점을 가지고 있다. 그 중에 가장 대표적인 성질은 보통의 영상에 대해 웨이블릿 변환이 보다 효율적으로 영상을 표현한다는 점이다. 즉, 푸리에 변환을 이용하는 경우에 비해 웨이블릿 변환은 보다 적은 수의 계수에 주어진 영상의 정보를 집중시키는 경향이 강하다. 이러한 성질은 영상압축, 잡음제거 분야에 웨이블릿이 성공적으로 응용할 수 있는 근거가 되었다. 가장 대표적으로 사용되고 있는 잡음제거를 위한 웨이블릿 방법은 웨이블릿 축소법(Wavelet Shrinkage)으로 다음과 같이 정의된다.

$$\tilde{f} = \sum_{\lambda} \tilde{c}_{\lambda} \psi_{\lambda}; \quad \tilde{c}_{\lambda} = S_{\mu}(c_{\lambda})$$

여기서 c_{λ} 는 잡음에 오염된 영상의 웨이블릿 계수이고, 축소함수 S 는 정해진 $\mu > 0$ 에 따라 다음과 같이

$$S_{\mu}(x) = \begin{cases} x - \mu, & x > \mu, \\ 0, & |x| < \mu, \\ x + \mu, & x < -\mu, \end{cases}$$

정의된다. 웨이블릿 축소법은 여러 응용분야에서 기존의 컨볼루션 기반 잡음제거에 비해 향상된 결과를 제공함이 많이 연구를 통해 알려져 있다[5],[6],[7],[9],[10],[11].

영상재구성 과정은 사실상 적분에 대한 역과정이므로 잡음에 상당히 민감하다. 사실, II장에서 설명한 역투사방법은 영상재구성과정에서 잡음을 증폭시킨다. 이를 해결하기 위해 FBP가 제안되었으나 FBP는 고주파영역을 무시함으로써 잡음제거 효과를 얻기 때문에 재구성된 영상의 해상도를 떨어트리는 단점이 있다. Donoho[4]는 이러한 문제를 해결하기 위한 방법으로 웨이블릿-배규렛 분해(WVD: Wavelet-Vaguelette Decomposition)을 제시하였다. 웨이블릿기저가 특정한 조건을 만족하는 경우, 프로젝션 공간에서

$$K^* U_{\lambda} = 2^{-k/2} \psi_{\lambda}, \quad K \psi_{\lambda} = 2^{-k/2} V_{\lambda}$$

을 만족하는 쌍대기저 $\{U_{\lambda}\}, \{V_{\lambda}\}$ 을 구할 수 있고, 이를 이용하여 주어진 영상 f 을

$$f = \sum_{\lambda} 2^{k/2} \langle Kf, U_{\lambda} \rangle \psi_{\lambda} \quad (9)$$

에 의해 얻을 수 있다. 식 (9)를 라돈변환 K 에 대한 재생공식 (Reproducing Formula)라고 하는데 그 이유는 원래의 f 를 라돈변환 Kf 에서 재생할 수 있는 방법을 제시하기 때문이다. 이러한 성질을 이용하여 Donoho는

$$f = \sum_{\lambda} S_{\mu}(2^{k/2} \langle Y, U_{\lambda} \rangle) \psi_{\lambda} \quad (10)$$

를 잡음이 섞인 프로젝션 Y 로부터 영상재구성하는 방법으로 제안하였다.

WVD의 핵심은 비록 직교기저는 아니지만 거의 직교기저와 유사하게 정규잡음의 영향을 모든 계수 $\langle Y, U_{\lambda} \rangle$ 에 골고루 퍼지게 할 수 있는 쌍대기저 $\{U_{\lambda}\}, \{V_{\lambda}\}$ 가 존재한다는 사실에 있다. 그러나, 이 논문에서 다루고자 하는 X선 영상재구성에서는 Π 장에서 언급하였듯이 프로젝션의 잡음이 정규잡음을 따른다고 가정하기에는 무리가 있다. 이 논문에서는 X선 강도 $I(\theta, u)$ 의 잡음에 대해 식 (7)의 모델을 가정한다.

그림 3-(a)는 재구성하고자 하는 영상 $f(x, y)$ 를, 그림 3-(b)는 관측된 X선 강도 $I(\theta, u)$ 이고, 그림 3-(c)는 고정된 θ 에 대한 관측된 X선 강도 $I(\theta, u)$ 의 그래프이다. 그림 3-(c)의 그래프에 대해 관측 대상을 투과하여 감쇠가 일어나는 경우만 한정해서 보면 그 값의 차이가 크지 않음을 알 수 있다. 이러한 현상은 관측 대상이 회전 중심부분에 분포하는 경우에 그러한 경향이 더 강하다.

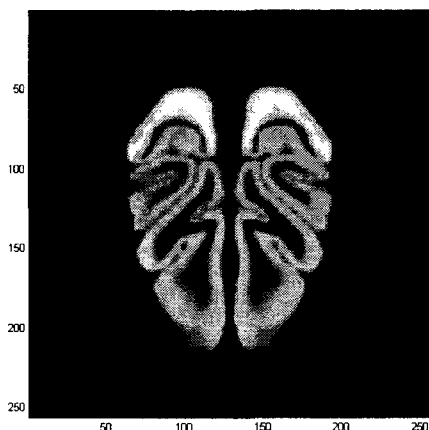


그림 3-a. 원래 영상 $f(x, y)$
Fig. 3-a. Original Image

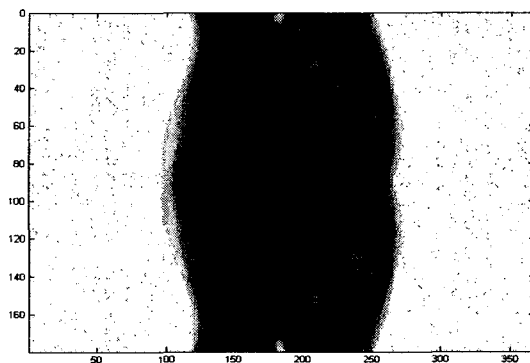


그림 3-b. 관측된 X선 강도 $I(\theta, u)$
Fig. 3-b. Observed X-ray intensity $I(\theta, u)$

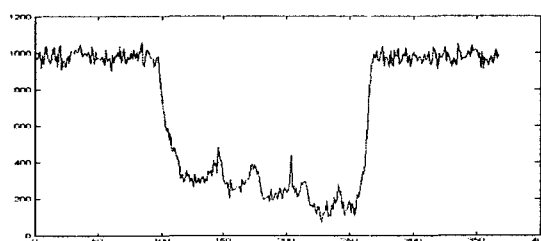


그림 3-c. 고정된 θ 에 대한 관측된 X선 강도 $I(\theta, u)$
Fig. 3-c. Observed X-ray intensity $I(\theta, u)$ for a fixed θ

이러한 사실을 고려하여

$$\tilde{b}(u) = b(u) + (m(u) - 1) \frac{I_0}{N_{\theta}} \sum_{\theta} \exp(-Kf(\theta, u))$$

$$n(u) = \frac{1}{N_{\theta}} \sum_{\theta} (s(\theta, u) + r(\theta, u))$$

에 대해

$$\tilde{b}(u) \sim N(0, \sigma^2) \quad (11)$$

$$n(u) \sim N(0, \rho^2) \quad (12)$$

을 가정한다. 여기서, N_{θ} 는 각도의 개수이다. 이 경우에 관측된 X선 강도의 평균 $A(u)$ 은 다음과 같다.

$$A(u) = \frac{I_0}{N_{\theta}} \sum_{\theta} \exp(-Kf(\theta, u)) + \tilde{b}(u) + n(u)$$

논의를 편리하게 하기 위해 충격잡음 $s(\theta, u)$ 도 정규분포 $N(0, \sigma_s^2)$ 를 따른다고 가정하자(충격잡음은 포아송 분포를 따르나 평균이 적당히 큰 경우에는 정규분포로 근사할 수 있다).

그러면, $n(u) \sim N\left(0, \frac{\sigma_s^2 + \sigma_r^2}{N_{\theta}}\right)$ 을 따르므로,

$$\rho^2 = \frac{\sigma_s^2 + \sigma_r^2}{N_{\theta}} \quad (13)$$

임을 알 수 있다. 한편, 대상을 투과하여 감쇠가 일어난 u 에 대해서만 한정하여 $\frac{I_0}{N_{\theta}} \sum_{\theta} \exp(-Kf(\theta, u))$ 의 평균값을 c 라

하자(감쇠가 일어나지 않은 지역은 잡음제거를 완벽하게 할 수 있기 때문에 그 지역에서는 잡음이 없다고 가정할 수 있다). 그러면, 감쇠가 일어난 u 에 대해서는 식 (7), (11)을 종합하여

$$\sigma^2 \approx \sigma_b^2 + c^2 \sigma_m^2 \quad (14)$$

을 얻는다. 식 (11)-(14)을 종합해 볼 때, σ_s^2 와 σ_r^2 가 σ_b^2 에 비해 너무 크지 않은 경우를 제외하고는 $n(u)$ 의 잡음강도 ρ^2 는 $\bar{b}(u)$ 의 잡음강도 σ^2 에 비해 작을 것이다. 이러한 사실을 이용하여 웨이블릿 축소법을 $A(u)$ 에 적용하여 $m(u)$ 와 $b(u)$ 에 의한 잡음을 먼저 제거할 수 있다. 이 논문에서는 이러한 과정을 MEWS(Mean-Estimation-Wavelet Shrinkage)라고 명명한다. 구체적으로, MEWS는 다음의 절차를 따른다.

MEWS

1) 관측된 X선 강도 $I(\theta, u)$ 에 대해 각도에 대한 평균 $A(u)$ 을 계산한다.

2) $A(u)$ 에 섞여 있는 잡음의 강도를 추정한다. 이 논문에서는 이를 위해 $A(u)$ 의 첫 번째 미세 1차원 웨이블릿 계수에 절대값을 취한 후 그것의 중간값(median)을 0.6745로 나눈 값을 잡음 강도에 대한 추정으로 하였다(이 방법에 대한 타당성은 [9][10][14]에 찾을 수 있다).

$$\hat{\sigma} = \text{median} \{ |d_\lambda| \} / 0.6745$$

d_λ : $A(u)$ 의 첫 번째 미세 웨이블릿 계수

3) 각각의 θ 에 대해 $I(\theta, u)$ 에 1차원 웨이블릿 축소법을 응용하여, 잡음이 제거된

$$\tilde{I}(\theta, u) = \sum_\lambda S_\mu(e_\lambda) \psi_\lambda$$

을 얻는다. 여기서, e_λ 는 고정된 θ 에 대해 $I(\theta, u)$ 의 1차원 웨이블릿 계수이다. 웨이블릿 축소량은 [9]에서 제안한

$$\mu = \sqrt{2 \log N_u} \hat{\sigma}$$

을 사용한다. 여기서 N_u 는 위치 u 의 개수이다.

위에서 제안한 축소량은 필요 이상으로 웨이블릿 계수를 축소시켜 영상자체에 손상을 주는 일이 많이 발생한다는 비판이 있어 왔다[10],[11],[14]. 그러나, 이 논문에서 다루고자 하는 응용에서는 MEWS의 2번째 단계에서 추정되는 $A(u)$ 에서의 잡음의 강도(그림 2-(a) 참조)가 웨이블릿 축소법을 적용할 대상인 $I(\theta, u)$ 의 잡음강도(그림 3-(c) 참조)에 비해 현저히 작다. 또한, 원형모양 오류를 가감하게 제거할 필요가 있기 때문에 상대적으로 큰 웨이블릿 축소량을 제안하였다.

MEWS의 목적은 X선 방출기와 검출기에서 발생하는 오차가 주는 원형모양 오류(ring artifacts)를 제거하는데 있다. 그러한 오류는 각도방향으로 매우 강한 연관성(correlation)을 가지고

발생하므로 보통의 콘볼루션을 이용한 평탄화(smoothing) 또는 2차원 웨이블릿 축소법에 의해서는 제거하기 힘들다.

MEWS를 통과한 $I(\theta, u)$ 에 대해 다음 절차를 통해 $Kf(\theta, u)$ 에 대한 추정 $Y(\theta, u)$ 을 구한다.

$$Y(\theta, u) = \log \frac{I_0}{I(\theta, u)}$$

$Y(\theta, u)$ 에는 MEWS 통해 원형모양 오류(ring artifacts)를 나타내는 잡음이 제거되었으나, 충격잡음 $s(\theta, u)$ 과 읽기잡음 $r(\theta, u)$ 에 의한 오류는 그대로 남아있는 상태이다. 충격잡음과 읽기잡음은 대체로 정규잡음과 같이 재구성된 영상 전체(공간영역과 주파수 영역을 동시에 의미함)에 고르게 영향을 준다. 이러한 잡음을 제거하기 위하여 식 (10)의 WVD를 이용한 영상재구성을 제안한다. 이를 구체적으로 기술하면 다음과 같다.

WVD

1) $Y(\theta, u)$ 의 배규렛 계수 $\langle Y, U_\lambda \rangle$ 를 [6]의 알고리즘을 이용하여 계산한다.

2) 첫 번째 미세 배규렛 계수 $\langle U, U_\lambda \rangle$ 를 이용하여 잡음 강도를

$$\hat{\sigma}_0 = \text{median} \{ |D_\lambda| \} / 0.6745$$

D_λ : $Y(\theta, u)$ 의 첫 번째 미세 대각 배규렛 계수의 방법으로 추정한다.

3) 각각의 $2^{k/2} \langle Y, U_\lambda \rangle$ 에 대해 2차원 웨이블릿 축소법을 적용한다. 이때 축소량은 [6]에서 제안한

$$\mu_k = 2^{k/2} a \hat{\sigma}_0$$

을 사용한다. 여기서, a 는 잡음의 강도와 재구성하고자 하는 영상의 평탄성에 의해 결정할 수 있는 계수이다.

구체적으로, $Y(\theta, u)$ 의 배규렛 계수의 계산을 위해 다음과 같은 [6]의 알고리즘을 이용하였다: 먼저, 함수 $\rho(\xi) = |\xi| \hat{\phi}(\xi)$ 로 정의한다. 여기서, ϕ 는 2차원 스케일링 함수이다. 함수 ρ 에 대해 $\rho_{k,j} = 2^k \rho(2^k \cdot -j)$ 로, 그리고 $w_{k,j} = 2^{k/2} K \rho_{k,j}$ 로 정의하면, $2^{k/2} \langle Kf, w_{k,j} \rangle = \langle f, \phi_{k,j} \rangle$ 가 성립함을 알 수 있다. 이러한 사실을 앞에서 간략히 $2^{k/2} \langle Af, U_\lambda \rangle = \langle f, \psi_\lambda \rangle$ 으로 표현하였다. 이는, 소위 FWT(Fast Wavelet Transform)이 스케일링 함수와의 내적 $\langle f, \phi_{k,j} \rangle$ 에서 웨이블릿 계수 $\langle f, \psi_\lambda \rangle$ 를 계산하는 방법과 같이 $2^{k/2} \langle Y, U_\lambda \rangle$ 도 가장 높은 스케일에 해당하는 $2^{m/2} \langle Y, w_{m,j} \rangle$ 에 FWT를 적용하여 얻을 수 있음을 의미한다. 여기서, 처음 시작하는 $2^{m/2} \langle Y, w_{m,j} \rangle$ 의 계산은 다음과 같이 푸리에 변환 영역에서 계산하였다.

$$2^{m/2} \langle Y, w_{m,j} \rangle = 2^{-m} \int_{\mathbb{R}^2} |\xi| K^* Y(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot j 2^{-m}} \overline{\phi(2^{-m} \xi)} d\xi$$

보통의 영상의 경우 a 는 1.0 근처의 값이 가장 좋은 결과를 얻음을 이론과 실험을 통해 확인할 수 있다[6]. 이 논문에서는 $a = 1.0$ 로 고정하여 사용하였다.

IV. 실험결과 및 고찰

제안된 영상재구성 방법(MEWS+ WVD)의 우수성을 시뮬레이션을 통해 증명하기 위해 256 x 256 크기의 영상(그림 2-(a))을 이용하여 X선 강도 $I(\theta, u)$ (그림 2-(b))를 180개의 각도(0도부터 179도까지의 각도를 1도씩 증가시키며 측정)를 계산하였다. 이때 잡음에 대한 통계적 시뮬레이션은 식(7)을 이용하였으며 사용한 계수들은 다음과 같다.

$$I_0 = 2^{16}, \quad \sigma_m = 0.001, \quad \sigma_b = 10, \quad \sigma_r = 40$$

그림 4는 FBP에 의한 영상재구성 결과이다. 이 시뮬레이션에서는 잡음제거를 위한 필터로 Hann 필터(식(8)에서의 H 를 의미한다)를 사용하였다. 그림 4-(a)의 결과는 Hann 필터를 모든 주파수 대역에 대해서 적용한 결과이다. 그림 4-(a)는 원형모양 오류(ring artifacts)와 물결무늬오류(streak artifacts)에 의해 많이 손상되었음을 알 수 있다. 그림 4-(b)는 Hann 필터를 하위 50% 주파수 대역에만 적용하여 얻은 결과이다. 그림 4-(a)에 비해 그림 4-(b)의 결과는 전체적으로 향상된 결과를 보이나, 여전히 원형모양 오류는 남아있다. 그림 4-(c)는 Hann 필터를 하위 25% 주파수 대역에 적용한 결과이다. 원형모양 오류와 물결무늬오류 모두 제거되었으나, 상위 75% 주파수 대역에서의 정보를 완전히 무시했기 때문에 영상의 해상도의 손실이 크다.

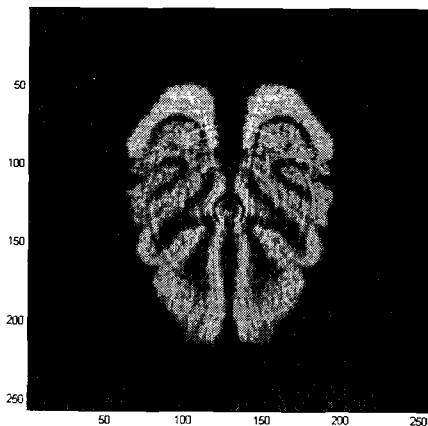


그림 4-a. MSS + FBP, Hann 필터(100% 주파수 대역)
Fig. 4-a. MSS + FBP with Hann filter(100% frequency)

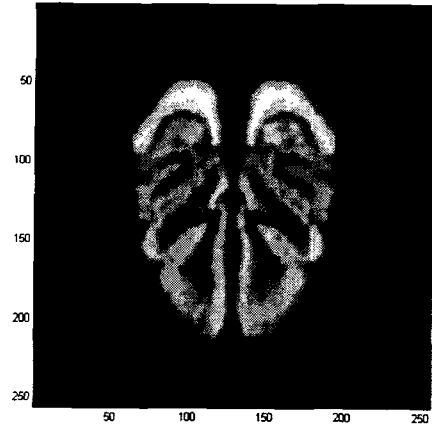


그림 4-b. MSS + FBP, Hann 필터(50% 주파수 대역)
Fig. 4-b. MSS + FBP with Hann filter(50% frequency)

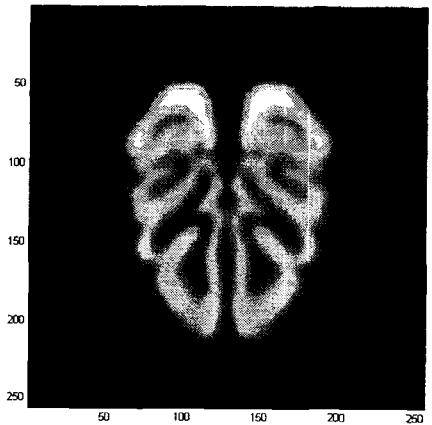


그림 4-c. MSS + FBP, Hann 필터(25% 주파수 대역)
Fig. 4-c. MSS + FBP with Hann filter(25% frequency)

그림 5는 이 논문에서 제안한 방법에 의한 결과이다. 웨이블릿은 탭의 길이가 12(분석필터), 16(합성필터)인 쌍대 웨이블릿(biorthogonal wavelet)을 사용하였다. 그림 5의 웨이블릿을 이용한 결과는 원형모양 오류제거, 전체적인 잡음제거, 영상 해상도를 고려한 종합적인 측면에서 그림 4의 FBP 결과에 비해 우수하다는 것을 알 수 있다.

그림 6은 MEWS를 사용하지 않고 WVD만을 이용하여 얻은 결과이다. 원형모양 오류가 많이 남아있음을 알 수 있다. 그림 6의 결과를 볼 때 MEWS에 의한 원형모양 오류제거가 중요하다는 것을 알 수 있다. 한편, 그림 7은 MSS를 사용하지 않고 FBP만을 이용하여 얻은 결과이다. 그림 4-(b)와 비교해 볼 때, MSS에 의한 원형모양 오류제거가 불충분함을 알 수 있다.

V. 결론

이 논문은 X선을 이용한 영상재구성에서 발생하는 잡음에 적합한 잡음제거와 영상재구성에 대해 다루었다. X선을 이용한 관측에서 흔히 발생하는 오류의 하나는 X선 방출기와 이를 측정하는 검출기의 기계적 오류에 의한 것으로 이는 영상재구성 과정에서 원형모양 오류로 나타난다. 이를 제거하기 위해 이 논문에서는 해당 오류가 각도방향으로 강한 연관이 있다는 점을 착안하여 관측된 X선 강도를 각도방향의 평균을 구한 후 해당 오류를 추정하고 1차원 웨이블릿 축소법을 이용하여 프로젝션으로부터 제거하는 방법을 제시하였다. 또한, 영상재구성과 정규잡음제거를 위한 방법으로 WVD를 제시하였다. 제안된 방법은 기존의 FBP와 WVD에 비해 우수한 결과를 제공함을 시뮬레이션을 통해 확인할 수 있었다.

이 논문에서는 X선을 방출기와 검출기의 회전 할 때 회전의 중심축이 고정되지 않아 발생하는 오류는 고려하지 않았다. 이러한 오류는 영상재구성에서 원호 모양의 오류(arc artifacts)를 발생하는데 이는 프로젝션 데이터의 중심을 추정하는 문제로 귀착된다. 한편, 충격잡음과 읽기잡음은 대체로 정규잡음과 같이 재구성된 영상 전체에 고르게 영향을 준다. 이러한 잡음은 기존의 WVD에 의해 상당 정도 제거가능하다. 그러나, 충격잡음과 읽기잡음은 때때로 특정 지역에 집중적인 영향을 주는 경우가 있다. 가장 대표적인 예는 특정 (θ_0, u_0) 에 대해 $Y(\theta, u)$ 의 값이 주위의 값에 비해 현격히 다른 경우이다. 이러한 현상은 영상재구성에서 zinger 오류(그림 3-(a)에서 직선모양의 오류)로 나타난다. 이러한 원호와 zinger 오류를 효과적으로 제거할 수 있는 영상재구성 방법에 대한 연구를 제안한다.

참고문헌

[1] L.A. Shepp and B.F. Logan, "The Fourier reconstruction of head section," IEEE Trans. Nuclear Science, 21(1), pp. 21-43, 1974.
 [2] L.A. Shepp and Y. Vardi, "Maximum likelihood reconstruction for emission tomography," IEEE Trans. Medical Imaging, Vol. 1, pp. 113-122, 1982.
 [3] M.L. Rivers, "Tutorial introduction to X-ray computed microtomography," <http://www-fp.mcs.anl.gov/xray-cmt.html/rivers/tutorial.html> (accessed May 2006)
 [4] T.J. Hebert and R. Leahy, "Statistic-based MAP image reconstruction from Poisson data using Gibbs priors," IEEE Trans. Signal Processing, Vol. 40(9), pp. 2290--2303, 1992.

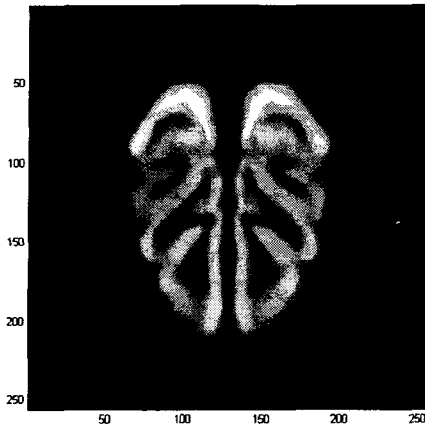


그림 5. MEWS + WVD에 의한 결과
 Fig. 5. Image by MEWS + WVD

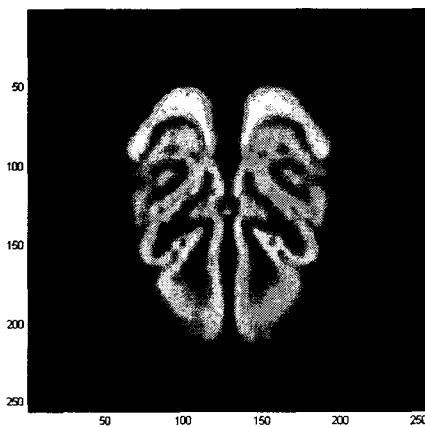


그림 6. WVD 결과(MEWS를 사용하지 않음)
 Fig. 6. Image by WVD without MEWS

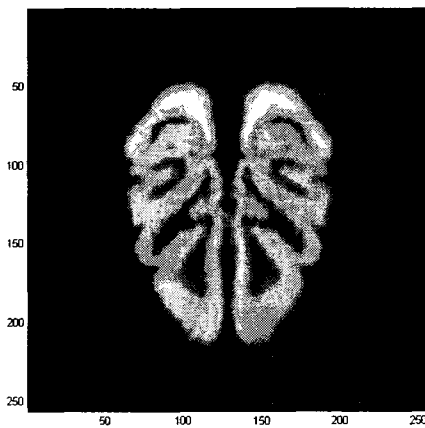


그림 7. FBP, Hann 필터(50% 주파수 대역)
 Fig. 7. FBP with Hann filter(50% frequency)

- [5] E.D. Kolaczyk, "A wavelet shrinkage approach to tomographic image reconstruction," J. Amer. Statist. Assoc., Vol. 91, pp. 1079-1090, 1996.
- [6] N.-Y. Lee and B. Lucier, "Wavelet Methods for Inverting the Radon Transform with Noisy Data", IEEE Trans. Image Processing, Vol. 10(1), pp. 79-94, 2001.
- [7] Y. Choi, J.-Y. Koo, and N.-Y. Lee, "Image reconstruction using the wavelet transform for positron emission tomography," IEEE Trans. Medical Imaging, Vol. 20(11), pp. 1188-1193, 2001.
- [8] Y. Wang, F. De Carlo, I. Foster, J. Insley, C. Kesselman, P. Lane, G. von Laszewski, D. Mancini, I. McNulty, M.-H. Su, B. Tieman, "A quasi-realtime x-ray microtomography system at the Advanced Photon Source," Proceedings of the SPIE99, Vol. 3772, pp. 318-327, 1999.
- [9] D. Donoho and I. Johnstone: "Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage," Biometrika, Vol. 81, pp. 425-455, 1994.
- [10] D. Donoho and I. Johnstone: 'Adapting to Unknown Smoothness via Wavelet Shrinkage', J. Amer. Statist. Assoc., Vol. 2, pp. 101-126, 1995.
- [11] A. Chambolle, R. DeVore, N.-Y. Lee, and B. Lucier, "Nonlinear Wavelet Image Processing: Variational Problems, Compression, and Noise Removal through Wavelet Shrinkage", IEEE Trans. Image Processing, Vol. 7(3), pp. 319- 335, 1998.
- [12] D.L. Donoho, "Nonlinear solution of linear inverse problem by wavelet-vaguelette decomposition," Appl. Comput. Harmon. Anal., 2, pp. 101-126, 1995.
- [13] I. Daubechies: 'Ten Lectures on Wavelets', SIAM, Philadelphia, 1992.
- [14] S.G. Chang, B. Yu, and M. Vetterli, "Adaptive wavelet thresholding for image denoising and compression," IEEE Trans. Image Processing, Vol 9(9), pp. 1532 - 1546, 2000.
- [15] R. R. Coifman and D.L. Donoho. "Translation invariant denoising," Technical Report 475, Dept. of Statistics, Stanford University, 1995



이 남 용(Nam-Yong Lee)
 1990년 2월: 서울대 수학과 졸업 (학사)
 1997년 12월: Purdue University
 (Ph.D.)
 2002년 9월 - 현재: 인제대학교 컴퓨터응
 용과학부 조교수



문 중 익(Jong-Ik Moon)
 2002년 2월: 인제대학교 수학과
 졸업(학사)
 2004년 2월: 인제대학교
 컴퓨터응용과학부 졸업(석사)
 2004년 3월 - 2005년 2월: 인제대학교
 기초과학연구 연수연구원
 2005년 3월 - 현재: 김해대학 중앙전산소