

일차 마르코프 잡음 환경에서의 국소 최적 검파: 1. 검정 통계량

정회원 이 주 미*, 준회원 박 주 호*, 종신회원 송 익 호*,
 준회원 권 형 문*, 정회원 김 흥 직**, 종신회원 윤 석 호***

Locally Optimum Detection of Signals in First-order Markov Environment: 1. Test Statistics

Jumi Lee* *Regular Member*, Juho Park* *Associate Member*,
 Ickho Song* *Lifelong Member*, Hyoungmoon Kwon* *Associate Member*,
 Hong Jik Kim** *Regular Member*, Seokho Yoon*** *Lifelong Member*

요 약

이제까지 국소 최적 검파를 다룬 연구들에서는 대부분 관측을 독립이라 두었다. 독립 관측 모형에서 얻은 검파기는 의존성 잡음 성분이 있는 현대 고속 통신 시스템에서 성능이 꽤 떨어질 수 있다. 이 논문의 1부에서는 곱셈 풀 잡음과 일차 마르코프 덧셈풀 잡음이 일어나는 환경에서 알려진 약한 신호를 검파할 때 알맞은 검정 통계량을 자세히 살펴본다. 이어, 2부에서는 여러 검파기의 점근 성능과 유한 표본 크기 성능을 얻고 서로 견주어 보며, 성능을 가장 좋게 하려면 간섭끼리의 의존성을 생각하여 검파기를 꾸며야 함을 보인다.

Key Words : Locally optimum detector, Signal detection, Weak signal, Dependent sample, Markov

ABSTRACT

In most of the studies on locally optimum detection assumes independent observations. The use of an independent observation model may cause a considerable performance degradation in detection applications of modern high data rate communication systems exhibiting dependence among interference components. In this paper, we address the detection of weak known signals in multiplicative and first order Markov additive noises. In Part 1, the test statistics of the locally optimum detectors are investigated in detail. In Part 2, the asymptotic and finite sample-size performance of several detectors are obtained and compared, confirming that the dependence among interference components need to be taken into account to maintain performance appropriately.

I. 머리말

대부분 신호 검파 문제에서는 잡음 성분이 통계적으로 독립이라고 둔다. 그런데, 이산 시간 신호 검파 문제에서 표본화율이 높아지면 잡음을 독립이

라 두는 것은 알맞지 않을 때가 많다. 독립 잡음에 가장 알맞은 검파기는 의존성 환경에서^[1-3] 동작하는 실제 신호 검파 시스템에서 바라는 성능을 내기 어려워며, 이를 푸는 것이 현대 고속 데이터 통신 시스템에서 점점 더 중요해지고 있다.

* 이 논문은 과학기술부에서 지원하고 한국과학재단이 주관하는 국가지정연구실 사업의 지원을 받은 것입니다.

* 한국과학기술원 전자전산학과 ({jml, jpark, kwon}@Sejong.kaist.ac.kr, i.song@icce.org)

** LG-Nortel (hongjikkim@lg-nortel.com), *** 성균관대학교 정보통신공학부 (syoon@skku.edu)

논문번호 : KICS2006-08-335, 접수일자 : 2006년 8월 3일, 최종논문접수일자 : 2006년 10월 16일

이러한 상황을 다루고자 잡음 성분들의 의존성을 고려한 여러 의존성 관측 모형들을 여러 사람들이 연구하였다. 의존성 잡음 모형의 대표적인 보기로는 ϕ -혼합, m -의존성, 변환 잡음 모형이 있다^{4,7)}. 의존성 잡음 모형 가운데에서 일반적인 의존성 모형은 일차 마르코프 모형이며, 통신 시스템에서 자주 볼 수 있는 환경이 일차 마르코프 꼴이라고 알려져 있다^{8, 9)}.

한편, 저전력 통신 시스템에 대한 관심이 늘어가면서, 약한 신호 검파의 중요성이 커지고 있으며, 따라서, 신호대잡음비가 낮을 때 성능이 뛰어난 검파기를 생각하는 것이 바람직하다. 이런 검파기를 얻는 방법 가운데 하나로, 국소 최적 검파기준을 생각할 수 있다. 국소 최적 검파기준을 바탕으로 얻은 검파기는 그 열개가 간단하고 신호 세기가 클 때 좋은 성능을 지니므로, 많은 사람들이 널리 연구해 왔다^{5, 6) [10-14]}. 다만, 이제까지 연구들은 대부분 통계적으로 독립인 표본을 쓰는 국소 최적 검파기만을 다뤘다.

이 논문에서는 의존성 관측 모형과 국소 최적 검파의 필요성을 바탕으로 일차 마르코프 잡음 환경에서 알려진 신호에 알맞은 국소 최적 검정 통계량과 그 성질을 다룬다. 검정 통계량을 얻어, 덧셈꼴 잡음과 곱셈꼴 잡음의 통계적 성질이 바뀔 때 검정 통계량의 꼴과 특성이 어떻게 바뀌는지 알아본다.

II. 관측 모형

신호와 잡음을 단순히 더하는 덧셈꼴 잡음 관측 모형은 검파, 추정, 여파, 복원과 같이 여러 신호처리 분야에 널리 쓰인다⁶⁾. 하지만, 어떤 때에는 덧셈꼴 잡음 모형과는 다른 잡음 모형이 필요하다. 보기를 들어, 무선 시스템에서 여러길을 거친 지연 신호 효과는 곱셈꼴 잡음으로 모형화하는 것이 알맞으며, 이때 마르코프 과정을 쓸 수 있다.

신호 검파에서 이산 시간 관측 $\{X_i\}$ 가 곱셈꼴 잡음 $\{M_i\}$ 와 덧셈꼴 잡음 $\{W_i\}$ 의 영향을 다음과 같이 받는다고 하자.

$$X_i = \theta e_i M_i + W_i \quad i=1,2,\dots,n. \quad (1)$$

식 (1)에서, θ 는 신호 세기, $\{e_i\}$ 는 알려진 신호, n 은 표본크기, 곧, 한 표본의 관측 개수이다. 덧셈꼴 잡음 성분 $\{W_i\}$ 는 곱셈꼴 잡음 성분 $\{M_i\}$ 와 독

립이고, 평균이 0인 일차 마르코프 과정이라 둔다. 위 모형 (1)은 [11]에서 다룬 일반화된 관측 모형의 특별한 때에 마르코프 성질을 더한 것으로 생각할 수 있다.

한편, W_i 와 M_i 의 확률밀도함수는 각각 $f_{W_i}(\cdot)$ 와 $f_{M_i}(\cdot)$ 로 쓰고, $W=(W_1, W_2, \dots, W_n)$ 의 결합 확률밀도함수와 $M=(M_1, M_2, \dots, M_n)$ 의 결합 확률밀도함수는 각각 $f_W(w)$ 와 $f_M(m)$ 으로 쓴다. 여기서, $w=(w_1, w_2, \dots, w_n)$ 이고 $m=(m_1, m_2, \dots, m_n)$ 이다. 마르코프 과정 $\{W_i\}$ 에서 W_{i-1} 가 주어졌을 때 W_i 의 전이 확률밀도함수, 곧, 조건부 확률밀도함수는 $f_{\tilde{W}_i}(w_i|w_{i-1})=f_i(w_i|w_{i-1})$ 로 쓴다. 이때, \tilde{W}_i 는 $i=2, \dots, n$ 일 때 $W_i|W_{i-1}$ 을 나타내고, $\tilde{W}_1=W_1$ 이며, $f_{\tilde{W}_1}(w_1|w_0)=f_{W_1}(w_1)$ 이다. 한편, 확률밀도함수 f_M 과 $\{f_i\}$ 는 충분히 부드러워서 미분과 적분 순서를 바꾸는 것과 같은 몇 가지 수학 연산을 할 수 있도록 정규 조건을 만족시킨다고 둔다¹⁰⁾.

이제, 검파 문제는 귀무가설

$$H: \phi_X(x|\theta), \quad \theta=0 \quad (2)$$

와 대립가설

$$K: \phi_X(x|\theta), \quad \theta>0, \quad (3)$$

가운데 하나를 고르는 가설검정 문제를 볼 수 있다. 이때,

$$\phi_x(x|\theta) = \int_R f_M(m) \left\{ \prod_{i=1}^n f_i(y_i(\theta)|y_{i-1}(\theta)) \right\} dm \quad (4)$$

는 관측 벡터 $X=(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 의 결합 확률밀도함수이고, 대립가설 K 에서 θ 는 모르는 것으로 둔다. 결합 확률밀도함수 (4)에서 $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y_i(\theta)=x_i - \theta e_i m_i$, $f_{\tilde{W}_i}(x_i|x_0)=f_{W_i}(x_i)$, $dm=dm_1 dm_2 \dots dm_n$ 이고, $\theta=0$ 으로 두면 귀무가설에서 X 의 확률밀도함수를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\phi_X(x|0) = f_W(x) = \prod_{i=1}^n f_i(x_i|x_{i-1}). \quad (5)$$

III. 국소 최적 검정 통계량

일반화된 네이만-피어슨 정리를 바탕으로 얻을 수 있는 국소 최적 검파기는 오경보 확률이 같은

모든 검파기 가운데 원점에서 ($\theta = 0$) 검정력 함수 기울기가 가장 크고^[15], 따라서, 국소 최적 검파기의 검정력은 구간 $(0, \theta_M)$ 에서 다른 검파기들의 검정력보다 작지 않다. 이때, θ_M 은 검파기마다 다르다^[10]. 국소 최적 검정 통계량은 일반적으로 다음과 같이 얻을 수 있다^[6].

$$T_{LO}(x) = \frac{\frac{\partial \nu}{\partial \theta} \phi_X(x|\theta) \Big|_{\theta=0}}{\phi_X(x|0)}. \quad (6)$$

여기서, ν 는 (6)을 0으로 만들지 아니 하는 가장 작은 자연수이다.

3.1 곱셈꼴 잡음 성분의 평균 $E\{M_i\}$ 가 모두 0이 아닐 때

알려진 신호 $\{e_i\}$ 를 검파하는 국소 최적 검파기의 검정 통계량을 (6)에서 얻으면 아래와 같다^[16].

$$T_{LO}(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i g_{A,i}(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}). \quad (7)$$

여기서,

$$\alpha_i = e_i E\{M_i\} \quad (8)$$

이고

$$\begin{aligned} g_{A,i}(x, y, z) &= \nabla_y Q_{i,i+1}(y, z|x, y) \\ &= \tilde{g}_{10,i}(y|x) + \tilde{g}_{01,i}(z|y) \end{aligned} \quad (9)$$

는 국소 최적 검파기의 열개를 정의하는 국소 최적 비선형성이다. 한편, 연산자

$$\nabla_a = - \frac{\partial}{\partial a} \quad (10)$$

은 변수 a 에 대한 편미분을 나타내고, $p, q = 0, 1, 2$ 일 때

$$Q_{i,j}(x, y|z, w) = \ln \{f_i(x|z)f_j(y|w)\} \quad (11)$$

이고

$$\tilde{g}_{pa,i}(x|y) = \begin{cases} \nabla_x^p \nabla_y^q f_i(x|y), & i = 1, 2, \dots, n \\ 0, & i \leq 0 \text{ 또는 } i \geq n+1 \end{cases} \quad (12)$$

이며, $x_0 = x_{n+1} = 0$ 이고, $e_0 = e_{n+1} = 0$ 이다. 검정 통계량 (7)은 국소 최적 베이스 검파 문제에서^[5] 얻은 것과 같다.

식 (7)에서 검정 통계량 $T_{LO}(x)$ 는 곱셈꼴 잡음 성분 $\{M_i\}$ 의 통계적 특성과 (곧, 전달 신호들의 평균 $\{\alpha_i\}$ 와) 덧셈꼴 잡음 성분 $\{W_i\}$ 의 통계적 특성에 (곧, 국소 최적 비선형성 $\{g_{A,i}\}$)에 의존한다. 검정 통계량 $T_{LO}(x)$ 가 곱셈꼴 잡음 성분의 통계적 특성에 얼마나 의존하는 지는 덧셈꼴 잡음 성분의 통계적 특성에 얼마나 의존하는 지와 확실히 다르다. 구체적으로는, $T_{LO}(x)$ 는 곱셈꼴 잡음 성분의 평균에만 의존하고, 덧셈꼴 잡음 성분의 (특정 통계량이 아니라) 분포에 의존한다. 바꾸어 말하면, 곱셈꼴 잡음 성분의 평균 가운데 적어도 하나가 0이 아닐 때에는, 덧셈꼴 잡음 성분들이 곱셈꼴 잡음 성분보다 국소 최적 검파기의 검정 통계량에 더 영향을 미친다고 할 수 있다.

한편, 덧셈꼴 잡음 성분이 독립이면, $q \geq 1$ 일 때 $\nabla_y^q f_i(x|y) = 0$ 이고, $\nabla_x^p f_i(x|y) = (-1)^p f_i^{(p)}(x)$ 이다. 따라서, 검정 통계량은 다음과 같다.

$$T_{LO}(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i g_{1,i}(x_i). \quad (13)$$

여기서,

$$g_{1,i}(x) = - \frac{f'_i(x)}{f_i(x)} \quad (14)$$

는 잡음이 독립이고 분포가 같을 때의 국소 최적 비선형성 $g_{LO}(x)$ 이다^[6].

식 (7)과 (13)을 견주어 보면 검정 통계량 $T_{LO}(x)$ 는 기억 없는 선형 조합으로 매개 변수 α_i 를 오직 관측 x_i 의 함수와 곱하지만, $T_{LO}(x)$ 는 α_i 를 너비가 셋인 창을 이동하며 (시간 또는 공간) 가리킴 수 i 에서 얻은 관측 $\{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$ 의 함수와 곱한다는 것을 알 수 있다.

3.2 곱셈꼴 잡음 성분의 평균 $E\{M_i\}$ 가 모두 0일 때

알려진 신호를 검파하는 국소 최적 검정 통계량을 얻으려면 대부분 일차 미분으로 충분하다고 알려져 있으며, 이를 3.1에서도 보았다. 그러나, 곱셈

풀 잡음 성분의 평균이 모두 0이면 검정 통계량 $T_{L00}(x)$ 는 0이고, 따라서, (6)에서 $v=2$ 일 때 국소 최적 검파기의 검정 통계량을 다시 얻어야 한다.

부록에서 얻은 결과를 (6)에 써서 곱셈폴 잡음 성분의 평균이 모두 0일 때 국소 최적 검파기의 검정 통계량을 얻으면 아래와 같다.

$$\begin{aligned}
 T_{L02}(x) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_M(i, j) \\
 &\cdot \nabla_{x_i} Q_{i, i+1}(x_i, x_{i+1} | x_{i-1}, x_i) \\
 &\cdot \nabla_{x_j} Q_{j, j+1}(x_j, x_{j+1} | x_{j-1}, x_j) + \sum_{i=1}^n K_M(i, i) \\
 &\cdot \nabla_{x_i} \nabla_{x_i} Q_{i, i+1}(x_i, x_{i+1} | x_{i-1}, x_i) \\
 &+ 2 \sum_{i=1}^n K_M(i, i+1) \\
 &\cdot \nabla_{x_i} \nabla_{x_{i+1}} Q_{i+1, i+1}(x_{i+1}, x_{i+1} | x_i, x_i) \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_M(i, j) \\
 &\cdot g_{A, i}(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) g_{A, i}(x_{j-1}, x_j, x_{j+1}) \\
 &+ \sum_{i=1}^n K_M(i, i) h_{A, i}(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) \\
 &+ 2 \sum_{i=1}^n K_M(i, i+1) h_{D, i}(x_i, x_{i+1}). \quad (15)
 \end{aligned}$$

여기서, $i = 1, 2, \dots, n$ 일 때

$$\begin{aligned}
 h_{A, i}(x, y, z) &= \tilde{g}_{20, i}(y|x) - \tilde{g}_{10, i}^2(y|x) \\
 &+ \tilde{g}_{02, i+1}(z|y) - \tilde{g}_{01, i+1}^2(z|y), \quad (16)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h_{D, i}(x, y) &= \tilde{g}_{11, i+1}(y|x) \\
 &- \tilde{g}_{10, i+1}(y|x) \tilde{g}_{01, i+1}(y|x) \quad (17)
 \end{aligned}$$

이고,

$$K_M(i, j) = e_i e_j E\{M_i M_j\} \quad (18)$$

은 전송 신호 $e_i M_i$ 와 $e_j M_j$ 사이의 상관이다.

검정 통계량 $T_{L00}(x)$ 와 마찬가지로, 곱셈폴 잡음 성분의 평균이 모두 0일 때 얻은 검정 통계량 $T_{L02}(x)$ 는 곱셈폴 잡음 성분 $\{M_i\}$ 와 덧셈폴 잡음 성분 $\{W_i\}$ 의 통계적 특성에 의존한다. 특히, 검정 통계량 $T_{L02}(x)$ 를 얻으려면 곱셈폴 잡음 성분의 이차 특성과 덧셈폴 잡음 성분의 전이 확률밀도함

수들의 일차 미분과 이차 미분이 필요하다. 검정 통계량 $T_{L02}(x)$ 는 전송 신호들 사이의 상관 $K_M(i, j)$ 를 통해 곱셈폴 잡음 성분 $\{M_i\}$ 의 통계적 특성에 의존하고, 비선형성 $\{g_{A, i}, h_{A, i}, h_{D, i}\}$ 를 통해 덧셈폴 잡음 성분의 의존성 때문에 생기는 이웃한 관측 사이의 통계적 의존성에 의존한다.

한편, (15)의 첫째와 둘째 덧셈은 $(g_{A, i}$ 와 $h_{A, i}$ 를 포함하는 항들은) 검정 통계량 $T_{L02}(x)$ 가 곱셈폴 잡음의 영향을 나타내는 상관 $\{K_M(i, j)\}$ 를 선형 조합하고자 크기가 3인 창을 쓰며, 덧셈폴 잡음 성분의 영향을 고려하고자 국소 최적 비선형성 $\{g_{A, i}, h_{A, i}\}$ 를 쓴다는 것을 나타낸다. 검정 통계량 $T_{L02}(x)$ 에서 덧셈폴 잡음의 마르코프 성질은 (15)의 셋째 덧셈항에 ($h_{D, i}$ 가 포함된 항에) 나타난다. 이 셋째 항은 곱셈폴 잡음 성분이 마르코프가 아니더라도, 얼마쯤 일차 마르코프 성질을 보이며, 결과적으로 덧셈폴 잡음이 일차 마르코프 성질을 나타낼 때 국소 최적 검정 통계량에 영향을 미친다는 것을 말해준다.

이제, 덧셈폴 잡음 성분 $\{W_i\}$ 가 독립 확률 과정이면, 검정 통계량

$$\begin{aligned}
 T_{L03}(x) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_M(i, j) g_{1, i}(x_i) g_{1, j}(x_j) \\
 &+ \sum_{i=1}^n K_M(i, i) \{g_{2, i}(x_i) - g_{1, i}^2(x_i)\} \quad (19)
 \end{aligned}$$

를 얻는다. 이는 $q \geq 1$ 일 때 $\tilde{g}_{0q, i}(x|y) = 0$, $\tilde{g}_{10, i}(x|y) = g_{1, i}(x)$ 이고 $\tilde{g}_{20, i}(x|y) = g_{2, i}(x)$ 이기 때문이며, 여기서,

$$g_{2, i}(x) = \frac{f''_{W_i}(x)}{f_{W_i}(x)} \quad (20)$$

이다. 독립 덧셈폴 잡음에서 얻은 검정 통계량 $T_{L03}(x)$ 는 덧셈폴 잡음 성분의 전이 분포 정보를 필요로 하지 않는다. 그러나, 여전히 곱셈폴 잡음 성분의 상관에 의존한다. 이때, $\{e_i M_i\}$ 를 확률 신호로 본다면, 검정 통계량 $T_{L03}(x)$ 는 독립 잡음 환경에서 확률 신호의 검정 통계량과 같음을 쉽게 알 수 있다⁶⁾.

한편, 곱셈폴 잡음 성분 $\{M_i\}$ 가 독립 확률 과정

표 1. 정규 덧셈꼴 잡음 환경에서 일차 국소 최적 비선형성

$g_{1,i}(x)$	$\tilde{g}_{10,i}(x y)$	$\tilde{g}_{01,i}(x y)$
x	$\frac{1}{1-r_i^2}(x-r_iy)$	$-\frac{r_i}{1-r_i^2}(x-r_iy)$

표 2. 정규 덧셈꼴 잡음 환경에서 이차 국소 최적 비선형성

$g_{2,i}(x)$	$\tilde{g}_{20,i}(x y)$	$\tilde{g}_{11,i}(x y)$	$\tilde{g}_{02,i}(x y)$
x^2-1	$\left(\frac{x-r_iy}{1-r_i^2}\right)^2 - \frac{1}{1-r_i^2}$	$-r_i\left\{\left(\frac{x-r_iy}{1-r_i^2}\right)^2 - \frac{1}{1-r_i^2}\right\}$	$r_i\left\{\left(\frac{x-r_iy}{1-r_i^2}\right)^2 - \frac{1}{1-r_i^2}\right\}$

일 때는 (15)에서

$$T_{L0\alpha}(x) = \sum_{i=1}^n e_i^2 \sigma_{M,i}^2 \{ \tilde{g}_{20,i}(x_i|x_{i-1}) + 2\tilde{g}_{10,i}(x_i|x_{i-1})\tilde{g}_{01,i+1}(x_{i+1}|x_i) + \tilde{g}_{02,i+1}(x_{i+1}|x_i) \} \quad (21)$$

을 얻을 수 있으며, 여기서, $\sigma_{M,i}^2 = E\{M_i^2\}$ 는 곱셈꼴 잡음 M_i 의 분산이다. 검정 통계량 $T_{L0\alpha}(x)$ 는 곱셈꼴 잡음의 기대값이 모두 0일 때의 검정 통계량이지만 곱셈 없이 홀덧셈만으로 나타난다. 곧, $T_{L0\alpha}(x)$ 의 열개는 평균이 0이 아닌 때 얻은 $T_{L0\alpha}(x)$ 의 열개와 비슷하다. 검정 통계량 $T_{L0\alpha}(x)$ 는 기본적으로 전송 신호의 분산 $\{e_i^2 \sigma_{M,i}^2\}$ 를 알려진 신호로 두고, 덧셈꼴 잡음의 전이 확률밀도함수의 일차 미분과 이차 미분에서 얻은 비선형성을 써서 신호를 검파하는 것으로 볼 수 있다.

끝으로, 덧셈꼴 잡음 성분 $\{W_i\}$ 와 곱셈꼴 잡음 성분 $\{M_i\}$ 가 모두 독립 확률 과정이면, $T_{L0\alpha}(x)$, $T_{L0\beta}(x)$ 또는 $T_{L0\gamma}(x)$ 에서

$$T_{L0\alpha}(x) = \sum_{i=1}^n K_M(i,i)g_{2,i}(x_i) \quad (22)$$

를 얻는다. 식 (22)에서 $K_M(i,i)$ 를 기대값이 0인 확률 신호의 i 째 성분 분산 (또는 이차 적률) $K_S(i,i)$ 로 바꾸면, 기대값이 0이고 독립인 확률 신호를 검파할 수 있는 검정 통계량을 얻는다⁶⁾.

3.3 정규 분포에서 국소 최적 검정 통계량 전이 확률밀도함수가 주어졌을 때 국소 최적 검

정 통계량 $T_{L0\alpha}(x)$, $T_{L0\beta}(x)$ 와 이를 이루는 국소 최적 비선형성 $g_{A,i}$, $h_{A,i}$, $h_{D,i}$ 를 살펴보자. 먼저, 아래 조건부 정규 확률밀도함수를 생각하자.

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2(1-r^2)}} \cdot \exp\left\{-\frac{\{y - m_Y - r\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - m_X)\}^2}{2\sigma_Y^2(1-r^2)}\right\} \quad (23)$$

여기서, r 은 X 와 Y 의 상관 계수를 나타내고, m_B 와 σ_B^2 은 각각 확률 변수 B 의 평균과 분산을 나타낸다. 잘 알려져 있듯이, 조건부 확률밀도함수 $f_{Y|X}(y|x)$ 에서, $X=x$ 일 때 Y 의 조건부 평균은 $E\{Y|x\} = m_Y + r\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - m_X)$ 이고, 조건부 분산은 $V\{Y|x\} = \sigma_Y^2(1-r^2)$ 이다¹⁷⁾.

이제, W_i 의 전이 확률밀도함수 $f_i(y|x)$ 가 (23)에 보인 조건부 정규 확률밀도함수와 같다고 하고 $i=1, 2, \dots, n$ 일 때 $r=r_i$ 라 두면, 표 1과 2를 얻는다. 이 표에 나온 결과에서 $g_{A,i}(x, y, z) = \kappa_{1,i}y - \kappa_{2,i}x - \kappa_{2,i+1}z$, $h_{A,i}(x, y, z) = -\kappa_{1,i}$, $h_{D,i}(x, y) = \kappa_{2,i+1}$ 을 얻는데, 여기서, $\kappa_{1,i} = (1-r_i^2 r_{i+1}^2)/\sigma_i^2(1-r_i^2)(1-r_{i+1}^2)$ 이고 $\kappa_{2,i} = r_i/\sigma_{i-1}\sigma_i(1-r_i^2)$ 이며, σ_i^2 은 W_i 의 분산을 나타내고, $\sigma_0^2 = 1$, $r_{n+1} = 0$ 이다. 한편, 정규 환경에서 덧셈꼴 잡음 성분이 독립이면 $r_i = 0$ 이므로 $g_{A,i}(x, y, z) \propto y$ 를 얻는데, 이는 (9)에서 정의한 비선형성 $g_{A,i}$ 가 (14)에서 정의한 $g_{1,i}$ 를 제대로 일반화한 것임을 간접적으로나마 확인하는 것이다.

이제, 표 1과 2를 바탕으로 검정 통계량 $T_{LO0}(x)$ 을 써 보면 아래와 같다.

$$T_{LO0}(x) = \sum_{i=1}^n a_i \{ \kappa_{1,i} x_i^{-\kappa_{2,i}} x_{i-1}^{-\kappa_{2,i+1}} x_{i+1} \}$$

$$= \sum_{i=1}^n \{ a_i \kappa_{1,i} - a_{i-1} \kappa_{2,i} - a_{i+1} \kappa_{2,i+1} \} x_i. \quad (24)$$

곱셈꼴 잡음 성분의 평균이 모두 0이면, 비슷한 방법으로 다음을 얻는다.

$$T_{LO2}(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_M(i, j)$$

- $\{ \kappa_{1,i} x_i^{-\kappa_{2,i}} x_{i-1}^{-\kappa_{2,i+1}} x_{i+1} \}$
- $\{ \kappa_{1,j} x_j^{-\kappa_{2,j}} x_{j-1}^{-\kappa_{2,j+1}} x_{j+1} \}$.

$$(25)$$

정규 환경에서 $h_{A,i}(x, y, z)$ 와 $h_{D,i}(x, y)$ 가 상수이므로, 이 항들을 포함한 비선형성은 검파에서 아무런 역할을 하지 않는다. 따라서, 검정 통계량 $T_{LO2}(x)$ 에서 이들을 없애더라도 국소 최적 검파기의 검파 성능에 영향을 미치지 않으므로, (25)는 이 항들 없이 $T_{LO2}(x)$ 를 나타내었다.

IV. 맺음말

이 논문에서는 곱셈꼴 잡음과 일차 마르코프 덧셈꼴 잡음이 일어나는 환경에서 약한 신호를 검파하는 문제를 다루었다. 곱셈꼴 잡음의 평균 가운데 적어도 하나가 0이 아닐 때, 관측 벡터의 결합 확률밀도함수를 일차 미분하여 국소 최적 검파기 T_{LO0} 을 얻었다. 곱셈꼴 잡음의 평균이 모두 0일 때에는, 관측 벡터의 결합 확률밀도함수를 이차 미분하여 국소 최적 검파기 T_{LO2} 를 얻었다. 국소 최적 검정 통계량은 곱셈꼴 잡음의 평균 또는 상관에 의존하나 곱셈꼴 잡음의 다른 통계량에는 의존하지 않았다. 그리고, 덧셈꼴 잡음 성분의 분포에 의존할 뿐 다른 특정한 통계량에는 의존하지 않았다.

이 논문의 2부에서는 제안한 검파기준을 바탕으로 얻은 검파기의 점근 상대 효능 및 유한 표본 성능을 얻고 견출 것이다. 제안한 검파기가 일차 마르코프 잡음 환경에서 약한 신호 검파에 최적임을 보이고, 모의 실험을 거쳐 제안한 검파기가 지니는 특성을 관찰하고 분석할 것이다.

부록: 이차 편미분 계산

먼저,

$$\Psi_1(x|\theta) = \prod_{i=1}^n f_{\bar{w}_i}(x_i - \theta e_{i,m} | x_{i-1} - \theta e_{i-1,m} | m_{i-1}) \quad (26)$$

이라 두면,

$$\left. \frac{\partial^2 \Psi_1(x|\theta)}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=0} = \sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i}^n f_{\bar{w}_j}(x_j | x_{j-1})$$

- $[(e_{i,m})^2 f_{\bar{w}_i}^{(20)}(x_i | x_{i-1}) + 2e_{i,m} e_{i-1,m} m_{i-1}$
- $f_{\bar{w}_i}^{(11)}(x_i | x_{i-1}) + (e_{i-1,m} m_{i-1})^2 f_{\bar{w}_i}^{(02)}(x_i | x_{i-1})]$
- + $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \prod_{k \neq i,j}^n f_{\bar{w}_k}(x_k | x_{k-1})$

$$(27)$$

- $f_{\bar{w}_i}^{(10)}(x_i | x_{i-1}) \{ e_{i,m} e_{j,m} f_{\bar{w}_j}^{(10)}(x_j | x_{j-1})$
- + $e_{i,m} e_{j-1,m} m_{j-1} f_{\bar{w}_j}^{(01)}(x_j | x_{j-1}) \}$

$$(28)$$

- + $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \prod_{k \neq i,j}^n f_{\bar{w}_k}(x_k | x_{k-1}) f_{\bar{w}_i}^{(01)}(x_i | x_{i-1})$

- $\{ e_{i-1,m} m_{i-1} e_{j,m} f_{\bar{w}_j}^{(10)}(x_j | x_{j-1})$
- + $e_{i-1,m} m_{i-1} e_{j-1,m} m_{j-1} f_{\bar{w}_j}^{(01)}(x_j | x_{j-1}) \}$

$$(29)$$

이다. 따라서, $\Phi_X(x|\theta)$ 의 이차 편미분은

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi_X(x|\theta)}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=0} = \int_{R^M} f_M(m) \{ (27) + (28) + (29) \} dm \quad (30)$$

이다. 식 (30)에서

$$\int_{R^M} f_M(m) (27) dm = \prod_{i=1}^n f_{\bar{w}_i}(x_i | x_{i-1})$$

- $\sum_{i=1}^n \{ K_{M(i,i)} \tilde{g}_{20,i}(x_i | x_{i-1})$
- + $2K_{M(i,i-1)} \tilde{g}_{11,i}(x_i | x_{i-1})$
- + $K_{M(i-1,i-1)} \tilde{g}_{02,i}(x_i | x_{i-1}) \}$,

$$(31)$$

$$\int_{R^M} f_M(m) (28) dm = \prod_{k=1}^n f_{\bar{w}_k}(x_k | x_{k-1})$$

$$\begin{aligned} & \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n \{K_M(i, j) \tilde{g}_{10,i}(x_i|x_{i-1}) \tilde{g}_{10,j}(x_j|x_{j-1}) \\ & + K_M(i, j-1) \tilde{g}_{10,i}(x_i|x_{i-1}) \tilde{g}_{01,j}(x_j|x_{j-1})\}, \quad (32) \\ & \int_{R^*} f_M(m)(29) dm = \prod_{k=1}^n f_{W_k}(x_k|x_{k-1}) \\ & \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n \{K_M(i-1, j) \tilde{g}_{01,i}(x_i|x_{i-1}) \tilde{g}_{10,j}(x_j|x_{j-1}) \\ & + K_M(i-1, j-1) \tilde{g}_{01,i}(x_i|x_{i-1}) \tilde{g}_{01,j}(x_j|x_{j-1})\} \quad (33) \end{aligned}$$

이므로, (31)-(33)을 더한 뒤 $\phi_X(x|0)$ 으로 나누면 점정 통계량 $T_{LO2}(x)$ 를 얻을 수 있다.

참고 문헌

[1] J. Bae, I. Song, H. Morikawa, and T. Aoyama, "Nonparametric detection of known signals based on ranks in multiplicative noise," *Signal Process.*, vol. 60, pp. 255-261, July 1997.

[2] 김인중, 이주미, 최상원, 박소영, 송익호, "충격성 잡음의 이동 평균 모형에서 약신호 검파", 한국통신학회 논문지, 30권, 523-531쪽, 2005년 6월.

[3] Y. Chen and V. K. Dubey, "Dynamic simulation model of indoor wideband directional channels," *IEEE Trans. Vehic. Techn.*, vol. 55, pp. 417-430, Mar. 2006.

[4] G. V. Moustakides and J. B. Thomas, "Mini-max detection of weak signal in ϕ -mixing noise," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 30, pp. 529-537, May 1984.

[5] E. Kokkinos and A. M. Maras, "Locally optimum Bayes detection in nonadditive first-order Markov noise," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 47, pp. 387-396, Mar. 1999.

[6] I. Song, J. Bae, and S. Y. Kim, *Advanced Theory of Signal Detection*, Springer, 2002.

[7] X. Yang, H. V. Poor, and A. P. Petropulu, "Memoryless discrete-time signal detection in long-range dependent noise," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 52, pp. 1607-1619, June 2004.

[8] P. S. Rao, D. H. Johnson, and D. D. Becker, "Generation and analysis of non-Gaussian Markov time series," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 40, pp. 845-856, Apr. 1992.

[9] D. Middleton, *An Introduction to Statistical Communication Theory*, Revised ed., IEEE Press, 1996.

[10] S. A. Kassam, *Signal Detection in Non-Gaussian Noise*, Springer, 1988.

[11] I. Song and S. A. Kassam, "Locally optimum detection of signals in a generalized observation model: the known signal case," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 36, pp. 502-515, May 1990.

[12] A. M. Maras, "Locally optimum Bayes detection in ergodic Markov noise," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 40, pp. 41-55, Jan. 1994.

[13] 배진수, 박현경, 송익호, "국소 최적 순위 검파기의 점수 함수와 가중합", 한국통신학회 논문지, 27권, 517-523쪽, 2002년 6월.

[14] 윤석호, 구진규, 송익호, "충격성 잡음에서 국소 최적 검파기를 쓰는 직접수열 대역확산 부호 획득", *Tel. Rev.*, 12권, 739-747쪽, 2002년 10월.

[15] E. L. Lehmann, *Testing Statistical Hypotheses*, Second ed., John Wiley and Sons, 1986.

[16] J. Lee, *Locally Optimum Detection under First-Order Markov Noise Environment*, PhD. Diss., KAIST, Daejeon, 2006.

[17] 박철훈, 송익호, 남동경, *확률과정, 성능*, 2004.

이 주 미 (Jumi Lee)



정회원
1998년 2월 이화여자대학교 수학과 이학사, 전자공학과 공학사
2000년 2월 한국과학기술원 전자전산학과 공학석사
2006년 8월 한국과학기술원 전자전산학과 공학박사

2006년 9월~현재 한국과학기술원 전자전산학과 박사후 연구원

<관심분야> 이동통신, 정보이론

박 주 호 (Juho Park)

준회원



2006년 2월 한국과학기술원 전자전산학과 공학사

2006년 3월~현재 한국과학기술원 전자전산학과 석사과정

<관심분야> 통신이론, 정보이론

권 형 문 (Hyungmoon Kwon)

준회원



2000년 2월 연세대학교 기계전자공학부 전기전자전공 공학사

2002년 2월 한국과학기술원 전자전산학과 공학석사

2002년 3월~현재 한국과학기술원 전자전산학과 박사과정

<관심분야> 이동통신, 검파와 추정

송 의 호 (Ickho Song)

종신회원



1982년 2월, 1984년 2월 서울대학교 전자공학과 공학사 (준최우등), 공학석사

1985년 8월, 1987년 5월 펜실베니아대학교 전기공학과 공학석사/박사

1987년 3월~1988년 2월 벨 통신

연구소 연구원

1988년 3월~현재 한국과학기술원 전자전산학과 조교수, 부교수, 교수

1995년 1월~현재 한국통신학회 논문지 편집위원

1988년~현재 대한전자공학회, 한국음향학회, 한국통신학회 평생회원; 한국과학기술한림원 회원; IET 석학회원; IEEE 준석학회원

<관심분야> 통신이론, 신호검파와 추정, 이동통신

김 흥 직 (Hong Jik Kim)

정회원



1995년 2월 포항공과대학교 전자전기공학과 공학사

1997년 2월 한국과학기술원 전자전산학과 공학석사

2005년 2월 한국과학기술원 전자전산학과 공학박사

2005년~현재 LG-Nortel 연구소

책임연구원

<관심분야> 이동통신, CDMA와 OFDM 모델

윤 석 호 (Seokho Yoon)

종신회원



1997년 2월 한국과학기술원 전자전산학과 공학사 (최우등)

1999년 2월 한국과학기술원 전자전산학과 공학석사

2002년 2월 한국과학기술원 전자전산학과 공학박사

2002년 2월~2002년 6월 MIT 박사

사후 연구원

2002년 6월~2003년 2월 하버드대학교 박사후 연구원

2003년 2월~현재 성균관대학교 정보통신공학부 조교수

<관심분야> 이동통신, 통계학적 신호처리