

< 논문 >

## 임의의 절점 추가에 의한 개선 유한요소법

김 현 규\*

(2006년 7월 14일 접수, 2006년 10월 24일 심사완료)

### An Improved Finite Element Method by Adding Arbitrary Nodes in a Domain

Hyun-Gyu Kim

**Key Words :** Finite Element Methods(유한요소법), Meshless Methods(무요소법), Moving Least Square(이동최소자승), Numerical Integration(수치 적분)

#### Abstract

In the present paper, in the context of the meshless interpolation of a moving least squares (MLS) type, a novel method which uses primary and secondary nodes in the domain and on the global boundary is introduced, in order to improve the accuracy of solution. The secondary nodes can be placed at any location where one needs to obtain a better resolution. The support domains for the shape functions in the MLS approximation are defined from the primary nodes, and the secondary nodes use the same support domains. The shape functions based on the MLS approximation, in an integration domain, have a single type of a rational function, which reduces the difficulty of numerical integration to evaluate the weak form. The present method is very useful in an adaptive calculation, because the secondary nodes can be easily added and moved without an additional mesh. Several numerical examples are presented to illustrate the effectiveness of the present method.

#### 1. 서론

무요소법(meshless methods)의 매력 중에 하나는 경계치 문제의 해석에서 요소의 구성없이 절점들의 추가와 제거가 쉬워서 적응 오차-제어(adaptive error-control)를 할 수 있다는데 있다. 지금까지 제안된 무요소법은 Smooth Particle Hydrodynamics (SPH),<sup>(1)</sup> Element Free Galerkin (EFG),<sup>(2)</sup> Reproducing Kernel Particle Method (RKPM),<sup>(3)</sup> Hp-cloud Method,<sup>(4)</sup> Partition of Unity (PU),<sup>(5)</sup> Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG)<sup>(6)</sup> 등이 있는데 대부분의 무요소법들은 후면격자(background mesh)를 구성하고 약화식(weak form)의 수치적분을 수행하게 된다. 무요소법에서는 후면격자를 기준으로 수치적분을 수행하므로 형상함수의 특성에 따라서 후면격자의 구성이

되어야 수치적분의 일관성을 유지할 수 있게 된다. 그러므로 대부분의 무요소법에서 후면격자의 구성을 위한 노력이 필요로 하게 되고 절점의 추가나 제거에 따라서 후면격자의 재구성이 요구되게 된다.<sup>(7)</sup> 절점의 형상함수(shape functions)가 정의되는 영역인 지지영역(support domains)이 대부분의 무요소법에서 2차원의 경우 원, 타원, 사각형 등이 사용되므로 지지영역들의 경계를 따르는 적분영역 또는 후면격자를 구성하는 것은 너무 복잡한 형상이 되게 된다. 무요소법에서 수치적분 영역의 설정에 따른 문제점과 어려움에 대한 자세한 설명이 Atluri 등<sup>(8)</sup>에 주어져 있는데, 이론적으로는 적분영역을 지지영역의 경계를 따라서 설정되어야 수치적분의 일관성이 유지되게 된다. 유한요소법(finite element methods)에서는 적분영역이 지지영역의 경계인 요소 경계를 기준으로 이루어지므로 일관성 있는 수치적분을 얻게 된다.

절점의 추가와 제거에 따라 해석 결과의 정확성을 제어하기 위한 방법으로 유한요소법과

\* 회원, 서울산업대학교 기계공학과

E-mail : khg@snut.ac.kr

TEL : (02)970-6309 FAX : (02)949-1458

Partition of Unity를 결합한 방법<sup>(9)</sup>이 제시되었는데 절점의 추가에 따라 새로운 격자 구성이 필요하게 된다. 또한 무요소법과 유한요소법을 결합하는 시도<sup>(10)</sup>를 하였으나 적분영역과 지지영역의 불일치로 인하여 수치적분의 일관성을 유지할 수 없는 방법이었다. 변분적 다중 스케일을 사용한 무요소법의 적응적 해석<sup>(11)</sup>과 최소 제곱 무요소법의 적응기법<sup>(12)</sup> 등의 보다 개선된 적응적 해석 방법에 대한 연구가 이루어 지고 있다.

본 논문에서는 무요소법과 유한요소법의 장점을 결합하여 적분영역은 유한요소에서 정의가 되고 임의의 위치에 절점을 추가하여 무요소법의 형상함수를 구성하는데 지지영역을 유한요소를 기준으로 설정하도록 하였다. 즉, 적분영역과 지지영역의 경계를 일치시키면서 무요소법의 장점을 도입하여 임의의 위치에 절점을 추가하거나 제거할 수 있는 방법을 제시하고 있다. 유한요소를 구성하는 절점을 1차 절점(primary nodes)이라 하고 추가와 제거를 하는 절점을 2차 절점(secondary nodes)으로 정의하여 형상함수를 이동최소자승법(moving least square methods)으로 구성하게 된다. 여기서 1차 절점이나 2차 절점의 지지영역은 모두 유한요소를 기반으로 구성이 되게 되며, 적분영역도 유한요소를 기준으로 수행되게 된다. 그러므로 별도로 추가적인 후면격자의 구성이 필요없고 적분영역과 지지영역의 경계가 일치하는 일관성 있는 수치적분이 가능하게 된다. 결과적으로 본 논문에서 제시하는 개선 유한요소법은 2차 절점들의 추가와 제거가 별도의 작업없이 자유롭게 되므로 필요한 곳에 절점을 추가하여 해의 정확성을 올리고 필요 없으면 제거할 수 있게 되는 효율적인 방법이다.

## 2. 기본수식화 과정

### 2.1 지지영역과 수식화

Fig. 1과 같이 주어진 문제의 전체영역  $\Omega$ 에서 평형방정식은 다음과 같다.

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

여기서  $\sigma_{ij}$ 는 응력 텐서 성분이고  $b_i$ 는 체적력 성분이며  $(\cdot)_{,j}$ 는  $\partial(\cdot)/\partial x_j$ 이고 반복 첨자는 합을 나타낸다. 경계조건은 다음과 같다.

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{at } \Gamma_u \quad (2.1)$$

$$\sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i \quad \text{at } \Gamma_t \quad (2.2)$$

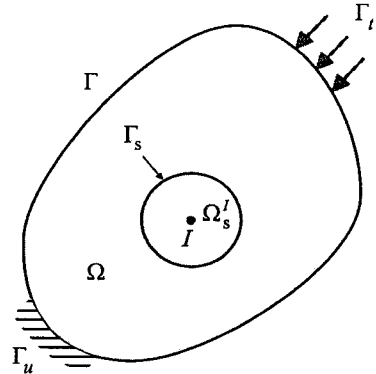


Fig. 1 A schematic representation of the sub-domain  $\Omega'_s$ , with node  $I$  as its center, and  $\partial\Omega'_s = \Gamma_s$  as its boundary

여기서  $\Gamma_u$ 와  $\Gamma_t$ 는 변위와 하중이 주어진 경계를 나타낸다. 전체영역  $\Omega$ 에서 절점  $I$ 의 지지영역을 Fig. 1과 같이  $\Omega'_s$ 로 나타내기로 하자. 지지영역이 2차원의 경우 원, 사각형 등 다양한 모양이 될 수 있다. 지지영역에서 국부적인 지배방정식의 약화식(weak form)을 쓰면 다음과 같다.

$$\int_{\Omega'_s} (\sigma_{ij,j} + b_i) v_i d\Omega = 0 \quad (3)$$

여기서  $v_i$ 는 시험함수(test function)이다. 전체영역의 경계를  $\partial\Omega'_s$ 이 지나가는 경우를 제외하고는  $\partial\Omega'_s$ 에서 시험함수  $v_i$ 를 0으로 설정하게 되고 발산정리를 적용하면 다음과 같다.

$$\int_{\Omega'_s} \sigma_{ij} v_{i,j} d\Omega = \int_{\Gamma'_t} \bar{t}_i v_i d\Gamma + \int_{\Gamma'_u} b_i v_i d\Omega \quad (4)$$

여기서  $t_i = \sigma_{ij} n_j$ 이고  $\Gamma'_u$ 는  $\Gamma_t$ 와  $\Omega'_s$ 의 겹치는 부분이다.

## 3. 이동최소자승법과 수치적분

이번 장에서는 이동최소자승법(moving least square methods; MLS)의 특성에 대하여 간략히 기술하고 수치적분의 어려움을 설명하고자 한다.

Fig. 2와 같이 근사함수  $u(\mathbf{x})$ 를  $\tilde{\mathbf{x}}$ 를 중심으로 국부영역에서 다음과 같이 근사하게 된다.

$$u^{local}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\tilde{\mathbf{x}}) \quad (5)$$

여기서  $\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [p_1(\mathbf{x}), p_2(\mathbf{x}), \dots, p_m(\mathbf{x})]$  는  $m$  차의 기저함수이고  $\mathbf{a}_j(\tilde{\mathbf{x}})$  는  $\tilde{\mathbf{x}}$  에서 계수 벡터이다. 예를 들어 2 차원 1 차 기저함수는 다음과 같다.

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [1, x, y] \quad (6)$$

이동최소자승법에서는 다음과 같은  $L_2$  -놈을 정의하고 최소화 조건에서  $\mathbf{a}(\tilde{\mathbf{x}})$  를 결정하게 된다.

$$Y(\tilde{\mathbf{x}}) = \sum_{I=1}^N w_I(\tilde{\mathbf{x}}) [\mathbf{p}^T(x_I) \mathbf{a}(\tilde{\mathbf{x}}) - \hat{u}^I]^2 = [\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}(\tilde{\mathbf{x}}) - \hat{\mathbf{u}}]^T \cdot \mathbf{W}(\tilde{\mathbf{x}}) \cdot [\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}(\tilde{\mathbf{x}}) - \hat{\mathbf{u}}] \quad (7)$$

여기서  $w_I(\tilde{\mathbf{x}})$  는 지지영역  $\Omega'_I$  에서 정의된 가중함수(weight functions)이다. 가중함수  $w_I(\tilde{\mathbf{x}})$  는  $\Omega'_I$  안에서  $w_I(\tilde{\mathbf{x}}) > 0$  이고  $\partial\Omega'_I$  에서  $w_I(\tilde{\mathbf{x}}) = 0$  인 특성을 갖는다. 식 (7)에서 행렬  $\mathbf{P}$  와  $\mathbf{W}$  는 다음과 같다.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}^T(x_1) \\ \mathbf{p}^T(x_2) \\ \dots \\ \mathbf{p}^T(x_N) \end{bmatrix}_{N \times m}, \quad \mathbf{W}(\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} w_1(\tilde{\mathbf{x}}) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & w_N(\tilde{\mathbf{x}}) \end{bmatrix}_{N \times N} \quad (8)$$

표현의 편의를 위하여 위의 식들에서  $\tilde{\mathbf{x}}$  대신에  $\mathbf{x}$  로 대치하고  $\tilde{\mathbf{x}}$  을 전체 영역으로 확장하게 되면 이동하는 최소자승 근사가 된다.

식 (7)의 최소화에서  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  는 다음에서 구해진다.

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{u}} \quad (9)$$

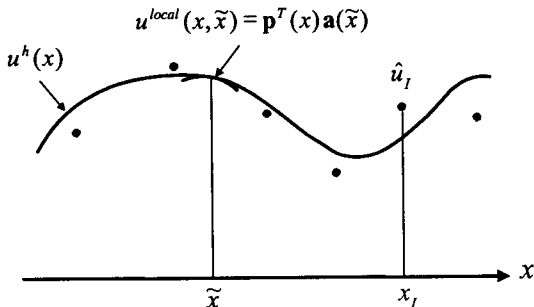


Fig. 2 Conceptual explanation of the moving least square approximation

여기서

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{P}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T \mathbf{W} \quad (10)$$

결과적으로 다음과 같이 된다.

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^N \phi^I(\mathbf{x}) \hat{u}^I \quad (11)$$

여기서

$$\phi^T(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \quad (12)$$

이동최소자승법에서 절점값인  $\hat{u}^I$  는 Fig. 2와 같이 근사하는 절점의 값을 정확히 지나가지 않을 수 있으므로 가상의 절점값이 된다. 이동최소자승법으로 정의된 형상함수는 다음과 같이  $m$  차의 다항식 함수  $g(\mathbf{x})$  를 정확히 표현할 수 있다.<sup>(13)</sup>

$$\sum_{I=1}^N \phi^I(\mathbf{x}) g(x_I) = g(\mathbf{x}) \quad (13)$$

위의 식은 형상함수의 완전성을 보여주며 해의 수렴성을 보증하는 필요조건이 된다.

이차원 선형 기저함수의 경우 이동최소자승법에서 유도되는 형상함수는 다음과 같이 된다.

$$\phi^I(x, y) = \frac{w_I(x, y)}{b(x, y)} [c_0(x, y), c_1(x, y), c_2(x, y)] \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} \quad (14)$$

여기서 계수  $c_0(x, y)$ ,  $c_1(x, y)$ ,  $c_2(x, y)$ ,  $b(x, y)$  는 Atluri 등<sup>(8)</sup>에 주어져 있다. 위의 식에서 계수들은 단순하지 않고 지지영역의 경계에 의하여 Fig. 3과 같이 복잡하게 정의가 되게 된다. 지지영역의

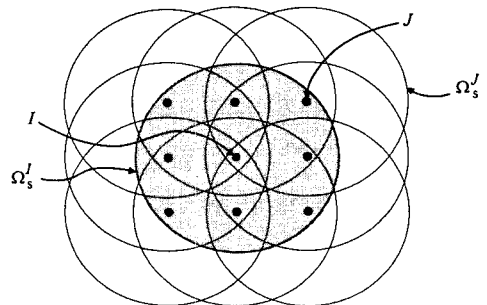


Fig. 3 Support domains of MLS approximations for nodes in a domain

경계에 따라 분수함수로 주어진 형상함수는 계수의 형태에 연속성이 없게 되고 형상함수의 미분이 지지영역의 경계를 따라서 불연속하게 된다. 절점  $I$ 의 지지영역  $\Omega'_I$ 에서 수치적분을 일관되게 수행하기 하기 위하여 적분영역에서 형상함수 미분이 불연속하지 않아야 하므로, 적분영역은 지지영역의 경계를 따라서 정의되는 것이 타당하게 된다. 본 연구에서 제시한 방법은 지지영역과 적분영역의 경계를 일치시키면서 일관된 수치적분이 가능하도록 하는 방법을 제시하고 있다.

#### 4. 개선 유한요소법

본 논문에서 제시하고 있는 개선 유한요소법에서 지지영역과 가중함수를 구성하는 방법과 강성행렬을 구하기 위한 수치적분 방법을 2차원의 경우에 대하여 기술하고 있다.

##### 4.1 다각형 지지영역과 가중함수

앞 장에서 설명한 바와 같이 무요소법의 문제점은 지지영역의 경계들이 너무 복잡하게 되고 수치적분의 어려움이 발생하게 되는데, 본 논문에서 제시하는 방법은 1차 절점에서 구성되는 격자를 사용하여 2차 절점의 지지영역으로 정의가 되므로 무요소법의 문제점을 해결할 수 있게 된다. Fig. 4에 1차 절점과 2차 절점을 보여주고 있다. 2차 절점의 지지영역이 1차 절점으로 구성된 격자를 기준으로 정의가 되므로 Fig. 3과 같이 복잡하게 되지 않고 형상함수들이 모두 같은 함수 형태를 유지하게 된다.

Fig. 5에 무요소법들에서 주로 사용하게 되는 후면격자와 1차 절점으로 구성되어 있는 후면격자를 보여주고 있다. 기존의 무요소법들에서는 절점의

추가와 삭제에 따라서 후면격자의 구성과 지지영역의 변경이 필요하게 되는데, 개선 유한요소법에서는 2차 절점의 추가와 삭제에 따라서 추가적인 격자 구성의 작업이 필요없게 된다.

위와 같이 새로운 격자의 구성없이 2차 절점의 지지영역을 정의하기 위하여 1차 절점으로 구성된 초기의 유한요소가 지지영역으로 사용되는데 Fig. 6과 같이 2차 절점에서 가장 가까운 영역 내부의 1차 절점의 지지영역을 사용하게 된다. 1차 절점을 대문자  $I$ 로 나타내고 2차 절점을 소문자  $i$ 로 표현하도록 하자. 가중함수는 다양하게 정의할 수 있으나 1차 절점에 대한 가중함수는 유한요소법의

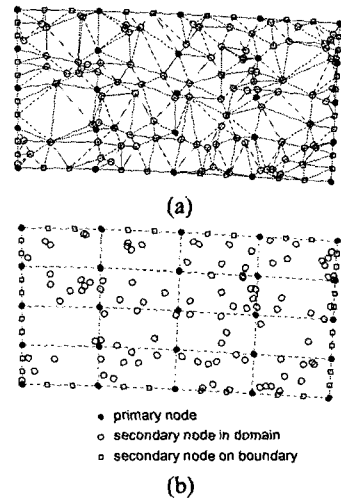


Fig. 5 Comparison between the background mesh, and the improved finite elements; (a) the mesh from the background mesh in meshless methods, and (b) the mesh from primary nodes in the present method; whereas the secondary nodes in the present method do not involve an additional mesh

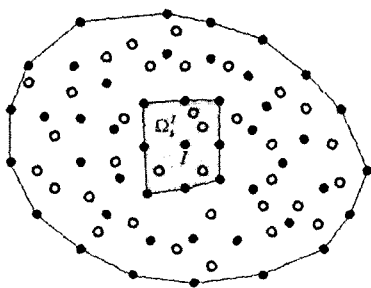


Fig. 4 Schematic representations for support domains with randomly distributed nodes for the present method (The solid circles are primary nodes; and the open circles are secondary nodes)

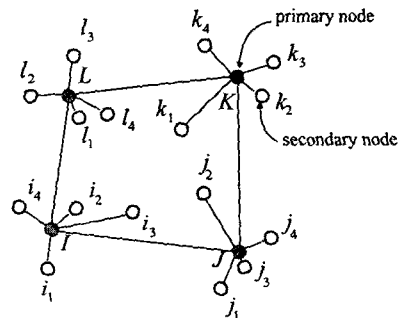


Fig. 6 A primary-node anchor for a secondary node is the nearest primary node.  $I, J, K$  and  $L$  indicate the primary nodes, and  $i, j, k$  and  $l$  indicate the set of secondary nodes

형상함수를 사용하였다.

$$w_I(x) = N^I(x) \text{ on } \Omega_I^e \quad (15)$$

여기서  $N^I(x)$ 는 절점  $I$ 의 유한요소 형상함수이다. 다각형 지지영역에서 가중함수를 정의하기 위하여 1차 절점  $I$ 의 유한요소 형상함수와 2차 절점  $i$ 를 중심으로 하는 원 내부에 정의된 4차 스플라인(spline)  $\bar{w}_i(x)$ 를 곱하여 정의하였다. Fig. 7에 2차 절점의 가중함수 구성에 대하여 나타내고 있는데, 4차 스플라인 함수가 정의되는 원의 반지름은 2차 절점과 지지영역에서 관련된 1차 절점들 사이에 가장 먼 거리로 설정된다.

$$w_i(x) = N^I(x) \bar{w}_i(x) \text{ on } \Omega_i^e = \Omega_i^s \quad (16)$$

여기서

$$\bar{w}_i(x, y) = \begin{cases} 1 - 6\left(\frac{d_i}{r_i}\right)^2 + 8\left(\frac{d_i}{r_i}\right)^3 - 3\left(\frac{d_i}{r_i}\right)^4 & \text{for } 0 \leq d_i \leq r_i \\ 0 & \text{for } d_i > r_i \end{cases} \quad (17)$$

여기서  $d_i = |x - x_i|$ 이고  $r_i$ 는 2차 절점  $i$ 로부터  $\bar{w}_i(x)$ 가 정의된 원의 반지름이다.

Fig. 8에 1차 절점  $I$ 와 2차 절점  $i$ 의 가중함수와 이동최소자승법을 통한 형상함수를 보여주고 있다. 1차 절점과 2차 절점의 형상함수의 유도 과정은 동일하며 그림들에서 보면 형상함수의 미분은 1차 절점으로 구성된 초기 요소의 경계를 따라서 불연속 하다는 것을 알 수 있다.

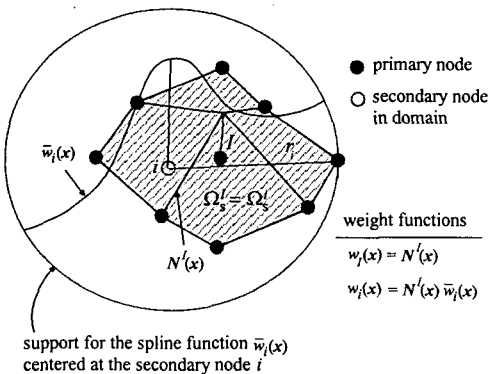


Fig. 7 The definition of support domains for the primary node  $I$  and the secondary node  $i$  in the domain  $\Omega$

전체영역의 경계에 있는 1차 절점들은 2차 절점들의 지지영역의 기준이 되는 절점으로 선택하지 않으므로, 경계영역의 변형에 대한 항상이 필요하게 된다. 경계영역에서의 변형의 제한은 해의 수렴성을 높이는데 걸림돌이 되므로 경계에 있는 1차 절점에 경계를 따라서 2차 절점을 추가하는 방법을 적용하였다. 경계영역에 있는 2차 절점의 가중함수는 다음과 같이 정의하였다.

$$w_i(x) = N^m(x) \bar{w}_i(x) \text{ in } \Omega_i^e \quad (18)$$

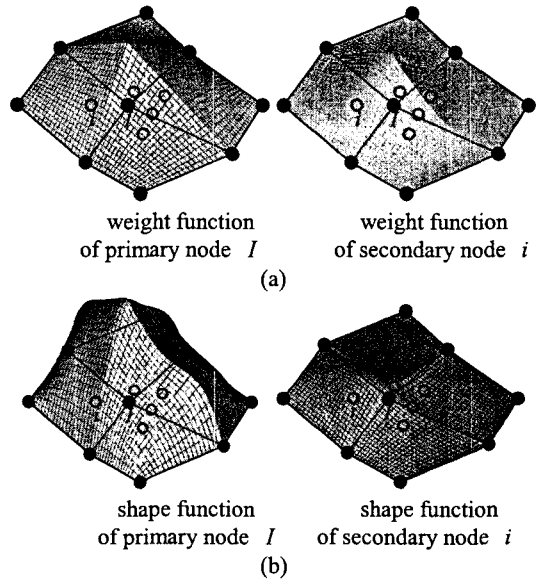


Fig. 8 Weight and shape functions: (a) weight functions and (b) shape functions of the primary node  $I$  and of the secondary node  $i$

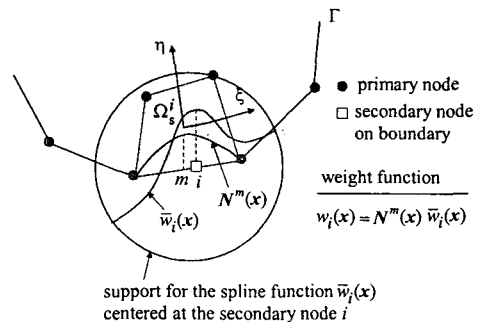


Fig. 9 The definition of the support domains for the primary node  $I$  and the secondary node  $i$  on boundary

여기서  $\bar{w}_i(\mathbf{x})$ 는 식(17)의 4 차 스플라인 함수이고  $N^m(\mathbf{x})$ 는 다음과 같이 정의된 함수를 사용하였다.

$$N^m(\mathbf{x}) = \tilde{N}^m(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta) \quad (19)$$

여기서  $\xi, \eta$ 는 유한요소법의 좌표값이다. Fig. 9에서와 같이 2차 절점  $i$ 와  $j$ 를 추가하여 경계에서 변형의 정확도가 향상될 수 있다.

4.2 수치적분

지배방정식의 약화식을 영역에서 수치적분을 수행해야 하는데, 수치적분은 해의 수렴성과 안정성에 큰 영향을 주게 된다. 유한요소법에서의 수치적분은 요소를 기준으로 수행이 되고 무요소법에서는 적분격자를 구성하게 된다. Fig. 3과 같이 무요소법의 지지영역이 원형인 경우 지지영역의 경계가 복잡하게 만나서 적절한 적분영역의 설정이 어렵게 된다.<sup>(8,14)</sup> 무요소법에서 절점적분<sup>(15)</sup>과 적분영역의 적응적 설정<sup>(16)</sup> 등과 같은 수치적분을 개선하기 위한 연구가 이루어지고 있다. 이동최소자승법에서 유도되는 형상함수는 지지영역 경계에서 미분값이 불연속하게 된다. 그러므로 적분영역은 형상함수의 지지영역 경계를 따라서 정의되는 것이 하나의 형태로 구성된 미분 연속인 함수를 수치적분하게 되어 일관성 있는 적분을 기대할 수 있게 된다.<sup>(9)</sup> 본 논문에서 제시하는 방법은 그림 10에 1차 절점의 격자를 사용한 적분영역을 사용하여 적분영역이 절점들의 지지영역과 일치하게 된다. 수치적분은 가우스 구적법(Gaussian quadrature)을 사용하였는데 형상함수가 분수함수이므로 유한요소법 보다 고차의 적분이 요구된다.

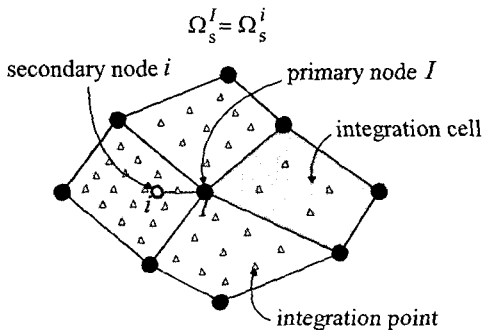


Fig. 10 Numerical integration inside each integration cell in the support domains  $\Omega_s^I = \Omega_s^i$

5. 수치예제

2차원 선형 탄성의 예제들을 Fig. 11에 보여주고 있는데, 재료 물성치는  $E=1.0 \times 10^{10}$  와  $\nu=0.25$  이다. 변위와 에너지 norms는 다음과 같이 정의하였다.

$$\|u\| = \left( \int_{\Omega} u^T u d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (20.1)$$

$$\|\epsilon\| = \left( \frac{1}{2} \int_{\Omega} \epsilon^T D \epsilon d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (20.2)$$

변위와 변형률의 상대적인 오차는 다음과 같이 정의하여 사용하였다.

$$r_u = \frac{\|u^{num} - u^{exact}\|}{\|u^{exact}\|} \quad (21.1)$$

$$r_\epsilon = \frac{\|\epsilon^{num} - \epsilon^{exact}\|}{\|\epsilon^{exact}\|} \quad (21.2)$$

5.1 외팔보 문제

외팔보는  $D=4.0$  이고  $L=8.0$  으로 하였으며 1차 절점은 규칙적으로 배열시키고 2차 절점을 임의로 추가하였다. 부여한 하중  $P$ 는  $(-1.0 \times 10^8)$  이다. 1차 절점만의 결과는 유한요소법과 동일하며 2차 절점을 50, 100, 200개 불규칙하게 임의로 추가하였다. Fig. 12에서 보는 바와 같이 경계영역의

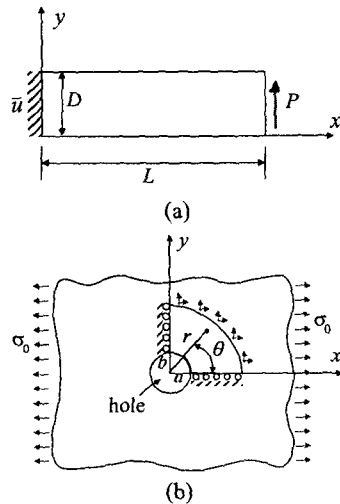


Fig. 11 Geometric description for numerical experiments; (a) a cantilever beam, and (b) a plate with a hole

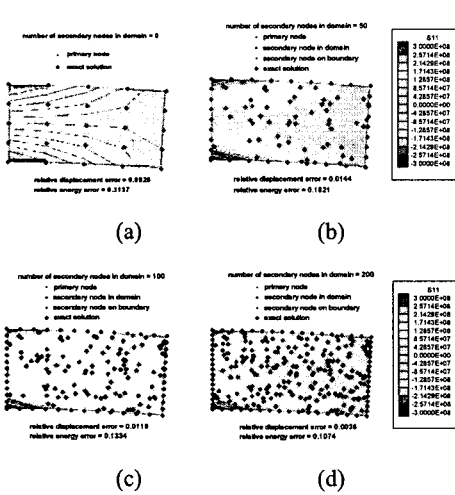


Fig. 12 Comparison of the present method and the exact solutions, for the problem of a cantilever beam. (a) without secondary nodes, (b) with 50 secondary nodes, (c) with 100 secondary nodes, and (d) with 200 secondary nodes

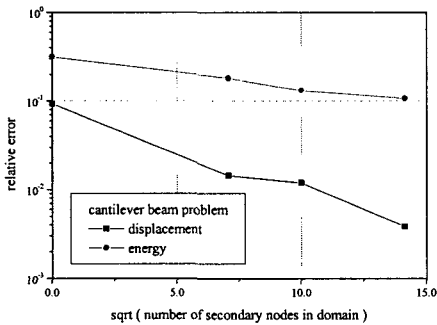


Fig. 13 Convergence for the displacement and the energy norms in a cantilever beam problem, with irregularly distributed secondary nodes

1차 절점 사이에 2차 절점도 추가하였으며 2차 절점수 50, 100, 200개에 대하여 적분수는  $3 \times 3$ ,  $5 \times 5$ ,  $8 \times 8$  을 적용하였다. 이론해<sup>(17)</sup>와의 비교는 Fig. 13에 주어져 있는데 상대변위의 오차가 9.26%에서 0.38%로 임의의 2차 절점 200개의 추가로 감소하였으며 에너지 오차는 31.37%에서 10.74%로 감소하였다.

5.2 원형 구멍이 있는 무한평판 문제

다음으로 Fig. 11(b)의 원형구멍이 있는 평판 문제를 해석하였다. 구멍에 먼 곳의 하중은  $\sigma_0 = 1.0 \times 10^9$  로 x 방향으로 작용하고 있는데 대칭성으로 인하여 Fig. 11(b)에서  $0 \leq r \leq 4$  의 1/4 영

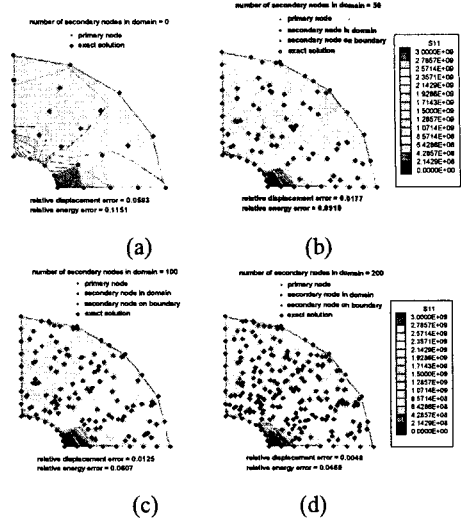


Fig. 14 Comparison of the present method and the exact solutions, for the problem of a plate with a circular hole. (a) without secondary nodes, (b) with 50 secondary nodes, (c) with 100 secondary nodes, and (d) with 200 secondary nodes

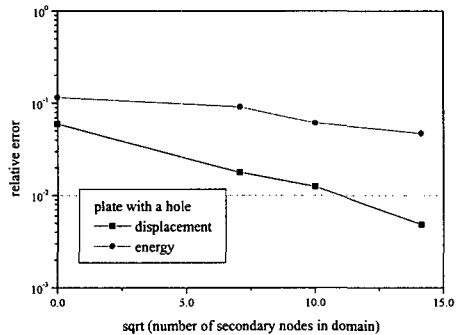


Fig. 15 Convergence for the displacement and the energy norms in the problem of a plate with a circular hole, with irregularly distributed secondary nodes in the domain

역을 해석하였으며 대칭 조건은 왼쪽면에  $u_1 = 0$ ,  $t_2 = 0$  를 대입하고 아랫면에  $u_2 = 0$ ,  $t_1 = 0$  을 부여하였다. 구멍의 반지름  $a = 1.0$  이며  $r = 4.0$  에서 이론해의 하중을 부여하였다. Fig. 14와 같이 2차 절점을 50, 100, 200개를 무작위로 첨가하였으며 각각  $4 \times 4$ ,  $6 \times 6$ ,  $9 \times 9$  의 적분점을 사용하였다. 외팔보 문제와 마찬가지로 경계영역에 2차 절점을 추가하였다. 임의의 2차 절점 200개의 추가로 상대 변위의 오차는 5.93%에서 0.48%로 감소하였으며 상대 변형률 오차는 11.51%에서 4.69%로 감소하였고 Fig. 15에 보여주고 있다.

6. 결론

절점을 임의로 추가하거나 제거하는데 새로운 격자의 구성없이 경계치 문제의 해석에 대한 오차를 제어할 수 있는 새로운 방법을 본 논문에서 제시하였다. 새로운 절점의 추가에 따른 유한요소법의 새로운 요소 생성의 문제와 무요소법의 적분격자 구성의 문제를 해결하면서 임의로 절점의 추가와 제거가 자유로운 방법이다. 본 논문에서 제시하는 방법은 1차 절점을 기준으로 구성된 격자를 사용하여 2차 절점의 지지영역을 정의하고 이동최소자승법으로 형상함수를 구성하였으며 적분영역과의 일관성을 유지하면서 수치적분의 수렴성을 보증할 수 있게 된다. 그러므로 본 논문에서 제시하는 방법은 전산역학 분야에서 절점을 자유롭게 추가하고 제거 함으로서 오차를 적응적으로 제어할 수 있는 방법이 될 수 있을 것으로 판단이 된다. 선형 탄성 문제들의 예제에서 본 논문의 방법을 검증하였으며 좀 더 확장된 문제들의 해결에 응용될 수 있을 것이다.

참고문헌

(1) Gingold, R. A. and Monaghan, J. J., 1977, "Smoothed Particle Hydrodynamics: Theory and Application to Non-spherical Stars," *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, Vol. 181, pp. 375~389.  
 (2) Belytschko, T., Yu, Y. Y. and Gu, L., 1994, "Element-Free Galerkin Methods," *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol. 37, pp. 229~256.  
 (3) Liu, W. K., Jun, S. and Zhang, Y. F., 1995, "Reproducing Kernel Particle Methods," *Int. J. Numer. Methods in Fluids*, Vol. 20, pp. 1081~1106.  
 (4) Duarte, C. A. and Oden, J. T., 1996, "Hp-Cloud - A Meshless Method to Solve Boundary-Value Problems," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 139, pp. 237~262.  
 (5) Babuska, I. and Melenk, J. M., 1997, "The Partition of Unity Method," *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol. 40, pp. 727~758.

(6) Atluri, S. N. and Zhu, T., 1998, "A New Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Approach in Computational Mechanics," *Comput. Mech.*, Vol. 22, pp. 117~127.  
 (7) Liu, G. R. and Tu, Z. H., 2002, "An Adaptive Procedure Based on Background Cells for Meshless Methods," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 191, pp. 1923~1943.  
 (8) Atluri, S. N., Kim, H.-G. and Cho, J. Y., 1999, "A Critical Assessment of the Truly Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG), and Local Boundary Integral Equation (LBIE) Methods," *Comput. Mech.*, Vol. 24, pp. 348~372.  
 (9) Oden, J. T., Duarte, C. A. M. and Zienkiewicz, O. C., 1998, "A New Cloud-based Hp Finite Element Method," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 153, pp. 117~126.  
 (10) Liu, W. K., Uras, R. A. and Chen, Y., 1998, "Enrichment of the Finite Element Method with the Reproducing Kernel Particle Method," *J. Appl. Mech. ASME*, Vol. 64, pp. 861~870.  
 (11) Yeon Jeoung-Heum, Youn Sung-Kie, 2004, "Meshfree Analysis of Elasto-Plastic Deformation Using Variational Multiscale Method," *Trans. of KSME A*, Vol. 28, No. 8, pp. 1196~1202.  
 (12) Park Sang-Hoon, Kwon Kie-Chan, Youn Sung-Kie, 2002, "A Study on the Adaptive Scheme Using Least-Squares Meshfree Method," *Trans. of KSME A*, Vol. 26, No. 9, pp. 1849~1858.  
 (13) Belytschko, T., Krongauz, Y., Organ, D., Fleming, M. and Krysl, P., 1996, "Meshless Methods: An Overview and Recent Developments," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 139, pp. 3~47.  
 (14) Dolbow, J. and Belytschko, T., 1999, "Numerical integration of the Galerkin weak form in meshless methods," *Comput. Mech.*, Vol. 23, pp. 219~230.  
 (15) Song Taehan, Seog Byungho, Lim Jangkeun, 2001, "Improvement Scheme of Nodal Integration in Meshless Method)," *Trans. of KSME A*, Vol. 25, No. 9, pp. 1376~1383.  
 (16) Cho, J. Y. and Jee, Y. B., 2003, "An Adaptive Mesh-independent Numerical Integration for Meshless Local Petrov-Galerkin Method," *KSME International Journal*, Vol. 17, pp. 986~998.  
 (17) Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N., 1970, *Theory of Elasticity*. 3<sup>rd</sup> Edn. McGraw-Hill, New York.