

연속적인 단일 산란 근사를 이용한 2차원 양방향 포물선 방정식 알고리즘

2D Two-Way Parabolic Equation Algorithm Using Successive Single Scattering Approach

이 근 화*
(Keunhwa Lee*)

*서울대학교 공과대학 조선해양공학과

(접수일자: 2006년 8월 28일; 수정일자: 2006년 9월 11일; 채택일자: 2006년 9월 15일)

본 논문에서는 다중 산란 현상을 해석할 수 있는 2차원 양방향 포물선 방정식 알고리즘을 제안했다. 본 논문에서 제안한 방법은 단일 산란 근사의 연속적인 적용에 바탕을 두고 있다. 각각의 거리 독립 구역의 수직 경계에 연속 조건을 적용하여 단일 산란 근사와 Split-Step Padé 법으로 거리 방향으로 전진해 가며 외향파를 계산하고 내향파 성분은 저장한다. 이어서 저장된 내향파 성분을 역 거리 방향으로 역 전파 시키고 경계에서 외향파 성분을 저장한다. 이러한 과정을 전진 방향을 바꾸어 가며 해가 수렴할 때까지 반복하여 완전 해를 계산한다. 본 논문에서 제안된 방법은 기존의 방법 [J. F. Lingeitch et al., J. Acoust. Soc. Am., 112(2), 476-480 (2002)] 에 비해 수치적으로 구현하기 간단하며 전산자원 소모가 적다.

핵심용어: 고차 포물선 방정식, Split-Step Padé 법, 단일 산란 근사, 다중 산란, Perfectly Matched Layer

투고분야: 수중 음향 분야 (5.3)

We suggest new 2D two-way parabolic equation algorithm for multiple scattering. Our method is based on the successive performance of the single scattering approach. First, as the single scattering algorithm, the reflected and transmitted fields are calculated at the vertical interface of a range independent sector. Then, the reflected field is saved and the transmitted field propagated to the next vertical interface with the split-step Padé method. After one step ends, the same process is repeatedly performed with the change of the propagation direction until the reflected field at the vertical interface is close to zero. Final incoming and outgoing fields are obtained as the sum of the wave fields obtained for each step. Our algorithm is relatively simple for the numerical implementation and requires less computational resources than the existing algorithm for multiple scattering [J. F. Lingeitch et al., J. Acoust. Soc. Am., 112(2), 476-480 (2002)].

Key words: High order parabolic equation, Split Step Padé method, Single Scattering Approximation, Multiple Scattering, Perfectly Matched Layer

ASK subject classification: Underwater Acoustics (5.3)

1. 서론

수치적으로 산란 현상을 구현하는 전통적인 방법은 크게 두 가지로 나눌 수 있다. 첫 번째는 엄밀한 방법으로 유한 요소법, 유한 차분법, 경계 요소법 등의 직접적인

수치 해법을 이용하는 방법이다. 이 방법은 완전 해를 주는 장점이 있으나 파장에 비해 산란체의 크기가 클수록 막대한 컴퓨터 자원이 요구되어 일반적으로 고주파수 영역에서는 적용되기 어렵다. 두 번째는 근사적 방법을 이용하는 것이다. 기하 광학 이론이나 물리 광학 이론을 이용해 근사적 방법으로 산란 현상을 구현한다. 근사적 방법은 빠른 계산의 장점을 가지고 있으나 복합 표적에 대해 회절, 포복 파 (creeping wave), 복반사 등을 구현

책임저자: 이 근 화 (nasalkh2@snu.ac.kr)
(151-744) 서울시 관악구 신림동 산 56-1 서울대학교 공과대학
조선해양공학과
(전화: 02-880-7332; 팩스: 02-888-9298)

하는데 어려움이 있으며 근사에 사용된 가정을 벗어나는 경우 수치 오차가 발생한다 [1-3].

최근에는 양방향 포물선 방정식법을 이용해 산란 현상을 구현하는 연구가 진행되고 있다 [4-8]. 포물선 방정식법은 전 단계의 초기값만을 이용해 전진해 나가며 풀기 때문에 기억 용량 면에서 타원형 (Elliptic type)의 음파 방정식을 푸는 것에 비해 이득을 가지며 Split-Step Padé 법과 같은 효율적인 해법의 사용이 가능해 계산 시간을 절감할 수 있다. 또한 고차 포물선 방정식법을 이용하면 완전 해를 구할 수가 있기 때문에 서두에서 설명한 전통적인 두 가지 방법의 중간 영역에 위치하는 해법이라 하겠다.

고차 양방향 포물선 방정식을 이용한 해법은 Collins와 Evans [6]에 의해 1992년에 제안되었다. 그들은 단일 산란 근사를 이용해 거리 종속의 해양 환경에서 외향파와 내향파를 구현했다. 2000년 Mills와 Collins [7]은 회절과 산란 문제에 대해 단일 산란 근사를 이용해 고차 양방향 포물선 방정식법의 정확성과 적용가능성을 확인했다.

다중 산란 현상에 대한 고차 양방향 포물선 방정식 알고리즘은 Lingeitch등 [8]에 의해 2002년에 발표되었다. Lingeitch등의 방법은 Evans [9]의 양방향 연성 정상 모드법 (two-way coupled normal mode method)와 유사하며 각각의 거리 독립 구역에 대해 외향파와 내향파 성분을 정의하고 각각의 수직 경계 면에서 경계 조건을 적용하여 해를 구하는 방법이다.

본 논문에서 제안하는 알고리즘은 기본적으로는 단일 산란 근사에 바탕을 두고 있다. 단일 산란 근사를 이용해 전진하는 방향에 대해 각각의 수직 경계에서 내향파와 외향파를 계산한다. 수치 영역의 끝부분까지 계산을 수행한 후에 처음 전진 방향과 반대 방향으로 저장된 내향파를 역전 전파시키며 역시 단일 산란 근사를 이용해 각각의 수직 경계에서 2차 내향파와 외향파를 계산한다. 이렇게 해가 수렴할 때까지 전진 방향을 바꾸어가며 단일 산란 근사를 연속적으로 적용함으로써 다중 산란 현상을 구현할 수 있다. 이때 최종 내향파와 외향파는 각 단계에서 얻어진 각각의 내향파와 외향파의 합으로 표현된다. 본 논문의 알고리즘은 중 주파수 영역의 수중 산란체로부터 산란 음장을 계산하는데 용이하며 산란 단면적 계산에 이용될 수 있다. 해저 매설 지뢰 탐지 모델링에도 응용될 수 있다. 또한 수중 도파관과 수중 산란체 간의 상호 산란 현상을 규명하는데 수치 해석 도구로 사

용될 수 있다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. II장에서는 연속적인 단일 산란 근사를 이용한 2D양방향 포물선 방정식 알고리즘을 유도했고 III장에서는 개발된 알고리즘의 검증을 위한 수치 예제를 보였다. IV장은 결론이다.

II. 단일 산란 근사를 이용한 2D 고차 양방향 포물선 방정식 알고리즘

2.1. 포물선 방정식의 유도

음압을 p 라고 할 때 이차원 사각 좌표계에서 Helmholtz 방정식은 다음과 같다.

$$\rho(x, z) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho(x, z)} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \rho(x, z) \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{1}{\rho(x, z)} \frac{\partial p}{\partial z} \right) + k^2(x, z)p = 0 \quad (1)$$

여기서 $\rho(x, z)$ 는 매질의 밀도, $k(x, z) = \omega/c(x, z)$ 이며 매질 파수를 나타낸다. ω 는 각주파수, $c(x, z)$ 는 매질의 음속이다.

미소 공간에 대해 거리 독립이라 가정하고 임의의 음속을 c_0 라 하고 임의의 파수를 $k_0 = \omega/c_0$ 라 한다. 이때 식 (1)은 다음과 같이 분해할 수 있다.

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - jk_0 \sqrt{1+X} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + jk_0 \sqrt{1+X} \right) p = 0 \quad (2)$$

여기서 $X = \frac{1}{k_0^2} [k^2(z) - k_0^2 + \rho(z) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial}{\partial z} \right)]$ 로 표현되는 연산자이다.

수치 영역이 $x > 0$ 이라 할 때 식 (2)의 첫 번째 항은 외향파에 대한 포물선 방정식, 두 번째 항은 내향파에 대한 포물선 방정식으로 정의하며 다음과 같이 표기할 수 있다.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \pm jk_0 \sqrt{1+X} p \quad (3)$$

식 (3)는 거리 방향에 대해서는 독립이고 깊이 방향에 의존적인 미소 구역 (range-independent and depth-dependent sector)에 대해 완전해를 준다. 한편 식 (3)은 전진 방향에 따라 다음과 같이 표현된다.

$$p(x \pm \Delta x) = \hat{P}p(x) = e^{\pm jk_0 \Delta x \sqrt{1+X}} p(x) \quad (4)$$

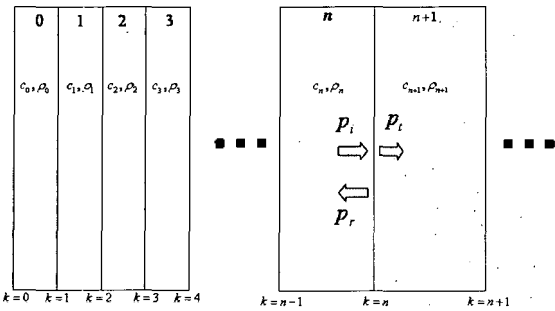


그림 1. 단일 산란 알고리즘의 개략도
Fig. 1. Schematic of a single scattering algorithm.

2.2. 단일 산란 근사를 이용한 고차 양방향 포물선 방정식 알고리즘

거리 의존 영역을 그림 1과 같이 여러 개의 거리 독립의 미소 구역으로 분할한다. 이때 각각의 미소 구역의 수직 경계에서 아래와 같은 음압과 수평 속도에 대한 연속 조건이 만족되어야 한다.

$$\frac{1}{\rho_n} \left(\frac{\partial p_i}{\partial x} + \frac{\partial p_r}{\partial x} \right) = \frac{1}{\rho_{n+1}} \frac{\partial p_r}{\partial x}$$

$$p_i + p_r = p_i \tag{5}$$

위 식에서 p_i 는 입사파, p_r 는 반사파, p_t 는 투과파, ρ_n 은 n번째 미소 구역의 밀도, ρ_{n+1} 은 n+1번째 미소 구역의 밀도를 나타낸다.

식 (3)의 제곱근 연산자를 이용해 식 (5)를 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{[jk_0 \rho_n^{-1} \sqrt{1+X_n} + jk_0 \rho_{n+1}^{-1} \sqrt{1+X_{n+1}}] p_r}{[jk_0 \rho_n^{-1} \sqrt{1+X_n} - jk_0 \rho_{n+1}^{-1} \sqrt{1+X_{n+1}}] p_i}$$

$$p_i = p_t + p_r \tag{6}$$

반사파는 식 (6)의 첫 번째 식에서 계산되고, 투과파는 식 (6)의 두 번째 식에서 계산된다. 식 (6)의 첫 번째 식에서 보듯이 반사파를 구하기 위해서는 $[jk_0 \rho_n^{-1} \sqrt{1+X_n} + jk_0 \rho_{n+1}^{-1} \sqrt{1+X_{n+1}}]$ 연산자의 행렬 역산이 필요하다.

Galerkin법과 Pad 근사를 이용해 깊이 방향 연산자를 분할할 때 $a+bX$ 형태 (a, b 는 임의의 상수)로 표현되는 연산자는 삼중대각행렬로 표현되지만 $\sqrt{1+X}$ 연산자는 확장 정사각행렬이 된다.

만약 $[jk_0 \rho_n^{-1} \sqrt{1+X_n} + jk_0 \rho_{n+1}^{-1} \sqrt{1+X_{n+1}}]$ 연산자가 $(N \times N)$ 의 행렬로 표현될 때, 행렬 역산을 위해서는 각 수직 경계마다 $O(N^3)$ 의 연산이 필요하고 연산자를 위해 N^2 에 해

당하는 저장공간이 요구된다. Collins [6]에 의해 지적된 것처럼 위 연산자의 직접적인 역산은 매우 비효율적이며 포물선 방정식법의 효율성을 크게 저하시킨다.

그래서 본 논문에서도 반복법 (iterative method)에 의해 식 (6)의 첫 번째 식을 계산했다. 산란 연산자 $M = (jk_0 \rho_{n+1}^{-1} \sqrt{1+X_{n+1}})^{-1} (jk_0 \rho_n^{-1} \sqrt{1+X_n})$ 라 정의할 때, 식 (6)는 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$p_r = -Mp_r - (I - M)p_i$$

$$p_t = p_i + p_r \tag{7}$$

반사파 음장의 초기값을 0이라고 하고 연산을 n 번 반복했을 때 식 (7)에서 반사파의 음압은 다음과 같이 계산된다.

$$p_{r,n} = -(-M)^{n-1} [I - (I + M)^{-1}] (I - M)p_i - (I + M)^{-1} (I - M)p_i \tag{8}$$

식 (8)은 $M=I$ 거나 또는 $(-M)^{n-1} \rightarrow 0$ 인 경우 수렴한다. 수렴정리 (Convergence theorem)에 의하면 식 (8)은 산란 연산자의 고유 값의 절대값이 항상 1보다 작거나 같은 경우에 수렴한다 [10]. 우리는 일반적인 해양 환경의 음파 전달 문제에서 산란 연산자 M 의 고유 값이 1보다 작게 나타나는 것을 확인했다. 특히 ASA Wedge문제 [11]의 경우 1~2번 정도의 연산만으로 반사파와 투과파를 계산할 수 있다. 하지만 산란 문제처럼 경계 면에서 물성의 차이가 심한 경우 식 (8)은 발산한다. 그래서 본 논문에서는 식 (8)의 안정적인 수렴을 위해 이완 인자 (relaxation factor) α 를 도입해 다음과 같이 정리하여 계산했다.

$$p_r = \frac{\alpha - M}{1 + \alpha} p_r - \frac{I - M}{1 + \alpha} p_i$$

$$p_t = p_i + p_r \tag{9}$$

여기서 α 는 0보다 큰 임의의 양수이다. 식 (9)는 식 (7)과 동치인 식이다. 하지만 연산을 n 번 반복했을 때 식 (9)의 공비는 $(\frac{\alpha - M}{1 + \alpha})^{n-1}$ 이 된다. 산란 연산자 M 의 고유 값이 양수이고 $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \dots > \lambda_{m-1} > \lambda_m$ 의 순서를 갖는다고 할 때, $(\frac{\alpha - M}{1 + \alpha})^{n-1}$ 의 고유 값은 $(\frac{\alpha - \lambda_m}{1 + \alpha})^{n-1}$ 이 된다. 최대 고유 값보다 큰 이완 인자를 선택한다면 $(\frac{\alpha - \lambda_m}{1 + \alpha})^{n-1}$ 는 언제나 0으로 수렴한다. 만약 이완 인자의 크기가 최대 고유 값에 비해 큰 경우에는 식 (9)

는 수렴하나 수렴 속도가 느려지며, 역으로 작은 경우에는 식 (9)는 발산한다는 것을 쉽게 유추할 수 있다. 또한 산란 연산자의 고유값이 복소수일 때도 위와 유사한 접근법으로 추정할 수 있다.

한편, 산란 연산자 M 은 Padé 근사를 이용해 분해되며 삼중대각행렬의 정 방향 곱셈과 역산을 통해 효율적으로 계산할 수 있다. 그림 2는 단일 산란 근사를 이용한 고차 양방향 포물선 방정식 알고리즘은 도식화한 것이다. 외향파는 식 (4)과 식 (9)를 이용해 전진해 나가며 구할 수 있으며 내향파는 저장된 반사파 성분을 역 전진시켜 구할 수 있다. 그러나 단일 산란 근사를 이용한 알고리즘은 각각의 미소 구역간의 다중 산란 효과를 고려할 수 없어 전체 음장에 대한 완전해를 주지 못한다는 점에 유의해야 한다.

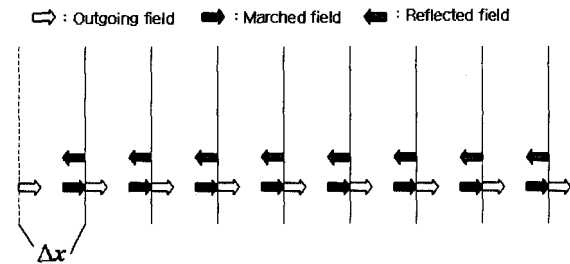


그림 2. 양방향 포물선 방정식에서 단일 산란 알고리즘
Fig. 2. Single scattering algorithm in the two way parabolic equation.

2.3. 연속적인 단일 산란 근사를 이용한 고차 양방향 포물선 방정식 알고리즘

본 논문에서 제안한 다중 산란 알고리즘은 단일 산란 근사를 연속적으로 적용한 것이다. 그림 3에서 본 논문에서 제안한 알고리즘을 도식화하고 Collins [6]의 단일 산란 알고리즘 및 Lingeitch [8]의 다중 산란 알고리즘과 비교했다. 그림 3 (a)는 단일 산란 알고리즘을 나타낸다. 단일 산란 알고리즘은 다중 산란 효과를 무시하기 때문에 음장에 대한 완전해를 주지 못한다. 그러나 해양 환경처럼 거리 방향의 변화가 약한 경우나 산란체 내부에서 다중 산란이 무시될 수 있는 환경에서는 완전 해에 가까운 결과를 준다. 그림 3 (b)는 Lingeitch의 다중 산란 알고리즘을 도시한 것이다. Lingeitch는 각각의 거리 독립의 미소 구역에서 음장을 외향파와 내향파로 나누고 경계 조건을 이용해 연성시켜 전체 음장을 계산했다. 그의 방법은 모드 대신 음장을 사용한다는 것을 제외하고는 양방향 연성 정상 모드법과 유사하다. Lingeitch는 각 경계에서 내향파와 외향파 벡터를 반복

법을 이용해 계산했다. 참고자료 8에 의하면 j 번째 경계 면에서 내향파를 \bar{p}_j , 외향파를 \bar{p}_{j+1} 라 하면 연산 알고리즘은 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} \bar{p}_{j+1} &= \frac{\tau-2}{\tau} \bar{p}_{j+1} + \frac{2}{\tau} E_j \bar{p}_j + \frac{1}{\tau} (1-D_{j+1}^* D_j) (\bar{p}_j - E_j \bar{p}_j) \\ \bar{p}_j &= \frac{\tau-2}{\tau} \bar{p}_j + \frac{2}{\tau} E_{j+1} \bar{p}_{j+1} - \frac{1}{\tau} (1-D_j^* D_{j+1}) (E_{j+1} \bar{p}_{j+1} - \bar{p}_{j+1}) \end{aligned} \quad (10)$$

여기서 E_j, D_j 는 각각 a 번째 거리 독립 미소구역에서 식 (4)와 같은 음파전달연산자와 식 (6)의 $\beta_0 \rho_0^{-1} \sqrt{1+\chi_0}$ 연산자를 의미한다. τ 는 2보다 큰 양수로 이완 인자이다. \bar{p}_j 이 좌측 경계 값이다.

깊이 방향의 분할 개수를 N 이라고 할 때 E_j 와 D_j 과 음압을 곱셈하는데 드는 시간은 $O(kN)$ 이다. 여기서 k 는 Padé 근사 차수가 증가할수록 커지는 상수 량이다. 식 (10)에서는 하나의 경계에 대해 총 6번의 E_j 와 D_j 의 연산을 수행한다. 거리 방향의 분할 개수를 K 라 할 때, 1회 연산에 들어가는 총 시간은 $O(6KN)$ 이며 $l \sim 6k$ 이다. m 번 반복 연산 후에 수렴 한다면 $l \sim 6mk$ 이 된다.

그림 3 (c)는 본 논문에서 제안한 방법을 도식화한 것이다. 우선 단일 산란 근사를 통해 ①번이라 표시된 외향파를 계산한다. 이때 경계에서 반사파 (내향파 전진 방향)는 저장되며 역 전진을 시키며 내향파를 계산한다 (②번). 이때 생성되는 반사파 (외향파 전진 방향)는 저장되며 정 방향으로 전진시켜 외향파를 계산한다 (③번). 이와 같은 과정을 반복하여 반사파가 0에 가까워질 때까지 반복법으로 해를 구한다. 최종적으로 얻어지는 외향파는 그림 3 (c)에서 (①+③+⑤.....)로 계산되며 내향파는 (②+④+⑥.....)으로 계산된다.

본 논문에서 제안하는 방법은 식 (9)에서 관찰할 수 있듯이 j 번째 경계에서 산란 연산자를 α_j 번 연산을 한다고 한다면, 거리 방향으로 1회 반복하는데 걸리는 연산 시간은 $O(pN)$ 이고 $p \sim (kK + 2k \sum_{j=1}^K \alpha_j)$ 이다. 거리 방향으로 총 q 회 왕복한다면, 총 연산 시간은 $O(pN)$ 이고 $p \sim q(kK + 2k \sum_{j=1}^K \alpha_j)$ 이다. p 에서 첫 번째 항은 음압의 전달을 계산하는데 필요한 양이고 두 번째 항은 각 경계에서 반사파를 계산하는데 소요되는 양이다. 두 번째 항에서 $\sum_{j=1}^K \alpha_j$ 는 산란 문제의 형태에 따라 $\sum_{j=1}^K \alpha_j \sim K + r(const)$ 이나 $\sum_{j=1}^K \alpha_j \sim rK$ 으로 간주할 수 있다. 그러므로 본 알고리즘의 계산 시간은 기본적으로 NK 에 비례하며 Lingeitch의

알고리즘과 비슷하다고 할 수 있다.

기억 용량의 측면에서 본다면 본 알고리즘이 Lingeitch의 알고리즘에 비해 이점을 가진다. 식 (9)와 식 (10)의 비교에서 알 수 있듯이 Lingeitch의 알고리즘은 각 거리 경계에서 4개의 음압 벡터를 필요로 한다. 그러나 본 알고리즘에서는 2개의 음압 벡터만 필요로 해서 단일 산란 계산에 필요한 컴퓨터 자원만으로도 구현이 가능하다. 반복법의 수렴도의 측면에서 보면 Lingeitch의 알고리즘은 전역적인 (global) 수렴을 필요로 한다. 식 (10)의 이완 인자는 전체 수치 영역의 수렴을 지배한다. 그러나 식 (9)의 본 알고리즘은 각 경계에서 국소적인 (local) 수렴만 요구한다. 수중에서 잠수함으로부터의 산란 문제와 같이 국소적인 불연속 경계에서 강한 산란이 발생하는 문제의 경우 본 논문의 알고리즘이 유용하다. 부가적으로 본 논문의 방법은 수치적으로 구현하기 간단하며 회귀적인 (recursive) 내향파 및 외향파의 자료를 추가적으로 얻을 수 있는 이점이 있다. 그리고 단일 산란을 연속적으로 적용하여 음장을 구하기 때문에 수렴을 판정하는 허용 오차 (tolerance)에 따라 빠른 계산도 가능하다.

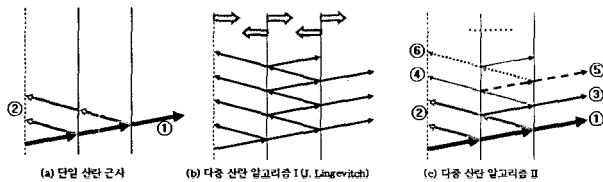


그림 3. 다중 산란과 단일 산란 알고리즘의 비교
Fig. 3. Comparison of multiple scattering algorithms and single scattering algorithm.

III. 수치 예제 및 검증

본 논문에서는 알고리즘의 검증을 위해 2가지 예제에 대해 수치 해를 보였다. 첫 번째 예제는 수중도파관에서 정상 모드의 수평 반사 및 투과에 대한 예제이다. 도파관의 깊이는 $D=100m$ 이고 양 경계는 압력 소멸 조건을 준다. 주파수는 $f=25Hz$ 라 한다. 거리 방향으로 $0km$ 에서 $1km$ 까지는 도파관의 음속은 $c_0=1500m/s$, 밀도는 $\rho=1000kg/m^3$ 로 놓고 그 이후의 거리에서는 음속은 $1800m/s$, 밀도는 $1800kg/m^3$ 으로 놓았다. 거리 $0km$ 에서 음압의 초기 값은 다음과 같이 모드 형상 함수로 주어졌다.

$$\psi_m(z) = \frac{j}{2k_m} \sqrt{\frac{2\rho}{D}} \sin(k_m z) \tag{11}$$

여기서 $k_m = \frac{m\pi}{D}$ 이고 정상 모드 $k_m = \sqrt{k^2 - k_m^2}$ 로 표현된다. m 은 모드 번호이고 k 는 매질의 파수이다.

그림 4에서는 초기값을 각각 1번, 2번, 3번 모드 형상 함수로 잡았을 때 외향파의 음장을 보였다. 1번과 2번 모드는 거리 $1km$ 에서 모드 반사 및 투과를 하며 두 번째 매질에서도 전달 모드로써 거동하지만 3번 모드는 두 번째 매질에서는 감쇠 모드가 되어 투과된 후 $200m$ 이내에서 소멸한다. 그림 4에서 실선은 이론 해와의 비교를 위해 각 음장의 최대 값을 갖는 직선을 이은 것이다. 그림 5는 그림 4에서 점선으로 표시된 부분의 값을 이론 해와 비교한 것이다. 정확히 일치하는 것을 볼 수 있다.

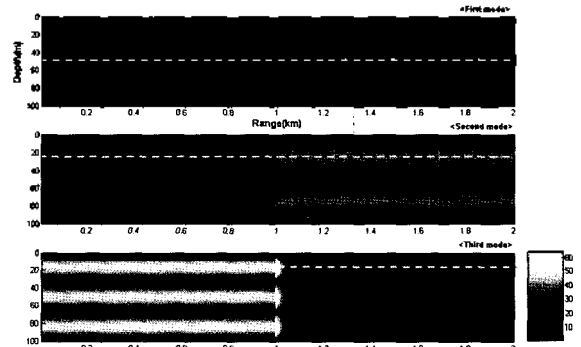


그림 4. 3개의 모드 초기 값에 따른 외향파 음장 (음영의 단위는 Pa입)
Fig. 4. Outgoing wave field for 3 mode shape functions as the initial value (The unit of colorbar is Pa).



그림 5. 수치 해와 이론 해의 비교
Fig. 5. Comparison of the numerical solution and the analytic solution.

두 번째 예제는 균일 매질 안의 정사각 산란체에서의 다중 산란 현상을 모사했다. 이 예제는 참고 자료 8에서 제시된 예제이다. 주파수는 예제 1과 동일하다. 균일 매질의 음속과 밀도는 각각 $1500m/s$, $1000kg/m^3$ 이다. 정사각 산란체의 물성은 각각 $700m/s$ 와 $2000kg/m^3$ 이고,

(500m×500m)의 단면 크기를 갖고 (0,0)에서 단면의 중심을 갖는다. 균일 매질의 상하부 경계는 PML (Perfectly matched layer) [12]을 이용해 감쇠 조건을 두었으며 초기 값은 다음과 같은 Gaussian 빔으로 표현된다.

$$p(z) = e^{-(z/1km)^2} \tag{12}$$

그림 6 (a)는 본 논문의 알고리즘으로 단일 산란을 모사한 경우와 다중 산란을 모사한 경우의 외향파 음장을 그린 것이다. 그림 6 (b)는 다중 산란 음장과 단일 산란 음장간의 차이를 나타낸 것이다. 그림 7은 다중 산란을 모사할 때 각 단일 산란 단계마다 수직 경계에서 반사파의 크기를 보여준다. 그림에서 숫자로 표시된 곳은 각 단계에 해당하는 반사파를 나타낸다. 반복 횟수가 증가할수록 반사파의 크기가 점차 줄어드는 것을 볼 수 있다. 그림 8은 z=0에서 외향파 음장의 수렴도를 비교한 것이다. 총 6번의 연속적인 연산에도 빠르게 수렴하는 것을 볼 수 있다. 그림 9는 벤치마크 해와 본 논문의 알고리즘으로 구한 외향파 음장을 비교한 것이다. 거의 정확하게 일치하는 것을 확인할 수 있다.

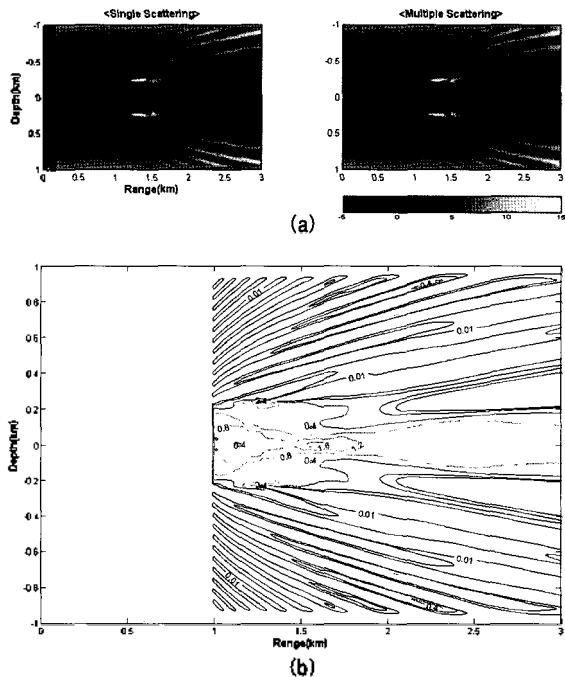


그림 6. (a) 단일 산란과 다중 산란에 대한 외향파 음장의 수치 해 (음영의 단위는 dB입), (b) 다중 산란 과 단일 산란 음장의 차이 (라벨의 단위는 dB)

Fig. 6. (a) Numerical results of the outgoing wave field for single scattering algorithm and multiple scattering algorithm (The unit of colorbar is dB), (b) Difference of the outgoing wave field between multiple and single scattering.

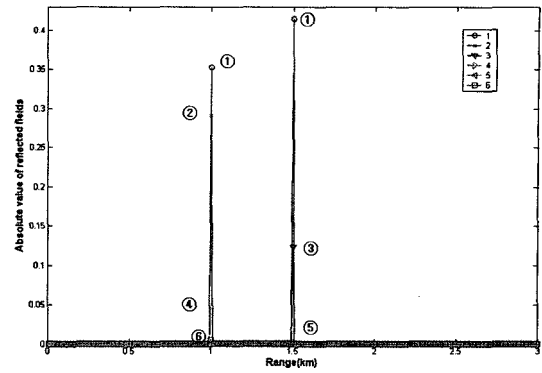


그림 7. 각 반복 단계에 따른 반사파의 크기
Fig. 7. Absolute value of reflected wave fields for each iterative step.

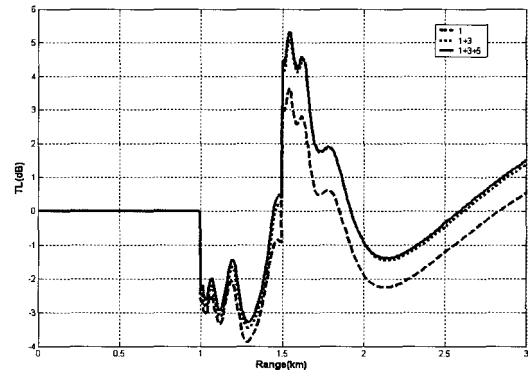


그림 8. 각 반복 단계에 따른 전체 외향파 음장의 비교
Fig. 8. Comparison of the cumulative outgoing wave field for each iterative step.

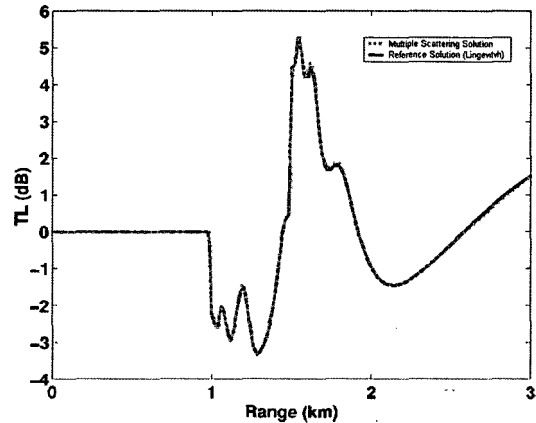


그림 9. 벤치 마크 해와의 비교
Fig. 9. Comparison of the numerical result and the benchmark solution.

IV. 결론

본 논문에서는 다중 산란 현상을 구현할 수 있는 연속적인 단일 산란 근사 알고리즘을 제안하고 결과를 검증했다. 본 알고리즘은 전체 음장을 타원형 (Elliptic type)

처럼 연성시켜 계산하는 기존의 알고리즘에 비해 구현하기 단순하며 단일 산란에 필요한 컴퓨터 자원만으로도 계산이 가능하다. 차후 우리는 본 2차원 알고리즘을 3차원 산란 문제로 확장할 예정이다.

참고 문헌

1. D. C. Jenn, *Radar and Laser Cross Section Engineering* (AIAA, Washington, DC, 1995).
2. 최영호 외 8명, "수중 물체에 대한 음향 표적강도의 수치해석과 실험적 검증," 한국해양공학회지 19 (1) 64-70, 2005.
3. 신기철 외 5명, "기하광학영역에서의 능동 소나 표적신호합성," 한국음향학회지 20 (3) 91-97, 2001.
4. P-P. Borsboom and A. Zebic-Le Hyaric, "RCS prediction using wide-angle PE codes," 10th International Conference on Antennas and Propagation, 2, 191-2.194, 1997.
5. M. F. Levy and A. A. Zaporozhets, "Target scattering calculation with the parabolic equation method," J. Acoust. Soc. Am. 103 (2), 735-741, 1998.
6. M. D. Collins and R. B. Evans, "A two-way parabolic equation for acoustic backscattering in the ocean," J. Acoust. Soc. Am. 91 (3), 1357-1368, 1992.
7. M. J. Mills, M. D. Collins and J. F. Lingeitch, "Two-way parabolic equation techniques for diffraction and scattering problems," Wave Motion 31, 173-180, 2000.
8. J. F. Lingeitch et al., "A two-way parabolic equation that accounts for multiple scattering," J. Acoust. Soc. Am. 112 (2), 476-480, 2002.
9. R. B. Evans, "A coupled mode solution for acoustic propagation in a waveguide with stepwise depth variation of a penetrable bottom," J. Acoust. Soc. Am. 74 (1), 188-195, 1983.
10. W. F. Ames, *Numerical methods for partial differential equations* (AP, New York, 1977).
11. F. B. Jensen et al., *Computational Ocean Acoustics* (AIP PRESS, New York, 1993).
12. K. Lee and W. Seong, "The perfectly matched layer applied to the split-step Padé PE solver in an ocean waveguide," 9th Western Pacific Acoustics Conference, 2006.

저자 약력

• 이 근 화 (Keunhwa Lee)

한국음향학회지 제 25권 1E호 참조