

다자유도 비선형계의 불규칙 진동 해석

이신영*

(논문접수일 2006. 2. 14, 심사완료일 2006. 6. 7)

Random Vibration of Non-linear System with Multiple Degrees of Freedom

Sin-Young Lee*

Abstract

Vibration of a non-linear system with multiple degrees of freedom under random parametric excitations was evaluated by probabilistic method. The non-linear characteristic terms of system structure were quasi-linearized and excitation terms were remained as they were. An analytical method where the expectation values of square mean of error was minimized was used. The numerical results were compared with those obtained by Monte Carlo simulation. A linear congruential generator and Box-Muller method were used in Monte Carlo simulation. The comparison showed the results by probabilistic method agreed well with those by Monte Carlo simulation.

Key Words : Nonlinear system(비선형 시스템), Multi degree of freedom(다 자유도), Parametric excitation(변수 가진), Probabilistic method(확률론적 방법), Monte Carlo simulation(몬테카를로 시뮬레이션)

1. 서론

가공 작업에서의 채터 발생은 이송과 절삭깊이에 제한을 주어 생산성 및 가공 정밀도를 떨어뜨린다. 채터 현상은 공구와 공작물 사이에 존재하는 과도 진동에 의하여 생성되고 공작물 표면에 불규칙한 패턴을 초래한다⁽¹⁾. 공작기계와 공작물은 매우 복잡한 동적 특성을 갖는 구조 시스템이며, 공작기계의 거동을 시뮬레이션 하는 데에는 절삭동역학의 많은 변수와 같은 여러 가지 인자들이 요구된다. 구조 시스템 자체는 기본적으로 안정할 수 있으나 공작물이나 공구의

회전 및 스트로크로 인하여 발생한 파동면을 절삭하여 발생하는 강제 진동은 기존의 진동을 크게 확대할 수 있다. 절삭 가공에서 가공 상태를 예측하고 진단하는 것은 고정밀 가공 뿐 아니라 가공작업의 안정성 및 자동화에 불가결한 요소이다⁽²⁾.

또한, 절삭가공의 많은 경우 구조의 특성과 가진 특성에 불규칙성이 포함되어 있으므로 이러한 비선형의 경우에 대한 구조물의 동적 응답 해석과 신뢰성평가에 대한 필요가 증가되어져 오고 있다.

불규칙 진동을 받는 비선형 시스템의 여러 가지 해석 방법

* 군산대학교 기계공학부 (sinylee@kunsan.ac.kr)
주소: 573-701 전북 군산시 미룡동 산68

중 널리 사용되는 방법으로 통계적 선형화 방법이 있다⁽³⁻⁸⁾. 통계적 선형화의 기본 아이디어는 비선형 시스템을 그것과 비슷한 거동을 하는 등가 선형 시스템으로 대체하는 것이다. 기본적으로 이 방법은 결정론적 선형화 방법을 일반화 한 것이다⁽⁶⁾. 오차를 최소화하기 위하여 일반적으로 사용하는 기준은 오차 과정의 제곱 평균을 최소화하는 것이다. 이 기준으로부터 선형화 시스템의 매개 변수를 구할 수 있다.

본 논문에서는 다자유도 비선형 시스템에 주요한 영향을 미치는 변수 가진이 작용하는 경우에 근사해를 구하는 과정에 대하여 연구한다. 시스템 전체가 아닌 일부를 선형화하는 준선형화 방법에 의하여 비선형 감쇠 및 비선형 강성을 선형화하였다. 변수 가진 항은 선형화하지 않으며, 통계적 적률에 의하여 진동 문제를 해석하였다. 이토(Ito)의 미분규칙⁽⁷⁾을 사용하여 해석 절차를 진행하였으며 적분 변환에 의하여 스펙트럼 밀도 함수를 구하였다. 준선형화 계수를 구하는 것이 필요하며, 이를 위하여 본 논문에서는 원래의 비선형 시스템과 준선형화 시스템의 오차 제곱의 기댓값을 최소로 하는 방법을 사용하였다. 본 방법에 의하여 구한 해와 몬테카를로 시뮬레이션에 의하여 구한 해를 비교한 결과 강한 비선형성을 갖는 경우에도 양호한 결과를 나타내었다.

2. 비선형 시스템의 준선형화

일반적인 다자유도 비선형 시스템이 매개변수 가진을 받는 경우의 방정식은 식 (1)과 같다.

$$\ddot{Y}_j(t) + h_j(Y(t), \dot{Y}(t)) = \xi_j(t) + \sum_{i=1}^n [a_{ji} \dot{Y}_i(t) \eta_i(t) + b_{ji} Y_i(t) \gamma_i(t)] \quad (1)$$

본 연구에서는 Fig. 1과 같이 공작기계 절삭가공의 구조 동역학 및 절삭동역학을 2자유도 시스템으로 모델링 하였다. Fig. 1에서 m_1 - k_1 - c_1 은 공구계를 나타내고, m_2 - k_2 - c_2 는 공작물 계를, k_3 와 c_3 는 절삭동역학을 나타낸다.

절삭과정의 반발력을 식 (2)와 같이 모델링하고,

$$f_r(t) = k_3(x_1 - x_2) + \beta_1(x_1 - x_2)^3 \quad (2)$$

공구계에 작용하는 외력을 식 (3)과 같이 설정하면,

$$F(t) = x_1(t)w_1(t) + w_2(t) \quad (3)$$

전체 시스템의 운동방정식은 식 (4)와 같다.

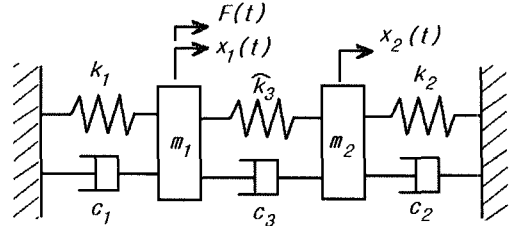


Fig. 1 A model of machining process

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + c_3 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_3 (x_1 - x_2) + \beta_1 (x_1 - x_2)^3 = x_1 w_1 + w_2 \quad (4a)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + c_2 \dot{x}_2 + k_2 x_2 + c_3 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_3 (x_2 - x_1) + \beta (x_2 - x_1)^3 = 0 \quad (4b)$$

식 (4)를 간단히 하기 위하여 새로운 변수를 도입하면,

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{m_2}{m_1}, \quad \beta = \frac{\beta_1}{m_2}, \quad c_{11} = \frac{c_1 + c_3}{m_1}, \\ c_{12} &= -\frac{c_3}{m_1}, \quad \omega_{11} = \frac{k_1 + k_3}{m_1}, \quad \omega_{12} = \frac{k_3}{m_1}, \\ c_{21} &= -\frac{c_3}{m_2}, \quad c_{22} = \frac{c_2 + c_3}{m_2}, \quad \omega_{21} = \frac{k_3}{m_2}, \\ \omega_{22} &= \frac{k_2 + k_3}{m_2}, \quad \eta(t) = \frac{w_1(t)}{m_1}, \quad \xi(t) = \frac{w_2(t)}{m_1}, \\ x_3 &= \dot{x}_1, \quad x_4 = \dot{x}_2. \end{aligned} \quad (5)$$

식 (4)를 변형하면

$$\dot{x}_1 = x_3 \quad (6a)$$

$$\dot{x}_2 = x_4 \quad (6b)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= -c_{11}x_3 - c_{12}x_4 - \omega_{11}x_1 + \omega_{12}x_2 \\ &\quad - \rho\beta(x_1 - x_2)^3 + \eta(t)x_1 + \xi(t) \end{aligned} \quad (6c)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 &= -c_{21}x_3 - c_{22}x_4 + \omega_{21}x_1 - \omega_{22}x_2 \\ &\quad + \beta(x_1 - x_2)^3 \end{aligned} \quad (6d)$$

$\eta(t)$ 및 $\xi(t)$ 의 스펙트럼 밀도(spectral density)를 각각 $K_{\eta\eta}$ 및 $K_{\xi\xi}$ 라고 하고, 두 가진은 서로 연관되지 않는다고 가정한다. 식 (6)의 비선형 시스템은 다음과 같은 등가 준선형 시스템으로 대체할 수 있다.

$$\dot{x}_1 = x_3 \quad (7a)$$

$$\dot{x}_2 = x_4 \quad (7b)$$

$$\dot{x}_3 = -c_{11}x_3 - c_{12}x_4 - k_{12}x_1 - k_{12}x_2 + \eta(t)x_1 + \xi(t) \quad (7c)$$

$$\dot{x}_4 = -c_{21}x_3 - c_{22}x_4 - k_{21}x_1 - k_{22}x_2 \quad (7d)$$

여기에서 k_{11} , k_{12} , k_{21} 과 k_{22} 는 등가 선형화계수(equivalent linearization coefficients)이다. 식 (7)에서 Ito 통계학적 방정식이 유도된다.⁽⁷⁾

$$dx_1 = x_3 dt \quad (8a)$$

$$dx_2 = x_4 dt \quad (8b)$$

$$dx_3 = (-c_{11}x_3 - c_{12}x_4 - k_{11}x_1 - k_{12}x_2)dt + \sqrt{2\pi K_{\eta\eta}} x_1 dB_{\eta}(t) + \sqrt{2\pi K_{\xi\xi}} dB_{\xi}(t) \quad (8c)$$

$$dx_4 = (-c_{21}x_3 - c_{22}x_4 - k_{21}x_1 - k_{22}x_2)dt \quad (8d)$$

여기에서 $B(t)$ 는 단위 Wiener과정(unit Wiener process)이고,

$$E[dB(t_1)dB(t_2)] = \begin{cases} 0, & t_1 \neq t_2 \\ dt, & t_1 = t_2 = t \end{cases} \quad (9)$$

식 (8a~d)의 일반형은 다음과 같다.

$$dx_i = f_i dt + \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{s=1}^n \sqrt{2\pi K_{ls}} g_{il} g_{js} dB_j \quad (10)$$

Ito의 통계학적 미분규칙(Ito's stochastic differential rule)은 다음과 같다. p 차 적률(moments)을 M 이라고 하면,

$$M(X) = x_1^i x_2^j x_3^k x_4^l, \quad p = i + j + k + l \quad (11)$$

$$\frac{d}{dt} E[M] = E \left[\sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial M}{\partial x_i} \right] + \sum_{l=1}^n \sum_{s=1}^n \pi K_{ls} E \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{il} g_{js} \frac{\partial^2 M}{\partial x_i \partial x_j} \right] \quad (12)$$

충분히 긴 시간 동안 백색 잡음 가진에 노출된 후 시스템의 응답은 통계적 정상상태에 도달하게 되고, 그 때 식 (12)는 대수방정식으로 축소된다.

$$E \left[\sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial M}{\partial x_i} \right] + \sum_{l=1}^n \sum_{s=1}^n \pi K_{ls} E \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{il} g_{js} \frac{\partial^2 M}{\partial x_i \partial x_j} \right] = 0 \quad (13)$$

통계학적 미분규칙을 사용하여 정상상태 2차 적률에 대한 식을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} m_{1010} &= 0 \\ m_{0101} &= 0 \\ \pi K_{\eta\eta} m_{2000} + \pi K_{\xi\xi} - c_{11} m_{0020} - c_{12} m_{0011} - k_{12} m_{0110} &= 0 \\ c_{21} m_{0011} + c_{22} m_{0002} + k_{21} m_{1001} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{11} m_{2000} + k_{12} m_{1100} - m_{0020} + c_{12} m_{1001} &= 0 \\ m_{0002} - c_{21} m_{0110} - k_{21} m_{1100} - k_{22} m_{0200} &= 0 \\ m_{0110} + m_{1001} &= 0 \\ m_{0011} - c_{22} m_{1001} - k_{21} m_{2000} - k_{22} m_{1100} &= 0 \\ m_{0011} - c_{11} m_{0110} - k_{11} m_{1100} - k_{12} m_{0200} &= 0 \\ c_{11} m_{0011} + c_{12} m_{0002} + k_{11} m_{1001} + c_{21} m_{0020} \\ + c_{22} m_{0011} + k_{22} m_{0110} &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

같은 절차를 사용하여, 4차 정상 적률에 대한 식을 구할 수 있고 이 경우 35개의 미지수에 대한 식을 세워서 연립방정식을 풀면 된다.

$$\begin{aligned} m_{3010} &= 0, \\ 3m_{2110} + m_{3001} &= 0, \\ 3m_{2020} - c_{11} m_{3010} - c_{12} m_{3001} - k_{11} m_{4000} - k_{12} m_{3100} &= 0, \\ 3m_{2011} - c_{21} m_{3010} - c_{22} m_{3001} - k_{21} m_{4000} - k_{22} m_{3100} &= 0, \\ m_{1210} + m_{2101} &= 0, \\ 2m_{1120} + m_{2011} - c_{11} m_{2110} - c_{12} m_{2101} \\ - k_{11} m_{3100} - k_{12} m_{2200} &= 0, \\ m_{1030} - c_{11} m_{2020} - c_{12} m_{2011} - k_{11} m_{3010} - k_{12} m_{2110} \\ + \pi K_{\eta\eta} m_{4000} &= -\pi K_{\xi\xi} m_{2000}, \\ \dots \\ c_{21} m_{0013} + c_{22} m_{0004} + k_{21} m_{1003} + k_{22} m_{0103} &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

원래의 비선형 시스템이 어떤 차수의 적률에서 안정하다면 등가의 준선형 시스템은 같은 차수의 적률에서 안정하다. 준선형화 시스템에서 등가 선형화 계수는 다음과 같이 오차의 제곱의 기댓값을 최소화하도록 선정한다.

$$E[\{err_1\}^2] = \min. \quad \& \quad E[\{err_2\}^2] = \min. \quad (16)$$

여기에서

$$\begin{aligned} err_1 &= (-\omega_{11} + k_{11})x_1 + (\omega_{12} + k_{12})x_2 - \rho\beta(x_1 - x_2)^3, \\ err_2 &= (\omega_{21} + k_{21})x_1 + (-\omega_{22} + k_{22})x_2 - \beta(x_2 - x_1)^3 \end{aligned}$$

식 (16)을 k_{11} , k_{12} , k_{21} , k_{22} 에 대하여 편미분하고 기댓값을 취하면 등가 선형화계수를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} k_{11} &= \omega_{11} + \rho\beta \frac{m_{2000}A_1 - m_{1100}A_2}{m_{2200}m_{0200} - m_{1100}^2}, \\ k_{12} &= -\omega_{12} + \rho\beta \frac{m_{2000}A_2 - m_{1100}A_1}{m_{2000}m_{0200} - m_{1100}^2}, \\ k_{21} &= -\omega_{21} - \beta \frac{m_{0200}A_1 - m_{1100}A_2}{m_{2000}m_{0200} - m_{1100}^2}, \\ k_{22} &= \omega_{22} + \beta \frac{m_{1100}A_1 - m_{2000}A_2}{m_{2000}m_{0200} - m_{1100}^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

여기에서 $A_1 = m_{4000} - 3m_{3100} + 3m_{2200} - m_{1300}$

$$A_2 = m_{3100} - 3m_{2200} + 3m_{1300} - m_{0400}$$

식 (14), (15) 및 식 (17)을 반복적으로 풀면 선형화 계수를 구할 수 있다.

한편, 상관함수 $R_{ij}(\tau)$ 의 푸리에(Fourier) 변환으로부터 스펙트럼 밀도 함수를 구할 수 있다. 상관함수의 푸리에 변환은

$$\overline{\Phi}_{ij}(\omega) = \mathcal{F}[R_{ij}(\tau)] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} R_{ij}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (18)$$

미분의 푸리에 변환은

$$\mathcal{F}\left[\frac{dR_{ij}(\tau)}{d\tau}\right] = i\omega \overline{\Phi}_{ij}(\omega) - \frac{1}{\pi} E[X_i X_j] \quad (19)$$

비선형 시스템 식 (6)에 식 (18), (19)를 적용하면

$$\begin{aligned} i\omega \overline{\Phi}_{1k}(\omega) - \frac{1}{\pi} E[X_1 X_k] &= \overline{\Phi}_{3k}(\omega), \\ i\omega \overline{\Phi}_{2k}(\omega) - \frac{1}{\pi} E[X_2 X_k] &= \overline{\Phi}_{4k}(\omega), \\ i\omega \overline{\Phi}_{3k}(\omega) - \frac{1}{\pi} E[X_3 X_k] &= -c_{11} \overline{\Phi}_{3k}(\omega) - c_{12} \overline{\Phi}_{4k}(\omega) \\ &\quad - k_{11} \overline{\Phi}_{1k}(\omega) - k_{12} \overline{\Phi}_{2k}(\omega), \\ i\omega \overline{\Phi}_{4k}(\omega) - \frac{1}{\pi} E[X_4 X_k] &= -c_{21} \overline{\Phi}_{3k}(\omega) - c_{22} \overline{\Phi}_{4k}(\omega) \\ &\quad - k_{21} \overline{\Phi}_{1k}(\omega) - k_{22} \overline{\Phi}_{2k}(\omega). \end{aligned} \quad (20)$$

식 (20)으로부터 $\phi_{11}(\omega)$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\phi_{11}(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{R_1 R_2 + I_1 I_2}{R_1^2 + I_1^2} \quad (21)$$

여기에서

$$\begin{aligned} R_1 &= (k_{11} - \omega^2)(k_{22} - \omega^2) - \omega^2 c_{11} c_{22} - k_{12} k_{21} + \omega^2 c_{12} c_{21} \\ I_1 &= \omega \{c_{22}(k_{11} - \omega^2) + c_{11}(k_{22} - \omega^2) - c_{12} k_{21} - c_{21} k_{12}\}, \\ R_2 &= (k_{22} - \omega^2)(c_{11} m_{2000} + c_{12} m_{1100} + m_{1010}) \\ &\quad - k_{12}(c_{21} m_{2000} + c_{22} m_{1100} + m_{1001}) \\ &\quad - \omega^2 c_{22} m_{2000} + \omega^2 c_{12} m_{1100}, \\ I_2 &= \omega [c_{22}(c_{11} m_{2000} + c_{12} m_{1100} + m_{1010}) \\ &\quad - c_{12}(c_{21} m_{2000} + c_{22} m_{1100} + m_{1001}) - k_{12} m_{1100} \\ &\quad + (k_{22} - \omega^2) m_{2000}]. \end{aligned}$$

정상 상태 적률 식 (14)와 (15), 스펙트럼밀도 식 (21)은 등가 준선형계 식 (7)에 대하여 엄밀하고, 그것들은 원래의 비선형 시스템 식 (6)에 대한 근사해이다.

3. 몬테카를로 시뮬레이션

몬테카를로 시뮬레이션(Monte Carlo Simulation, MCS)은 계산을 수행하기 위하여 난수(random number)의 수열을 이용하는 방법을 가리키는 일반적인 용어이다⁽⁹⁾. 몬테카를로 시뮬레이션의 기본 절차는 (1) 불규칙 입력 생성, (2) 시스템 모델, (3) 시스템 출력, (4) 출력치의 통계적 처리이다. 입력치의 생성은 보통 두 단계로 나누어진다. 첫 단계는 난수 발생기에 의하여 균일한 분포를 갖는 난수를 얻는 것이고, 두 번째 단계는 변환장치를 사용하여 균일한 분포의 난수를 특정한 분포의 난수로 변환하는 작업이다.

일반적으로 많이 사용하는 발생법은 선형 조화 발생기(linear congruential generator)이고, 다음의 순환 방정식에 기초한다.

$$X_{n+1} = (A \times X_n + C) \bmod M \quad (22)$$

여기에서 X_{n+1} 은 새로 발생하는 난수, X_n 은 직전에 발생한 난수, A 는 배수로서 양의 수, 증분 C 는 0이상, 모듈 M 은 $M > X_n$, $M > A$, 및 $M > C$. 발생하는 수열의 특성은 상수 A , C 및 M 의 선택에 의존한다. 균일하게 분포하는 실수의 수열은 변환에 의하여 여러 가지 분포를 갖는 수열로 변환할 수 있다. 정규분포의 수열을 구하는 박스뮐러(Box-Muller) 방법의 수식은 다음과 같다^(9,10).

$$\begin{aligned} Y_1 &= \sqrt{-2 \ln X_1} \cdot \sin(2\pi X_2) \\ Y_2 &= \sqrt{-2 \ln X_1} \cdot \cos(2\pi X_2) \end{aligned} \quad (23)$$

여기에서 X_1 과 X_2 는 범위 (0, 1)에서 균일하게 분포하는 불규칙 변수이다. 독립적인 변수 Y_1 과 Y_2 는 정규화 된 정규분포를 가지며 기댓값 $\mu = 0$, 표준편차 $\sigma = 1$ 을 가진다. 변환된 난수의 품질은 전에 생성된 균일 분포 난수의 품질에 의존한다.⁽¹⁰⁾

본 논문에서 비선형 시스템의 시간이력 해석을 위하여 룬게쿠타(Runge-Kutta) 방법을 사용하였다.^(11,12)

시스템이 다음과 같이 주어진 경우,

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t) \quad (24)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4) \quad (25)$$

여기에서

$$f_1 = hf(y_n, t_n)$$

$$f_2 = hf(y_n + \frac{1}{2}f_1, t_n + \frac{h}{2})$$

$$f_3 = hf(y_n + \frac{1}{2}f_2, t_n + \frac{h}{2})$$

$$f_4 = hf(y_n + f_3, t_n + h)$$

또한 h 는 시간 간격, y_n 과 y_{n+1} 은 각각 시각 t_n 과 t_{n+1} 에서의 응답을 나타낸다. 각 시각에서의 응답을 이용하면 변위 제곱의 기댓값 및 스펙트럼 밀도^(7,12)를 구할 수 있다.

4. 수치계산 결과 및 고찰

4.1 경우 1($k_2 = c_2 = 0$ 인 경우)

시스템 식 (4)에 대한 수치 계산을 하기 위하여 질량비 $\rho = 0.1$, $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = 3$, $\omega_3 = \sqrt{\frac{k_3}{m_2}} = 6$, $\zeta_1 = \frac{c_1}{2m_1\omega_1} = 0.05$, $\zeta_3 = \frac{c_3}{2m_2\omega_3} = 0.05$, $\beta = 0.5$, $k_2 = c_2 = 0$ 인 경우에 해석을 실시하고, MCS(몬테카를로 시뮬레이션)의 결과와 비교하였다. 부가 가진의 스펙트럼 밀도 $K_{\xi\xi}$ 를 1.0, 0.5 및 0.25로 설정하였고, 변수 가진의 스펙트럼 밀도 $K_{\eta\eta}$ 를 변화시켜 가며 $E[X_1^2]$ 를 구한 결과를 Fig. 2에 나타낸다. Fig. 3은 질량비 ρ 의 변화에 따른 값을 나타내고, 이 때 $\rho = 0.5, 0.1$ 및 0.05이었다. Fig. 4는 $K_{\xi\xi} = 1.0$, $K_{\eta\eta} = 0.3$ 인 경우 질량비 0.5

및 0.05인 경우의 스펙트럼밀도를 비교한 것이다. Fig. 2~4를 보면, $k_2 = 0$ 및 $c_2 = 0$ 인 경우, 오차제곱의 기댓값을 최소화 하는 통계적 방법에 의하여 해석한 결과와 MCS 시뮬레이션

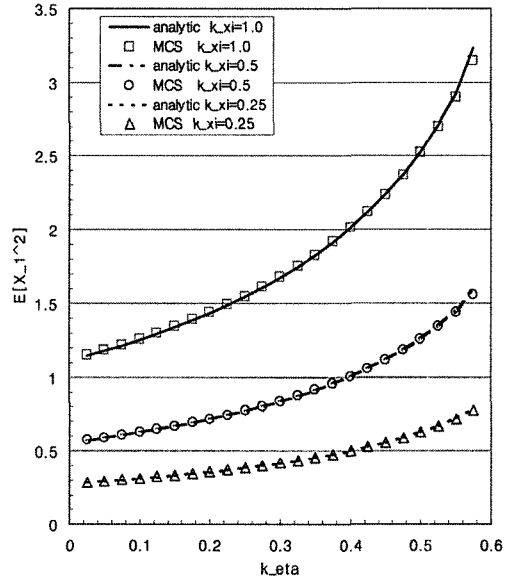


Fig. 3 Stationary mean square with $\rho = 0.5, 0.1$ and $0.05 (K_{\xi\xi} = 1.0)$

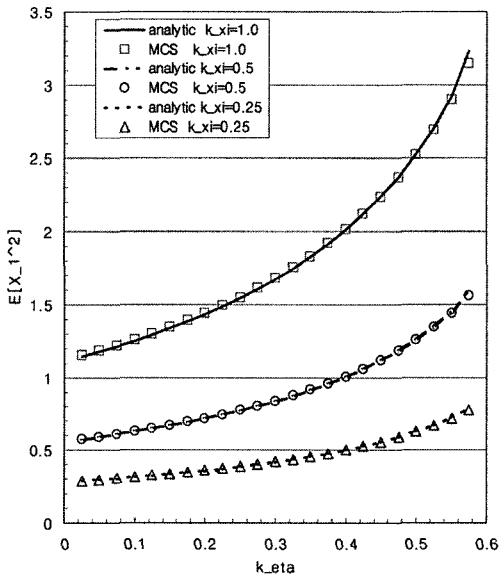


Fig. 2 Stationary mean square with $K_{\xi\xi} = 1.0, 0.5$, and 0.25 (mass ratio $\rho = 0.1$)

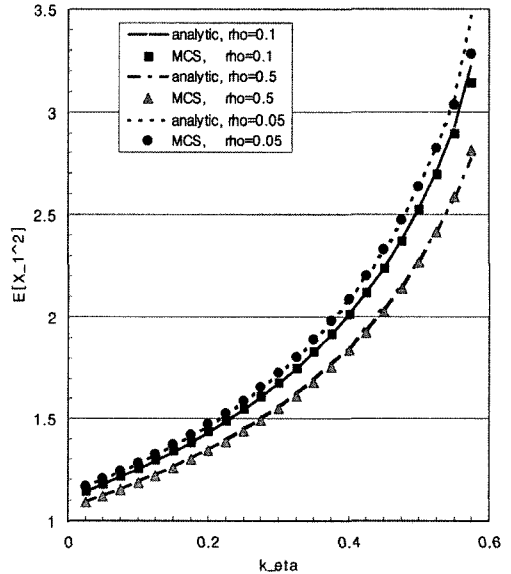


Fig. 4 Spectral density for $\rho = 0.5$ and $0.05 (K_{\eta\eta} = 0.3$ and $K_{\xi\xi} = 1.0)$

의 결과가 잘 일치하는 것을 알 수 있다. 부가 가진의 스펙트럼 밀도 K_m 가 증가함에 따라 정상제곱평균은 더 빨리 증가하였으며, Fig. 4의 스펙트럼 밀도에서는 질량비가 큰 값인 0.5인 경우 2 자유도 시스템의 성질이 뚜렷이 나타났다.

4.2 경우 2(k_2 와 c_2 의 값이 있는 경우)

다른 시스템에 대한 수치 계산을 하기 위하여 질량비 $\rho = 0.1$, $\omega_1 = 3$, $\omega_2 = \sqrt{k_2/m_2} = 6$, $\omega_3 = 6$, $\zeta_1 = \zeta_3 = 0.05$, $\zeta_2 = c_2/(2m_2\omega_2) = 0.05$, $\beta = 0.5$ 인 경우에 해석을 실시하고, MCS의 결과와 비교하였다. 부가 가진의 스펙트럼 밀도 $K_{\xi\xi}$ 를 1.5, 1.0 및 0.5로 설정하였고, 변수 가진의 스펙트럼 밀도 K_m 를 변화시켜 가며 $E[X_1^2]$ 를 구한 결과를 Fig. 5에 나타낸다. Fig. 6은 질량비 ρ 값의 변화에 따른 값을 나타내고, 이때 $\rho = 0.5, 0.1$ 및 0.05이었다. Fig. 7은 $K_{\xi\xi} = 1.0$, $K_m = 0.3$ 인 경우 질량비 0.5 및 0.05인 경우의 스펙트럼 밀도를 비교한 것이다. Fig. 5~7을 보면, 통계적 방법에 의하여 해석한 결과와 MCS의 결과가 잘 일치하는 것을 알 수 있다. 부가 가진의 스펙트럼 밀도 K_m 가 증가함에 따라 질량비가 작을수록 정상제곱평균은 더 빨리 증가하였으며, Fig. 7의 스펙트럼 밀도에서는 질량비가 작은 값인 0.05인 경우 2 자유도 시스템의 성질이 매우 약하게 나타났다.

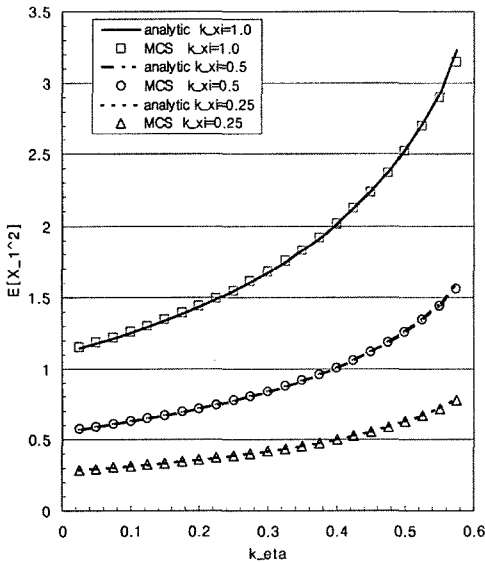


Fig. 5 Stationary mean square with $K_{\xi\xi} = 1.5, 1.0$, and 0.5 (mass ratio $\rho = 0.1$)

4.3 Case 3 ($\omega_2 \neq \omega_3$ 인 경우)

질량비 $\rho = 0.1, \omega_1 = 4, \omega_2 = 10, \omega_3 = 7, \zeta_1 = \zeta_3 = \zeta_2 = 0.05, \beta = 0.5$ 인 경우에 해석을 실시하고, MCS의 결과와 비교하였

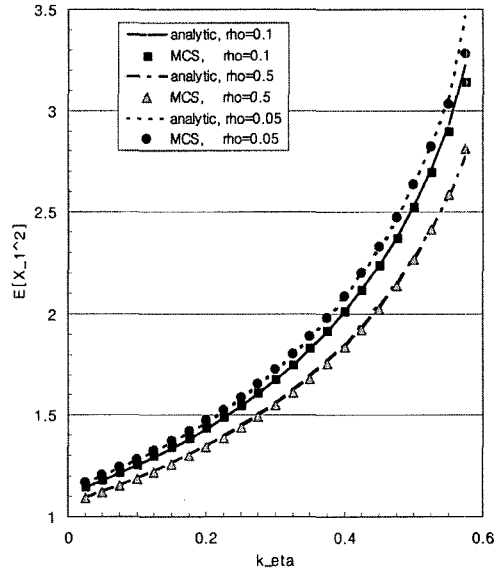


Fig. 6 Stationary mean square with $\rho = 0.5, 0.1$ and 0.05 ($K_{\xi\xi} = 1.0$)

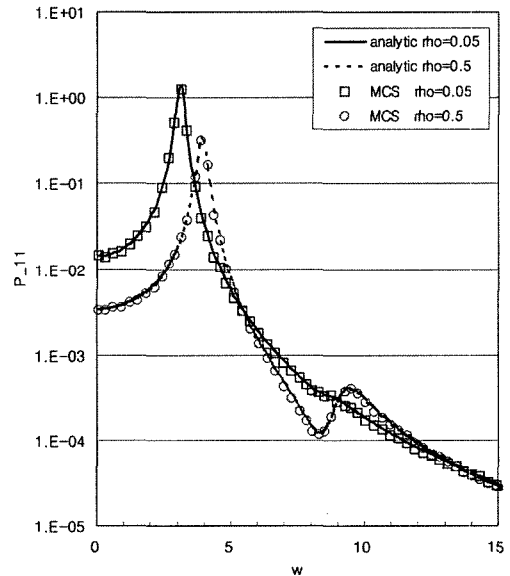


Fig. 7 Spectral density for $\rho = 0.5$ and 0.05 ($K_m = 0.3$ and $K_{\xi\xi} = 1.0$)

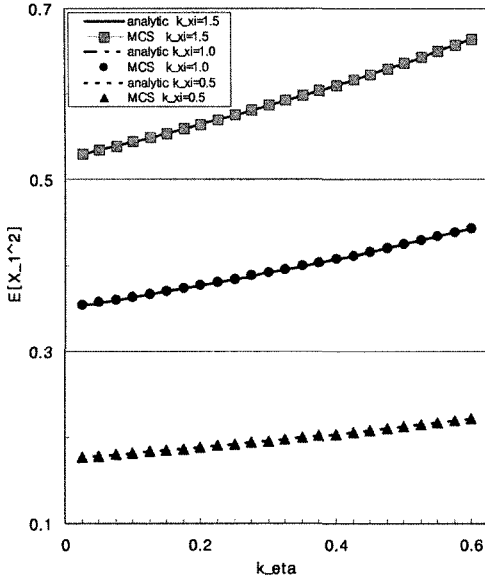


Fig. 8 Stationary mean square with $K_{\xi\xi}=1.0, 0.5,$ and 0.25 (mass ratio $\rho=0.1$)

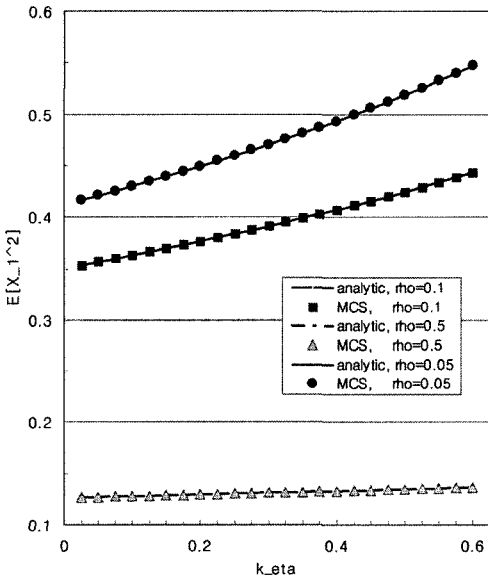


Fig. 9 Stationary mean square with $\rho=0.5, 0.1$ and 0.05 ($K_{\xi\xi}=1.0$)

다. 부가 가진의 스펙트럼 밀도 $K_{\xi\xi}$ 를 1.5, 1.0 및 0.5로 설정하였고, 변수 가진의 스펙트럼 밀도 $K_{\eta\eta}$ 를 변화시켜 가며 $E[X_1^2]$ 를 구한 결과를 Fig. 8에 나타낸다. Fig. 9는 질량비 ρ

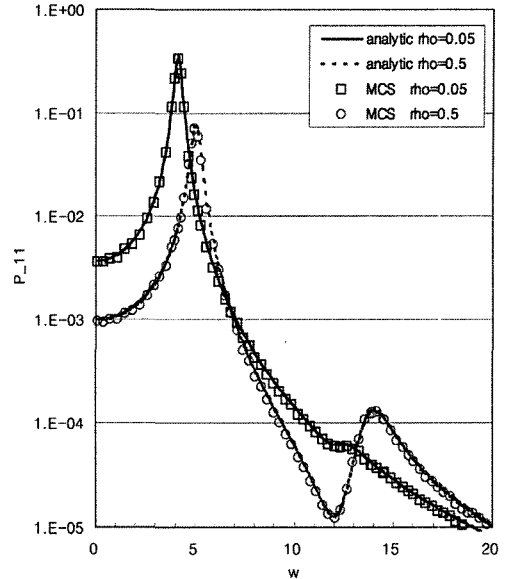


Fig. 10 Spectral density for $\rho=0.5$ and 0.05 ($K_{\eta\eta}=0.3$ and $K_{\xi\xi}=1.0$)

값의 변화에 따른 값을 나타내고, 이 때 $\rho=0.5, 0.1$ 및 0.05 이었다. Fig. 10은 $K_{\xi\xi}=1.0, K_{\eta\eta}=0.3$ 인 경우 질량비 0.5 및 0.05인 경우의 스펙트럼 밀도를 비교한 것이다. Fig. 8~10을 보면, 오차제곱의 기댓값을 최소화 하는 통계적 방법에 의하여 해석한 결과와 MCS의 결과가 잘 일치하는 것을 알 수 있다. 부가 가진의 스펙트럼 밀도 $K_{\eta\eta}$ 가 증가함에 따라 정상제곱평균이 증가하였으며, Fig. 10의 스펙트럼 밀도에서는 질량비가 작은 값인 0.05인 경우 2 자유도 시스템의 성질이 약하게 나타났다.

5. 결론

다자유도를 갖는 비선형 진동 시스템이 불규칙 가진을 받고 매개변수 가진을 포함하는 경우를 해석하기 위하여 통계적 방법을 사용하였고, 시스템의 비선형 특성을 선형화하는 준선형화 방법을 사용하였다. 2 자유도 시스템에 대하여 오차제곱의 기댓값을 최소화하는 해석적 방법에 의한 해석을 실시하고 그 결과들을 몬테카를로 시뮬레이션 결과와 비교하였다. 해석 결과와 시뮬레이션의 결과는 잘 일치하였으며, 경우에 따라서 스펙트럼 밀도의 증가에 따른 정상제곱 평균의 증가 경향이 달랐다. 변위의 스펙트럼 밀도는 질량비가 상대적으로 큰 경우 2 자유도 시스템의 특성을 뚜렷이 나타내었다.

후 기

이 논문은 2004학년도(후반기) 군산대학교 교수장기해외연수 경비의 지원에 의하여 연구되었음.

참 고 문 헌

- (1) Boothroyd, G., 1981, *Fundamentals of Metal Machining and Machine Tools*, McGraw-Hill.
- (2) Song, D. Y., Otani, N., Aoki, T., Kamakoshi, Y., Ohara, Y. and Tamaki, H., 2005, "A new approach to cutting state monitoring in end-mill machining," *Int. J. of Machine Tools & Manuf.*, Vol. 45, pp. 909~921.
- (3) Chen, J. B. and Li, J., 2005, "Dynamic response and reliability analysis of non-linear stochastic structure," *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 20, pp. 33~44.
- (4) Jeong, S. H., Cha, K. R. and Ryu, S. H., 1999, "A Study on the stability of Supervisory Control for Nonlinear System with Saturating Input," *Journal of KSMTE*, Vol. 8, No. 4, pp. 112~122.
- (5) Iwan, W. D. and Huang, C. T., 1996, "On the dynamic response of non-linear systems with parameter uncertainty," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 31, No. 5, pp. 631~645.
- (6) To, C. H. S., 2000, *Nonlinear Random Vibration: Analytical Techniques and Applications*, Swets & Zeitlinger B.V.
- (7) Lin, Y. K. and Cai, G. Q., 2004, *Probabilistic Structural Dynamics: Advanced Theory and Applications*, McGraw-Hill.
- (8) Elishakoff, I., 1999, *Probabilistic Theory of Structures*, Dover Publications, Inc.
- (9) Marek, P., Brozzetti, J., and Gustar, M., 2001, *Probabilistic Assessment of Structures using Monte Carlo Simulation*, Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Praha.
- (10) Landau, D. P. and Binder, K., 2000, *A Guide to Monte Carlo Simulations in Statistical Physics*, Cambridge University Press.
- (11) Meirovitch, L., 1985, *Introduction to Dynamics and Control*, John Wiley & Sons.
- (12) Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A. and Vetterling, W. T., 1988, *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press.