

## 일정체적 고정-회전 기둥의 동적안정 해석

### Dynamic Stability Analysis of Clamped-Hinged Columns with Constant Volume

이 병 구\* · 김 석 기\*

Byoung Koo Lee and Suk Ki Kim

(2006년 8월 22일 접수 ; 2006년 9월 12일 심사완료)

Key Words : Natural Frequency(고유진동수), Buckling Load(좌굴하중), Clamped-Hinged Column(고정-회전 기둥), Constant Volume(일정체적), Dynamic Stability Region(동적 안정영역)

#### ABSTRACT

This paper deals with the dynamic stability analysis of clamped-hinged columns with constant volume. Numerical methods are developed for solving natural frequencies and buckling loads of such columns, subjected to an axial compressive load. The parabolic taper with the regular polygon cross-section is considered, whose material volume and column length are always held constant. Differential equations governing both free vibrations and buckled shapes of such columns are derived. The Runge-Kutta method is used to integrate the differential equations, and the Regula-Falsi method is used to determine natural frequencies and buckling loads, respectively. The numerical methods developed herein for computing natural frequencies and buckling loads are found to be efficient and robust. From the numerical results, dynamic stability regions, dynamic optimal shapes and configurations of strongest columns are reported in figures and tables.

#### 1. 서 론

기둥은 보, 평판, 곡선 부재 등과 더불어 가장 기본적인 구조단위 중에 하나이므로 토목, 건축, 기계 등 각종 구조공학 분야에서 뼈대구조로 이용되고 있다<sup>(1)</sup>.

기둥 문제에서 자유진동의 해석은 기둥의 동적 안정문제에서 매우 중요한 연구과제이다. 기둥에 동하중이 작용하는 경우에 기둥의 정확한 고유진동수 및 진동형의 산정은 기둥 설계 및 보수·보강에 매우 유용한 자료로 이용될 수 있다. 이러한 관점에서 기둥의 자유진동해석은 구조공학에서 전통적으로 매우 중요한 연구 분야 중에 하나이다. 구조물의 고유진

동수 및 진동형은 단면 및 변단면 형상 등이 매우 큰 영향을 미친다<sup>(2)</sup>. 기둥의 적절한 단면 및 적절한 변단면의 채택은 최적설계의 개념에서 고유진동수를 증진시킬 수 있는 합리적인 방법이다<sup>(3)</sup>.

이러한 문제와 관련된 문헌들을 개략적으로 고찰하면 다음과 같다. Niordson<sup>(4)</sup>은 자유진동하는 동적 최적보에 관하여 연구하였다. Kamat와 Simites<sup>(5,6)</sup>는 유한요소 변위법에 의하여 동적 최적보의 고유진동수를 산출하였으며, 전단변형과 회전관성이 동적 최적보의 고유진동수에 미치는 영향을 고찰하였다. Sankaran과 Rao<sup>(7)</sup>는 변단면 캔틸레버 기둥의 동요 임계하중을 산정하였다. Perderson<sup>(8)</sup>은 자유단에 스프링 및 집중질량을 갖는 캔틸레버 기둥의 동적 안정성에 관하여 연구하였다. Gupta<sup>(9)</sup>는 선형 변단면 보의 고유진동수를 산출하였다. Bokaiian<sup>(10)</sup>은 압축하중이 작용하는 기둥의 고유진동수를 산정하였

\* 책임저자; 정회원, 원광대학교 토목환경공학과  
E-mail : bkleeest@wku.ac.kr

Tel : (063)850-6718, Fax : (063)857-7204

\* 단국대학교 공과대학 토목환경공학전공

다. Sato<sup>(11)</sup>는 자유단에 집중질량을 갖고 중동력이 작용하는 Timoshenko 보의 동적 불안정성을 연구하였다. Ryu 등<sup>(12)</sup>은 탄성지반으로 지지된 불균일 테이퍼진 보의 진동과 안정성에 대하여 연구하였다.

일정체적과 일정길이를 갖는 기둥은 무수히 많이 존재할 수 있다. 이러한 기둥들 중에서 가장 큰 고유진동수와 가장 큰 좌굴하중을 갖는 기둥을 찾는 문제는 최적 설계의 개념에서 매우 중요한 연구과제이다. 이러한 연구배경으로 이 논문은 압축하중이 작용하는 일정체적 고정-회전 기둥의 동적 안정영역을 해석하는데 연구목적이 있다. 대상기둥은 단면이 정다각형이고 길이와 체적이 일정하며, 단면깊이가 포물선 함수로 변화하는 변단면을 채택하였다. 기둥의 재료는 선형탄성체이고, 기둥의 미소요소에 작용하는 합응력 및 관성력의 동적 평형방정식을 이용하여 기둥의 자유진동 및 좌굴기둥의 탄성곡선을 지배하는 미분방정식을 유도하였다. 미분방정식의 수치적분은 Runge-Kutta법을 이용하고, 미분방정식의 고유치인 고유진동수 및 좌굴하중은 Regula-Falsi법을 이용하여 산출하였다. 단면비, 정다각형의 변수 및 압축하중의 변화에 따른 고유진동수를 산출하고 이를 이용하여 하중단계별 동적 안정영역을 산출하였다. 하중-고유진동수의 관계를 이용하여 대상기둥의 정적 좌굴하중을 산정하고 이 결과를 이용하여 정적 최강기둥의 단면비를 산출하였다.

## 2. 대상기둥의 정의

Fig. 1은 직교좌표계  $(x, h)$ 에 그린 체적  $V$ 와 길이  $l$ 이 모두 일정한 기둥의 정면도를 나타낸다. 기둥의 하단은 고정지점이고 상단은 회전지점이다. 기둥의 단면은 변수가  $k$ 인 정다각형이다. 여기서  $x$ 는 기둥의 축방향 좌표,  $h$ 는 단면깊이다. 단면깊이  $h$ 는 정다각형의 도심에서 꼭짓점까지 거리이며, 축방향 길이  $x$ 에 따라서 변화하기 때문에 정다각형 단면의 단면적  $A$  및 단면2차모멘트  $I$ 도  $x$ 에 따라서 변화한다. 기둥의  $x=0$ 에서  $h=h_c$ 이고  $x=l$ 에서  $h=h_h$ 이다.

기둥의 기하적 형상을 정의하기 위하여 단면비  $\alpha$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\alpha = h_h / h_c \quad (1)$$

단면깊이가  $h$ 이고 변수가  $k$ 인 정다각형 단면의  $A$  및  $I$ 는 다음과 같다.

$$A = c_1 h^2 \quad (2)$$

$$I = c_2 h^4 \quad (3)$$

$$c_1 = k \sin(\pi/k) \cos(\pi/k) \quad (4.1)$$

$$c_2 = (k/12) \sin(\pi/k) \cos^3(\pi/k) \times [3 + \tan^2(\pi/k)] \quad (4.2)$$

위 식에서  $k$ 가  $\infty$ 로 수렴하면  $c_1$ 과  $c_2$ 는 각각 원형 단면의  $\pi$ 와  $\pi/4$ 로 수렴한다.

이제 단면깊이  $h$ 의 변화를 함수식으로 정의한다.  $h$ 의 함수식으로는 모든 함수식이 가능하지만 이 연구에서는 포물선 식으로 채택하였다. 여러 문헌에서 포물선 변단면은 직선 및 정현 변단면에 비하여 내하력 면에서 유리한 변단면임이 입증되었다<sup>(13,14)</sup>.

Fig. 1에서 함수식  $h$ 는 직교좌표계  $(x, h)$ 에서  $(0, h_c)$ ,  $(l, \alpha h_c)$ 를 통과하므로 포물선 식은 다음과 같이 결정된다.

$$h = h_c [c_3(x/l)^2 + 1] \quad (5.1)$$

$$c_3 = \alpha - 1 \quad (5.2)$$

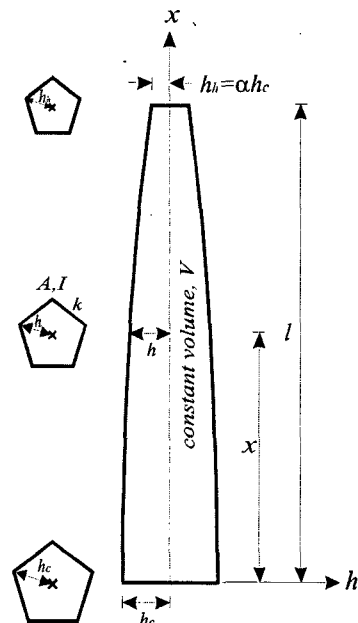


Fig. 1 Object column and its variables

위에서 정의된 기둥의 체적  $V$ 를 식 (2), (5)를 이용하여 산정하면 다음과 같다.

$$V = \int_0^l A dx = c_1 c_4 h_c^2 l \quad (6.1)$$

$$c_4 = (3\alpha^2 + 4\alpha + 8)/15 \quad (6.2)$$

### 3. 지배미분방정식

#### 3.1 변수정의

Fig. 2는 압축하중  $P$ 를 받고 있는 대상기둥을 나타낸다. 기둥은 고정 및 회전지점으로 지지되어 있다. 점선은 정적 상태의 기둥축이고, 실선은 자유진동하는 기둥의 진동형을 나타낸다. 진동형은 고정단을 원점으로 하는 직교좌표계  $(x, y)$ 로 정의된다.

기둥의 자유진동을 조화진동으로 가정하면 변위의 조화진동식  $\bar{y}(x, t)$ 는 다음과 같다.

$$\bar{y}(x, t) = y(x) \sin(\omega_i t) \quad (7)$$

여기서  $y(x)$ 는 자유진동의 진폭으로  $x$ 만의 함수이고,  $\omega_i$ 는 고유진동수,  $i(i=1, 2, 3, 4, \dots)$ 는 모드 번호이고  $t$ 는 시간이다.

#### 3.2 지배미분방정식

식 (7)의 조화진동식으로 표현되는 변단면 기둥의 자유진동을 지배하는 미분방정식은 다음과 같다<sup>(14)</sup>.

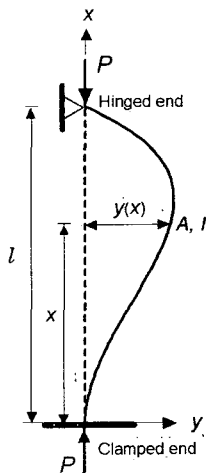


Fig. 2 Typical mode shape

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + 2EI \frac{dI}{dx} \frac{d^3 y}{dx^3} + (E \frac{d^2 I}{dx^2} + P) \frac{d^2 y}{dx^2} - \rho A \omega^2 y = 0 \quad (8)$$

위 식에서  $y = y(x)$ 이고  $E$ 는 탄성계수,  $\rho$ 는 질량 밀도이다.

식 (3)으로부터 식 (8)에 포함되어 있는  $dI/dx$ ,  $d^2 I/dx^2$ 을 구하면 다음과 같다.

$$\frac{dI}{dx} = 4c_2 h_c^2 \frac{dh}{dx} \quad (9.1)$$

$$\frac{d^2 I}{dx^2} = 12c_2 h_c^2 \left(\frac{dh}{dx}\right)^2 + 4c_2 h_c^3 \frac{d^2 h}{dx^2} \quad (9.2)$$

식 (5)로부터 식 (9.1), (9.2)에 포함되어 있는  $dh/dx$ ,  $d^2 h/dx^2$ 을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{dh}{dx} = \frac{2c_3 h_c}{l} \left(\frac{x}{l}\right) \quad (10.1)$$

$$\frac{d^2 h}{dx^2} = \frac{2c_3 h_c}{l^2} \quad (10.2)$$

식 (6.1)로부터 식 (10.1), (10.2)에 포함되어 있는 고정단의 단면적이  $h_c$ 를 일정체적  $V$ 와 일정길이  $l$ 로 나타내면 다음과 같다.

$$h_c = \left(\frac{V}{c_1 c_4 l}\right)^{1/2} \quad (11)$$

지배미분방정식을 무차원으로 유도하기 위하여 다음의 무차원 변수를 도입한다.

$$\xi = x/l \quad (12)$$

$$\eta = y/l \quad (13)$$

$$p = Pl^4/(EV^2) \quad (14)$$

$$C_i = \omega_i l^2 \sqrt{\rho l/(EV)} \quad (15)$$

위에서  $(\xi, \eta)$ 는 직교좌표계  $(x, y)$ 를 기둥길이  $l$ 로 정규화한 무차원량이고,  $p$ 는 무차원 하중,  $C_i$ 는 무차원 고유진동수이다.

자유진동을 지배하는 미분방정식을 무차원으로 유도하기 위하여 식 (8)에 포함되어 있는 미분항  $d^2 y/dx^2$ ,  $d^3 y/dx^3$ ,  $d^4 y/dx^4$ 을 식 (12), (13)을 이용하여 다음과 같이 무차원 미분항으로 변수변환한다.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(h)}{d(l\xi)} = \frac{d\eta}{d\xi} \quad (16.1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{1}{l} \frac{d^2\eta}{d\xi^2} \quad (16.2)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{l^2} \frac{d^3\eta}{d\xi^3} \quad (16.3)$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{1}{l^3} \frac{d^4\eta}{d\xi^4} \quad (16.4)$$

이제 식 (8)에  $A$ 는 식 (2)를,  $I, dI/dx, d^2I/dx^2$ 는 식 (3), (9.1), (9.2)를 대입한다. 이때  $h, dh/dx, d^2h/dx^2, h_c$ 는 식 (5), (10.1), (10.2), (11)에 정의되어 있다. 정리된 식에  $d^2y/dx^2, d^3y/dx^3, d^4y/dx^4$ 으로 식 (16.2)~(16.4)를 대입하고 무차원 변수식 (12)~(15)를 이용하면 일정체적 기둥의 자유진동을 지배하는 무차원 미분방정식을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\frac{d^4\eta}{d\xi^4} = a_1 \frac{d^3\eta}{d\xi^3} + (a_2 + a_3 b) \frac{d^2\eta}{d\xi^2} + a_4 C_i \eta \quad (17)$$

위 식에서  $a_1 \sim a_4$ 는 다음과 같다.

$$a_1 = -16 c_3 \xi / j \quad (18.1)$$

$$a_2 = -48 c_3^2 \xi^2 / j^2 - 8 c_3 / j \quad (18.2)$$

$$a_3 = -c_1^2 c_4^2 / (c_2 j^4) \quad (18.3)$$

$$a_4 = c_1^2 c_4 / (c_2 j^2) \quad (18.4)$$

$$j = c_3 \xi^2 + 1 \quad (18.5)$$

압축하중  $P$ 가 증가하면 기둥의 고유진동수  $\omega_i$ 는 감소한다. 하중  $P$ 가 증가하여 좌굴하중  $B$ 에 도달하면  $\omega_i=0$ 이 되고 기둥은 좌굴한다<sup>(14)</sup>. 식 (17)의 자유진동을 지배하는 미분방정식에  $C_i=0$ 을 대입하고  $p=b$ 로 대체하면 다음과 같은 기둥의 좌굴형을 지배하는 무차원 미분방정식을 유도할 수 있다.

$$\frac{d^4\eta}{d\xi^4} = a_1 \frac{d^3\eta}{d\xi^3} + (a_2 + a_3 b) \frac{d^2\eta}{d\xi^2} \quad (19)$$

위 식에서  $b$ 는 무차원 좌굴하중이며 식 (14)를 이용하면 다음과 같이 정의된다.

$$b = Bl^4 / (EV^2) \quad (20)$$

### 3.3 경계조건

기둥의 고정단  $x=0$ 에서 변위  $y=0$ , 회전각  $dy/dx=0$ 이다. 식 (12), (13)을 이용하면 고정단  $\xi=0$ 에서 무차원 경계조건을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\eta = 0, \xi = 0 \text{에서} \quad (21)$$

$$\frac{d\eta}{d\xi} = 0, \xi = 0 \text{에서} \quad (22)$$

기둥의 회전단  $x=l$ 에서 변위  $y=0$ , 휨모멘트  $EId^2y/dx^2=0$ 이다. 식 (12), (13)을 이용하면 회전단  $\xi=1$ 에서 무차원 경계조건을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\eta = 0, \xi = 1 \text{에서} \quad (23)$$

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = 0, \xi = 1 \text{에서} \quad (24)$$

위의 경계조건은 식 (17)의 자유진동 문제 및 식 (19)의 좌굴하중 문제에 모두 유효하다.

## 4. 수치해석 예 및 토의

이상에서 유도한 지배미분방정식에 적당한 수치해석 방법을 도입하면 무차원 고유진동수  $C_i$ , 진동형  $(\xi, \eta)$  및 무차원 좌굴하중  $b$ 를 산출할 수 있다. 이를 위하여 미분방정식의 수치적분은 Runge-Kutta법<sup>(15)</sup>을 이용하였고 미분방정식에 포함되어 있는 고유치  $C_i$  및  $b$ 의 산출은 Regula-Falsi법<sup>(15)</sup>을 이용하였다. 이와 같은 수치해석 방법은 이미 여러 문헌에서 그 타당성이 입증된 바 있다<sup>(13,14,16)</sup>.

수치해석 예를 실행하기 전에 수렴해석을 실시하여 Runge-Kutta법에서 필요한 적당한 단계길이  $\Delta\xi$ 를 산정하여야 한다. Fig. 3에  $C_i (i=1)$  및  $b$ 에 대한 수렴해석 결과를 나타내었다. 이 그림의 상단에 수치해석에 이용한 기둥제원을 표시하였다. 이후의 모든 그림에서도 그림의 상단에 수치해석에 이용한 기둥제원을 표시하였다.  $1/\Delta\xi$ 이 20이상이면 즉  $\Delta\xi = 1/20$ 이하이면  $C_1, b$ 는 충분한 정도로 수렴하였다. 이 논문에서는 수치해의 정도를 강화하기 위하여 이후의 모든 수치해는  $1/\Delta\xi = 50$ 을 이용하였으며 이 경우에 수치해는 유효숫자 3자리의 정도

를 가졌다.

Fig. 4는 축하중이 작용하지 않는 경우( $p=0$ )에 단면비  $\alpha$ 와 제 1고유진동수  $C_1(i=1)$ 사이의 관계를 나타낸 그림이다.  $C_1$  값은  $k$  값이 작을수록 즉 정다각형의 변수가 작을수록 크다.  $\alpha$  값이 증가하면  $C_1$  값은 증가하다  $\bigcirc$ 에서 최대치를 보인 후에 감소한다. 따라서  $\bigcirc$ 으로 표시한 좌표의  $(\alpha, C_1)$  값이 동적 최적단면의 최적단면비  $\alpha_{opt}$  및 최적고유진동수  $C_{opt}$ 이다. 여기서 동적 최적단면은 일정체적을 갖는 기둥에서 가장 큰 제 1고유진동수를 갖는 단면으로 정의된다<sup>(4)</sup>.  $\alpha_{opt}$ 는  $k$  값에 상관없이  $\alpha_{opt} = 0.572$ 로 모두 일정하다. 정삼각형( $k=3$ ) 단면 기둥의  $C_{opt} = 4.98$ 이고 원형 단면 기둥의  $C_{opt} = 4.53$ 이며 그 비율이  $4.98/4.53 = 1.10$ 으로 정삼각형 단면 기둥이 원형 단면 기둥 보다 최적 고유진동수가 10% 더 크다.

Fig. 5는 정삼각형( $k=3$ ) 단면 기둥의 하중단계별( $p=0, 0.2, 0.4, \dots, 1.9$ )  $\alpha-C_1$  곡선을 나타낸다. 하중  $p$ 의 크기가 클수록 하중단계별  $\alpha-C_1$  곡선은 아래쪽에 위치한다. 즉,  $p$  값이 증가하면  $C_1$  값은 감소한다. Fig. 4와 마찬가지로 하중이 작용하는 경우에도  $\alpha$  값이 증가하면  $C_1$  값은 증가하다  $\bigcirc$ 에서 최대치를 보인 후에 감소한다. 따라서  $\bigcirc$ 으로 표시한 좌표의  $(\alpha, C_1)$  값이 동적 최적단면 기둥의  $\alpha_{opt}$  및  $C_{opt}$ 이다. 예로서  $p=1.6$ 일 때  $\alpha_{opt} =$

$0.912$ ,  $C_{opt} = 2.07$ 이며  $C_1$  값은 2.07이상 존재할 수 없다. 각각의 하중단계별  $\alpha-C_1$  곡선은  $\alpha$  값의 일정 범위 즉, 동적 안정영역의 범위 내에서 존재한다. 예로서  $p=1.6$ 일 때  $\alpha-C_1$  곡선은  $\triangle$ 로 표시한  $\alpha_{min} = 0.561$ 과  $\square$ 로 표시한  $\alpha_{max} = 1.586$  사이의  $\alpha$  값에서만 존재한다.  $p=1.6$ 의 하중이 작용할 때 이 범위 밖의  $\alpha$  값을 갖는 기둥은 동적으로 불안정하고 이 범위 안의  $\alpha$  값을 갖는 기둥은 동적으로 안정하다. 따라서  $p=1.6$ 의 하중을 받는 기둥의 동적 안정영역은  $0.561 < \alpha < 1.586$ 이다.  $p$ 가 증

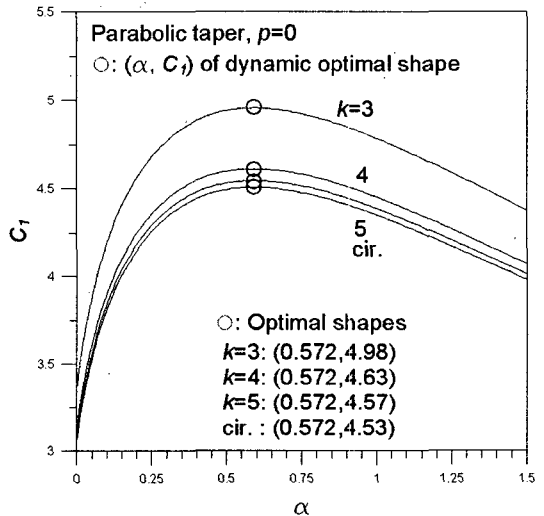


Fig. 4  $\alpha$  versus  $C_1$  curves by  $k$

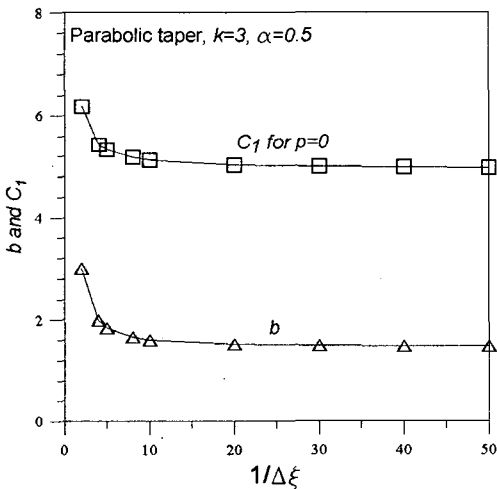


Fig. 3 Convergence analysis

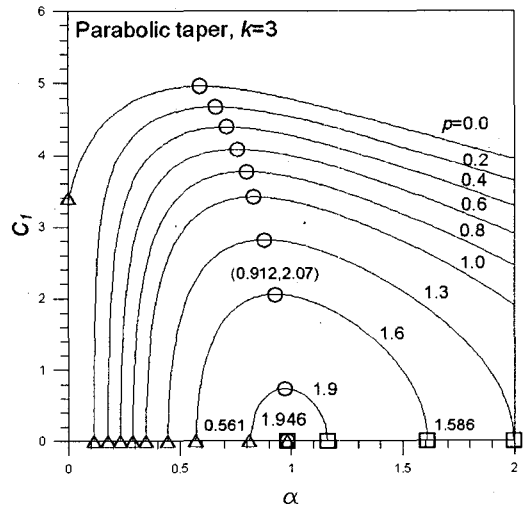


Fig. 5  $\alpha$  versus  $C_1$  curves by load step

가하여  $p=1.946$ 이 되면  $\Delta$ ,  $\square$ ,  $\circ$ 는 모두 ( $\alpha_{opt}=0.960, C_{opt}=0$ )의 한 점에서 만난다. 즉 정삼각형( $k=3$ ) 단면 기둥은  $p=1.946$ 이 지지할 수 있는 최대하중이다.

Table 1에  $k=3, 4, 5$ , 원형 단면 기둥의 하중단 계별 안정영역 및 최적단면 기둥의 ( $\alpha_{opt}, C_{opt}$ )를 수록하였다. 이 표의 하단에 기둥이 지지할 수 있는 최대하중을 기록하였다. 이 하중은 후술할 최강기둥의 좌굴하중과 일치한다. 이 표는 동하중이 작용 하는 기둥설계에 매우 유용하게 이용될 수 있다.

Fig. 6은  $\alpha=0.3$ 의  $p-C_1$  곡선을 나타낸다.  $k$

값이 작을수록  $C_1$  값은 더 크고,  $p-C_1$  곡선은  $p$  값이 증가하면  $C_1$  값은 감소한다.  $C_1=0$ 가 되는  $\square$ 로 표시된  $p$  축의  $p$  값이 무차원 좌굴하중  $b$ 가 된다. 이 그림에  $k$  별  $b$  값을 표시하였다. 예로서 정삼각형( $k=3$ ) 단면 기둥의  $b=0.839$ 이며  $p=0.839$ 이상의 하중을 지지할 수 없다.

Fig. 7(a), (b)는 정삼각형( $k=3$ ) 단면 기둥의 진동형을 나타낸다. 이 진동형으로부터 단면비  $\alpha$ , 하중  $p$ 의 크기에 따라서 최대진폭의 위치가 달라지는 것을 알 수 있다.

Fig. 8은  $\alpha-b$  곡선을 나타낸다.  $k$  값이 작을수록

Table 1 Stability region and ( $\alpha_{opt}, C_{opt}$ ) by load step

· Regular triangular cross-section ( $k=3$ )

$p$	Stability region		Optimal shape	
	$\alpha_{min} (\Delta)$	$\alpha_{max} (\square)$	$\alpha_{opt}$	$C_{opt}$
0.0	0.000	-	0.572	4.98
0.2	0.106	-	0.636	4.70
0.4	0.172	-	0.690	4.41
0.6	0.226	-	0.736	4.10
0.8	0.281	-	0.778	3.78
1.0	0.339	-	0.815	3.43
1.3	0.435	1.967	0.866	2.83
1.6	0.561	1.586	0.912	2.07
1.9	0.799	1.148	0.954	0.76
1.946	0.960	0.960	0.960	0.00

· Regular rectangular cross-section ( $k=4$ )

$p$	Stability region		Optimal shape	
	$\alpha_{min} (\Delta)$	$\alpha_{max} (\square)$	$\alpha_{opt}$	$C_{opt}$
0.0	0.000	-	0.572	4.63
0.2	0.117	-	0.645	4.33
0.4	0.187	-	0.705	4.02
0.6	0.251	-	0.756	3.68
0.8	0.316	-	0.801	3.32
1.0	0.386	-	0.842	2.91
1.2	0.467	1.855	0.880	2.45
1.4	0.569	1.565	0.914	1.88
1.6	0.732	1.247	0.940	1.03
1.685	0.960	0.960	0.960	0.00

· Regular pentagonal cross-section ( $k=5$ )

$p$	Stability region		Optimal shape	
	$\alpha_{min} (\Delta)$	$\alpha_{max} (\square)$	$\alpha_{opt}$	$C_{opt}$
0.0	0.000	-	0.572	4.57
0.2	0.119	-	0.646	4.26
0.4	0.191	-	0.708	3.94
0.6	0.257	-	0.760	3.60
0.8	0.324	-	0.807	3.22
1.0	0.395	-	0.848	2.81
1.2	0.483	1.802	0.886	2.32
1.4	0.595	1.504	0.921	1.71
1.6	0.803	1.142	0.954	0.68
1.637	0.960	0.960	0.960	0.00

· Circular cross-section ( $k=\infty$ )

$p$	Stability region		Optimal shape	
	$\alpha_{min} (\Delta)$	$\alpha_{max} (\square)$	$\alpha_{opt}$	$C_{opt}$
0.0	0.000	-	0.572	4.53
0.2	0.121	-	0.648	4.22
0.4	0.193	-	0.710	3.89
0.6	0.260	-	0.763	3.55
0.8	0.329	-	0.810	3.17
1.0	0.404	-	0.851	2.75
1.2	0.493	1.772	0.890	2.25
1.4	0.612	1.468	0.925	1.61
1.6	0.876	1.050	0.958	0.35
1.609	0.960	0.960	0.960	0.00

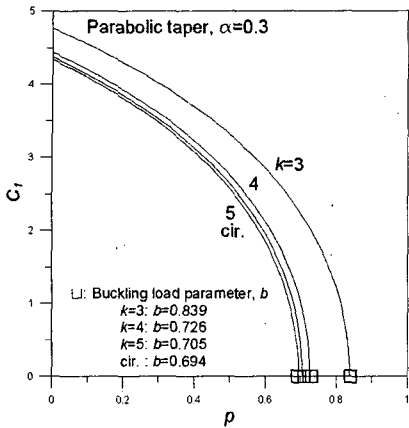


Fig. 6  $p$  versus  $C_1$  curves by  $k$

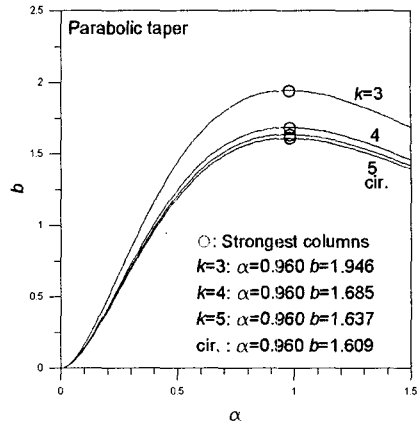


Fig. 8  $\alpha$  versus  $b$  curves by  $k$

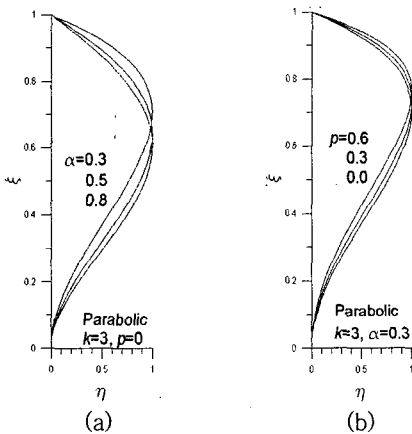


Fig. 7 Mode shapes : (a) by  $\alpha$  and (b) by  $p$

$b$  값은 크다. 따라서 정삼각형 ( $k=3$ ) 단면 기둥이 가장 강인한 단면이다.  $\alpha$  값이 증가하면  $b$  값은 증가하다  $\circ$ 에서 최대치를 보인 후에 감소하며,  $\circ$ 의 좌표 값들이 최강기둥의  $(\alpha, b)$ 가 된다. 여기서 최강 기둥은 일정체적 기둥에서 가장 큰 좌굴하중을 갖는 기둥으로 정의된다<sup>(17)</sup>. 예로서 정삼각형 단면 기둥은  $b=1.946$  이므로  $p=1.946$  이상의 하중을 지지할 수 없고 정삼각형 단면 기둥이 가장 강인한 단면 이므로 결국 일정체적 기둥은  $p=1.946$  이상의 하중을 지지할 수 없다. 이 결과는 Table 1의 하단의 결과와 일치한다.

## 5. 결 론

이 논문은 일정체적 고정-회전 기둥의 동적 안정

해석에 관한 연구이다. 대상기둥은 체적과 길이가 일정하고 단면이 정다각형이며, 단면깊이가 포물선 함수로 변화하는 변단면으로 채택하였다. 이러한 기둥의 자유진동 및 좌굴형을 지배하는 미분방정식을 유도하였다. 수치해를 얻기 위하여 Runge-Kutta법을 사용하여 미분방정식을 수치적분하고, 미분방정식의 고유치인 고유진동수 및 좌굴하중은 Regula-Falsi법을 이용하여 산출하였다.

일정체적 고정-회전 기둥의 동적 안정해석 결과를 분석하여 다음의 결론을 얻었다.

- (1) 수렴해석에서 Runge-Kutta법의 단계길이가  $\Delta\xi=1/20$ 이하이면 제 1무차원 고유진동수  $C_1$  및 무차원 좌굴하중  $b$ 의 수치해는 유효숫자 3자리의 정도로 수렴하였다.
- (2) 정다각형의 변수( $k$ )가 작을수록  $C_1$  및  $b$ 의 값은 커진다.
- (3) 하중단계( $p$ )별로 가장 큰  $C_1$  값인 최적 고유진동수  $C_{opt}$ 를 갖는 동적 최적단면비  $\alpha_{opt}$ 가 반드시 존재한다.
- (4) 삼각형 단면( $k=3$ ),  $p=0$ 일 때  $\alpha_{opt}=0.572$ ,  $C_{opt}=4.98$ 로  $C_1$  값은 4.98 이상의 값이 존재할 수 없다.
- (5) 하중단계( $p$ )별로 기둥이 동적으로 안정한 단면비  $\alpha$ 의 영역 즉 동적 안정영역이 반드시 존재한다.
- (6) 단면비  $\alpha$ , 무차원 하중  $p$ 의 크기에 따라서 진동형의 최대진폭의 위치가 달라진다.
- (7) 정적 최강기둥은 정삼각형 ( $k=3$ ) 단면이며

최강기둥의  $\alpha=0.960$ ,  $b=1.946$ 으로  $p=1.946$ 이 상의 하중을 지지할 수 없다.

### 참 고 문 헌

- (1) Lee, B. K., Oh, S. J., Lee, T. E. and Kang, H. J., 2005, "Stability Analysis of Tapered Beck's Column with a tip Mass and an Elastic Spring at Free End", Journal of the Korean Society of Civil Engineers, Vol. 25, No. 6A, pp. 1157~1162.
- (2) Timoshenko, S. P., Young, D. H. and Weaver, W., 1974, Vibration Problems in Engineering, John Wiley & Sons, USA.
- (3) Haftka, R. T., Grudal, Z. and Kamat, M. P., 1990, Element of Structural Optimization, Kluwer Academic Publisher.
- (4) Niordson, F. I., 1965, "On the Optimal Design of a Vibrating Beam", Quarterly Applied Mechanics, Vol. 23, pp. 47~53.
- (5) Kamat, M. P. and Simites, G. J., 1973, "Optimal Beam Frequencies by the Finite Element Displacement Method", International Journal of Solids and Structures, Vol. 9, pp. 415~419.
- (6) Kamat, M. P. and Simites, G. J., 1975, "Effect of Shear Deformation and Rotatory Inertia on Optimal Beam Frequencies", International Journal of Numerical Methods in Engineering, Vol. 9, pp. 51~62.
- (7) Sankaran, G. V. and Rao, G. V., 1976, "Stability of Tapered Cantilever Columns Subjected to Follower Forces", Computers & Structures, Vol. 6, pp. 217~220.
- (8) Pedersen, P., 1977, "Inference of Boundary Conditions on the Stability of a Column under Non-conservative Load", International Journal of Solids and Structures, Vol. 13, pp. 445~455.
- (9) Kupta, A. K., 1985, "Vibration of Tapered Beams", Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 113, pp. 1244~1247.
- (10) Bokaian, A., 1988, "Natural Frequencies of Beams under Compressive Axial Load", Journal of Sound and Vibration, Vol. 126, pp. 49~65.
- (11) Sato, K., 1996, "Instability of a Clamped-elastically Restrained Timoshenko Columns Carrying a Tip Load Subjected to a Follower Force", Journal of Sound and Vibration, Vol. 194, pp. 623~630.
- (12) Ryu, B. J., Yim, K. B., Lee, J. W. and Han, J. S., 1999, "Vibration and Stability of Non-uniform Tapered Beams Resting on a Two-layered Elastic Foundation", Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 9, No. 4, pp. 828~834.
- (13) Lee, B. K. and Oh, S. J., 2000, "Elasticas and Buckling Loads of Simple Tapered Columns with Constant Volume," International Journal of Solids and Structures, Vol. 37, pp. 2507~2518.
- (14) Lee, B. K., Carr, A. J., Lee, T. E. and Kim, I. J., 2006, "Buckling Loads of Columns with Constant Volume, Journal of Sound and Vibration, Vol. 294, pp. 381~387.
- (15) Carnahan, B., Luther, H. A. and Wilkes, J. O., 1969, "Applied Numerical Method", John Wiley & Sons, USA.
- (16) Lee, B. K., Carr, A. J., Lee, T. E. and Ahn, D. S., 2005, "Elasticas and Buckling Loads of Shear Deformable Tapered Columns", International Journal of Structural Stability and Dynamics, Vol. 5, No. 3, pp. 317~335.
- (17) Taylor, J. E., 1987, "The Strongest Column- An Energy Approach", Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol. 29, pp. 159~164.