한국소음진동공학회논문집 제 16 권 제 11 호, pp. 1158~1164, 2006.

가속도계를 이용한 재료의 영계수 측정방법

Measuring Young's Modulus of Materials by Using Accelerometer

손 창 호* · 최 영 철† · 박 진 호* · 윤 두 병* · 정 의 필**

Chang-Ho Sohn, Young-Chul Choi, Jin-Ho Park, Doo-Byung Yoon and Ui-Pil Chong

(2006년 9월 11일 접수 ; 2006년 10월 16일 심사완료)

Key Words : Young's Modulus(영계수), 군속도(Group Velocity), Wigner-Ville Analysis(위그너-빌 해석), Time Frequency Analysis(시간-주파수 분석)

ABSTRACT

For the description of the elastic properties of linear objects a convenient parameter is the ratio of the stress to the strain, a parameter called the Young's modulus of the material. Young's modulus can be used to predict the elongation or compression of an object as long as the stress is less than the yield strength of the material. Conventional method for estimating Young's modulus measured the ratio of stress to corresponding strain below the proportional limit of a material using a tensile testing machine. But the method needs precision specimens and expensive equipment. In this paper, we proposed method for estimating Young's modulus using accelerometer. The basic idea comes from that the wave velocity is different as the Young's modulus. To obtain Young's modulus, a group velocity is obtained. It is difficult to measure group velocity. This is because plate medium has a dispersive characteristics which has different wave speed as frequency. In this paper, we used Wigner-Ville distribution to measure group velocity. To verify the proposed method, steel and acryl plate experiments have been performed. Experimental results show that the proposed method is powerful for estimating Young's modulus.

기 호 설 명

h = 두께
ρ = 밀도
E = 영계수(Young's modulus)
C_l = 종파속도
C_{ph} = 위상속도
C_g = 군속도
k = 파수
ν = 푸아송비(Poisson's ratio)
f = 주파수
ω = 각주파수($=2\pi f$)
G = 횡탄성 계수
Δt = 두 센서사이의 시간 도달 차이
$R(t,\tau)$ = 시간 종속 자기 상관 함수
$z(t)$ = 해석 신호

† 책임저자; 정회원, 한국원자력연구소 기계공학연구부
E-mail : cyc@kaeri.re.kr
TEL : (042)868-4870, Fax : (042)868-3813
* 삼창기업
** 정회원, 한국원자력연구소 기계공학연구부
*** 정회원, 울산대학교 컴퓨터정보통신공학부

1. 서 론

영계수란 고체 탄성률의 하나로써 굵기가 고른 막대의 한끝을 고정시키고 다른 쪽 끝을 잡아당기거나 밀 때에 막대의 단면에 단위 면적당 작용하는 힘의

크기는 막대의 단위 길이당 늘어나는 양이나 줄어드는 양에 비례하는데, 이 비례상수를 말한다[1].

영계수를 측정하는 기존의 방법은 앞서 설명하였듯이 굵기가 고른 시편을 제작한 다음 인장시험기에서 측정하게 된다. 하지만 재질을 알 수 없는 구조물일 경우에는 시편을 떼어 내어 가공을 해야 하며, 또한 값 비싼 인장시험기가 있어야 된다는 어려움이 있다.

이 논문에서는 평판형 구조물에서 시편을 떼어내지 않고 간단히 가속도계만을 이용하여 충격파의 군속도(group velocity)를 측정함으로써 재질의 물성치인 영계수를 측정하는 방법을 제안한다.

매질에서 군속도는 두께 및 형상에 따라 달라지만, 또한 매질의 특성에 따라서도 파의 전파속도가 달라진다. 따라서 평판 구조물의 형상을 알 경우 파의 전파 속도를 측정한다면 평판 구조물의 재질 특성을 예측할 수 있다.

평판 매질일 경우 주파수에 따라 파의 전파 속도가 다른 분산 특성을 가지고 있기 때문에 시간영역에서 바로 군속도를 측정하는 것은 어렵다. 이 연구에서 시간-주파수 기법 중에서 분해능이 우수한 위그너-빌 분포를 이용하여 시간-주파수 영역에서 군속도를 측정함으로써 영계수를 측정하는 방법에 대해 살펴보기로 한다.

2. 기본이론

구조물에 충격이 발생하면 파(wave)가 전파하게 되는데, 이때 재질의 특성에 따라 파의 전파 속도가 달라진다. 예를 들어 단단한 물질일수록 파의 전파 속도가 빨라지고, 무른 재질일수록 느려지는 특성이 있다. 따라서 이러한 특성을 이용한다면 파의 전파 속도를 측정함으로써 재질의 물성치를 예측할 수 있음을 쉽게 알 수 있다. 이 장에서는 평판에 대해 파의 전파 속도와 재질의 물성치인 영계수와 관계를 이론적으로 살펴보고, 영계수를 찾는 방법에 대해 살펴보기로 한다.

2.1 평판에서 군속도 영계수와의 관계[2]

Fig. 1과 같이 두께가 일정하고, 재질이 균일한 평판에서 충격이 발생하면 판파(lamb wave)가 발생한다. 판파의 전파속도는 강체의 재질, 두께 및 주파수와 관련되며 Rayleigh-Lamb 방정식[3]에 의하여 해석적으로 구할 수 있다. 이때 굽힘파(A_0 파)의 전파속도는 다음의 관계식으로부터 구할 수 있다.

$$\frac{\tan(\sqrt{1-\varsigma^2}\cdot kh)}{\tan(\sqrt{\xi^2-\varsigma^2}\cdot kh)} = -\frac{(2\varsigma^2-1)^2}{4\varsigma^2\sqrt{1-\varsigma^2}\sqrt{\xi^2-\varsigma^2}} \tag{1}$$

여기서,

$$\varsigma \equiv \frac{C_t}{C_{ph}}, \quad \xi \equiv \frac{C_t}{C_l}$$

$$C_l \equiv \sqrt{\frac{E}{\rho}\times\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}}, \; C_t \equiv \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

이다. 식 (1)은 완전해로서 직접적으로 풀기는 어려우나 수치해석을 통하여 주파수별 파동전파 속도를 구할 수 있다. Ross(1987)는 위의 해석적 결과와 근사하면서도 매우 간편한 수식을 소개하였다[4]. 즉,

$$C_{ph} = C_L' \cdot \sqrt{\frac{1.8\cdot h\cdot f}{C_L' + 4.5\cdot h\cdot f}} \tag{2}$$

여기서

$$C_L' = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} \tag{3}$$

이다.

충격으로 인하여 두 개 이상의 굽힘파 성분이 동시에 전파하는 경우에는 굽힘파들의 조합으로 인하여 포락선(envelope) 분포가 나타나며 이러한 포락선이 이동하는 속도를 군속도(group velocity), 즉 파동 에너지의 전파속도를 나타낸다[3]. 이때 군속도의 정의는 다음과 같다.

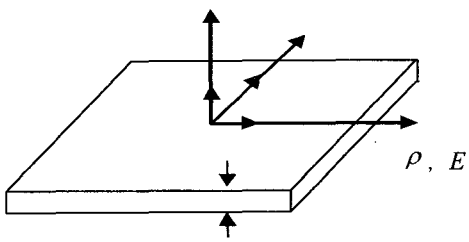


Fig. 1 Plate model. Where h is a thickness, ρ is a density, and E is Young's modulus

$$C_g \equiv \frac{d\omega}{dk} = d\omega\left[d\left(\frac{\omega}{C_{ph}}\right)\right]^{-1} = C_{ph}^{\ 2}\cdot\left[C_{ph} - \omega\cdot\frac{dC_{ph}}{d(\omega)}\right]^{-1} \tag{4}$$

군속도에 대한 완전해는 식 (1)로부터 위상속도 (C_{ph})를 수치적으로 구하여 식 (4)를 적용하여 구할 수 있다. 그리고 Ross(1987)의 근사해를 이용한 군속도는 식 (2) 및 식 (4)로부터

$$C_g = \frac{3.6\cdot hf\cdot C_L^{'\,2}}{C_{ph}\cdot(C_L^{'} + 9hf)} \tag{5}$$

로 얻어진다.

한편, 굽힘파의 파장이 평판의 두께보다 매우 큰 얇은 평판의 경우 또는 저주파 영역의 경우 ($kh<1$)에서 위상속도와 군속도는 다음과 같이 간단하게 나타낼 수 있다[3,4].

$$C_{ph} \cong \sqrt{\omega}\left(\frac{D}{\rho h}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{6}$$

$$C_g \cong 2\cdot\sqrt{\omega}\left(\frac{D}{\rho h}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{7}$$

여기서, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$이기 때문에 식 (7)은 다음 식과 같이 영계수로 정리 될 수 있다.

$$E = \frac{3}{4}\cdot\frac{\rho\cdot(1-\nu^2)}{\omega^2\cdot h^2}\cdot C_g^4 \tag{8}$$

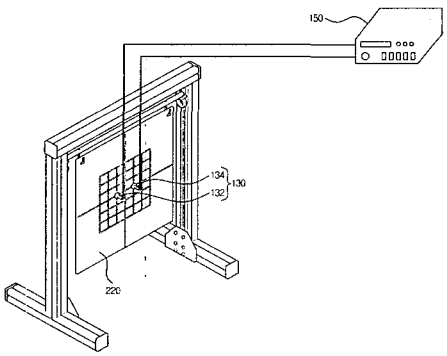


Fig. 2 Proposed Measurement System for Estimating Young's modulus. Sampling frequency is 200 kH

여기서 평판의 밀도는 무게에 부피를 나눠준 값이고, 푸아송비는 금속의 대부분이 0.24~0.35이기 때문에 군속도만 측정한다면 재질의 물성치인 영계수를 구할 수 있게 된다.

Fig. 2는 이 논문에서 제안하는 영계수를 측정하는 시스템을 간략히 설명한 그림이다. Fig. 2와 같이 두 개의 가속도 센서를 사용하여 끝 부분에 충격을 가하여 충격파가 도달하는 시간 지연차이를 구함으로써 군속도를 측정하여 식 (8)에 대입함으로써 영계수를 찾을 수 있게 된다.

2.2 평판에서 군속도 측정

평판에서 군속도는 두 센서사이에서 파의 도달시간차이에 센서 거리를 나눠주면 된다. 즉 도달하는 시간지연 차이를 Δt라 하고 센서간의 거리를 Δx라 고 한다면 군속도는

$$C_g = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{9}$$

로 표현할 수 있다.

하지만, 평판은 파의 전파속도가 주파수에 따라 다른 분산특성을 가지고 있기 때문에 Fig. 3과 같이 거리에 따라 파의 형상이 달라지게 된다. 따라서 시간영역에서 가속도 신호만으로 센서간의 시간 지연인 Δt를 찾는다면 많은 오차가 존재함을 쉽게 알 수 있다.

이 논문에서는 센서간의 시간 지연을 오차없이 정확하게 측정하기 위해서 시간-주파수 해석 기법을 사용하기로 한다.

시간-주파수 기법에는 크게 short time fourier transform, 웨이브렛 그리고 위그너빌 해석[4~7]이 있다. 이 중에서 주파수 및 시간 분해능이 우수한 위그너 빌 해석을 통해 시간지연차이를 찾기로 한다. 위그너-빌 분포는 bilinear TFR(time frequency representation)의 한 종류로서 그 정의는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} W(t,f) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} R(t,\tau)e^{-j2\pi f\tau}\,d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} z(t-\frac{\tau}{2})z^*(t+\frac{\tau}{2})e^{-j2\pi f\tau}\,d\tau \\ &= \int Z^*(\omega+\frac{\varphi}{2})Z(\omega-\frac{\varphi}{2})e^{-j\varphi}\,d\varphi \end{aligned} \tag{10}$$

여기서, $R(t,\tau) = z(t-\frac{\tau}{2})z^*(t+\frac{\tau}{2})$는 시간종속 자기상관함수(time dependent autocorrelation function),

$z(t)$는 신호의 해석함수, $Z(\omega)$는 $z(t)$의 푸리에 변환이다. 즉, 위그너-빌 분포는 시간종속 자기상관함수의 시간지연에 대한 푸리에 변환으로 정의되며, 물리적으로는 각 시간별 신호의 에너지에 대한 주파수 분포를 나타낸다.

2.3 오차 해석

식 (8)에서 영계수를 구하기 위해서는 밀도와 함께 푸아송비가 있어야 된다. 금속계열에서 푸아송비는 대개 0.25~0.35의 범위에 존재한다. 따라서 영계수를 구할 때 푸아송비가 얼마나 오차에 영향을 주는지 살펴보기로 한다.

식 (8)에서 A를 $\frac{3}{4}\cdot\frac{\rho}{\omega^2\cdot h^2}\cdot C_g^4$라 놓으면 다음 식과 같이 간략히 표현할 수 있다.

$$E = A\cdot(1-\nu^2) \tag{11}$$

푸아송비의 오차를 ε라 한다면, 오차를 포함한 푸아송비 ν'는

$$\nu' = \nu + \varepsilon \tag{12}$$

로 표현할 수 있다.

실제 영계수를 E_t라하고, 오차가 존재하는 값을 E_e라 표현하면 영계수에 대한 오차는

$$\begin{aligned} error &= \frac{E_t - E_e}{E_t}\times 100 \\ &= \frac{(2\nu+\varepsilon)}{1-\nu^2}\cdot\varepsilon\times 100 \end{aligned} \tag{13}$$

와 같이 된다.

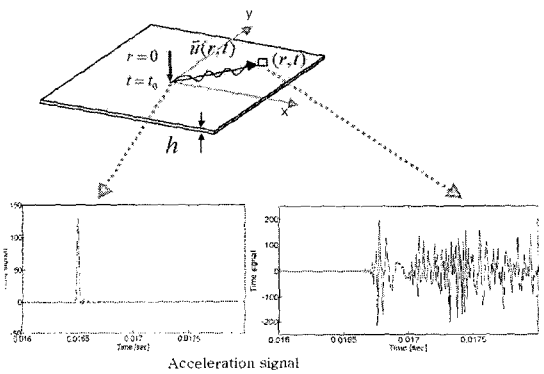


Fig. 3 Dispersive characteristics of a medium

따라서 푸아송비를 0.3으로 두고 푸아송비가 0.25~0.35 범위에 존재한다면, 최대 영계수의 오차는 3.6 %이다. 따라서 허용 오차 범위에 존재하므로 영계수 식인 식 (8)에서 푸아송비를 0.3으로 두고 영계수를 예측한다.

3. 실 험

군속도를 이용하여 재료의 영계수를 찾는 방법에 대해 이론적으로 살펴보았다. 이 장에서는 이러한 이론적인 내용을 검증하기 위하여 SUS304와 아크릴 평판 실험 결과에 대해 살펴보기로 한다.

3.1 SUS304 평판실험

Fig. 4는 평판 실험 장치 구성을 보여주고 있다. 이때 평판은 두께가 2 mm이고 재질이 SUS304인 600 mm×600 mm 평판을 사용하여 실험을 수행하였다.

두 가속도계 사이의 간격은 100 mm이고, 두 가속도계 사이의 일직선 상에서 1번 가속도계의 바깥쪽으로 100 mm 지점에서 충격을 주었다.

Fig. 5는 1번 가속도계 좌측에서 해머로 충격을 주었을 때의 가속도 신호 및 위그너빌 해석 결과를 보여주고 있다. 중앙에 있는 그림은 위그너빌 분포를 보여주며, 아래 그림은 가속도 신호, 그리고 좌측 그림은 파워 스펙트럼을 나타낸다. 그리고 Fig. 5(a)와 (b)는 각각 1번, 2번 가속도계 신호를 보여준다.

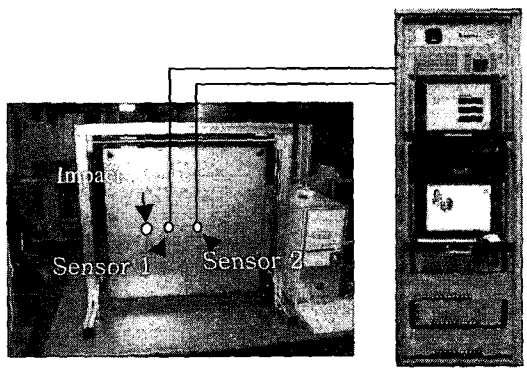
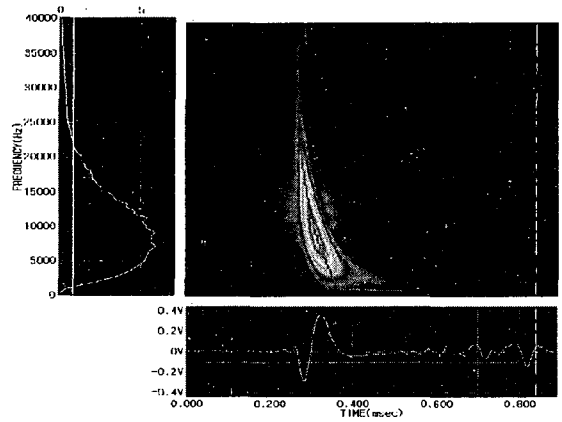
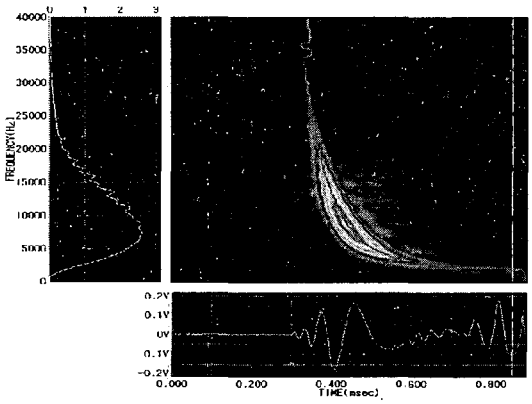


Fig. 4 Experimental setup for plate whose thickness is 2 mm. Accelerometers are used for measuring impact response (B&K type 4374)



(a)



(b)

Fig. 5 Wigner-Ville analysis result for (a) sensor 1, and (b) Sensor 2

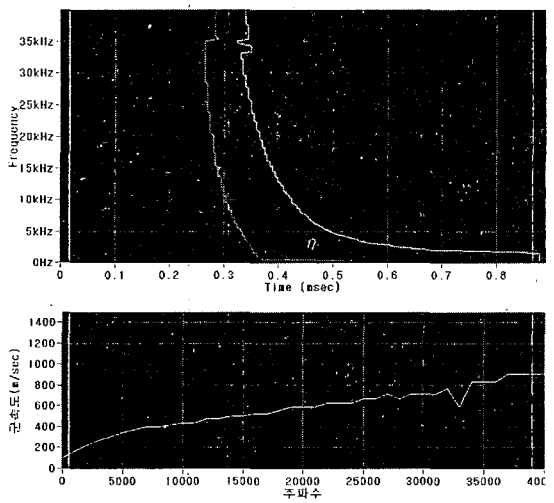


Fig. 6 (a) Maximum line in the Wigner-Ville distribution, (b) Estimated group velocity

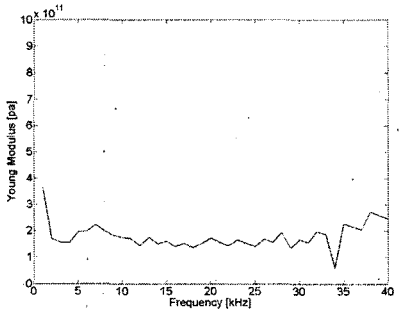


Fig. 7 Estimated Young's modulus for SUS 304 plate

Fig. 5에서 볼 수 있듯이 고주파 성분이 빨리 도달하는 분산 특성을 잘 보여주고 있으면, 충격 위치에서 멀어질수록 분산 곡선이 더욱 뚜렷하게 나타남을 관찰할 수 있다.

시간영역인 가속도 신호에서는 가속도계 사이의 파의 도달 시간지연차이를 구하기가 어려우나, 시간-주파수 영역인 위그너빌 분포에서는 최대선도를 뽑는 다면 Fig. 6과 같이 주파수별 시간 도달 지연차이를 쉽게 찾을 수 있다. 두 센서간의 거리차이가 100 mm이기 때문에 식 (9)에 의해 군속도를 구해보면 Fig. 6 아래 그래프와 같이 주파수별 군속도를 예측할 수 있다.

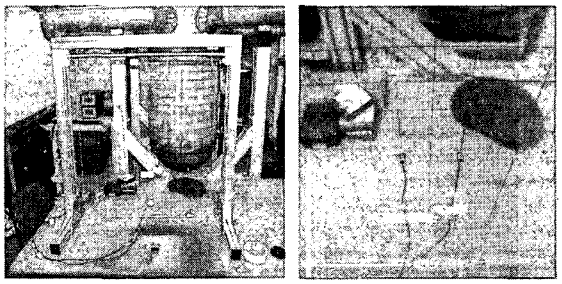
평판의 두께가 2 mm이고 크기가 600 mm×600 mm이므로 부피는 720×103 mm^3이고, 질량이 5.7 kg이기 때문에 밀도는 7930 kg/m^3이다. 따라서 푸아송비를 0.3으로 둔다면 Fig. 6 군속도를 식 (8)에 대입하면 Fig. 7과 같이 영계수를 찾을 수 있다.

Fig. 5에서 볼 수 있듯이 신호대 잡음비가 좋은 주파수 영역이 약 5 kH~10 kHz이므로 Fig. 7에서도 이 영역이 의미를 갖는다. 따라서 실험적으로 예측한 영계수는 약 200 GPs이다. 실험한 평판의 재질은 SUS304로써 실제 영계수는 205 GPs이므로 약 2.4 %의 오차내에서 잘 맞음을 보여주고 있다.

3.2 아크릴 평판 실험

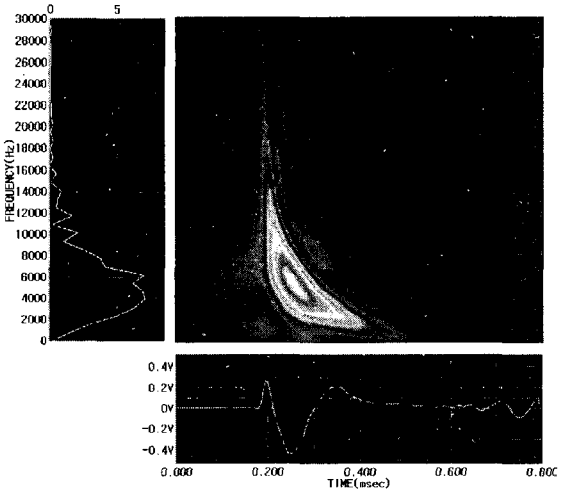
재질이 다른 아크릴 평판을 사용하여 Fig. 8과 같이 실험을 수행하였다. 이때 평판의 크기는 가로 세로 600 mm×600 mm이고 두께가 10 mm이다. 질량은 3.9 kg 이므로 아크릴의 밀도는 1083 kg/m^3이다.

SUS304평판과 똑같이 실험을 수행한 결과 Fig. 9와 같이 시간-주파수 영역에서 분산 곡선을 얻을 수 있었다.

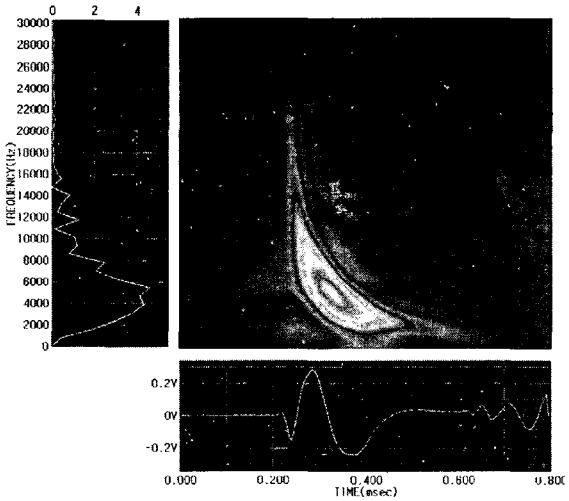


(a) (b)

Fig. 8 (a) The picture of acryl plate, (b) accelerometers



(a)



(b)

Fig. 9 Wigner-Ville analysis result for (a) sensor 1, (b) Sensor 2

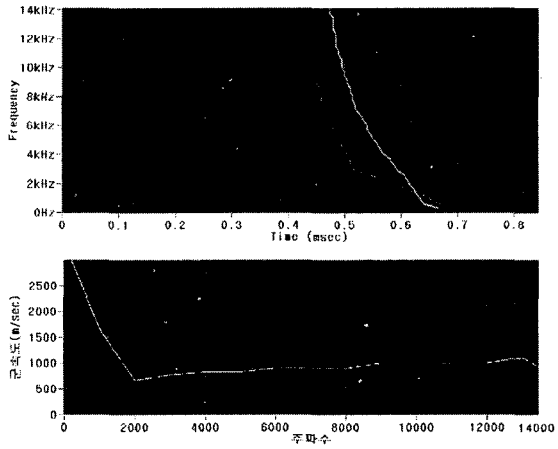


Fig. 10 (a) Maximum line in the Wigner-Ville distribution, (b) Estimated group velocity

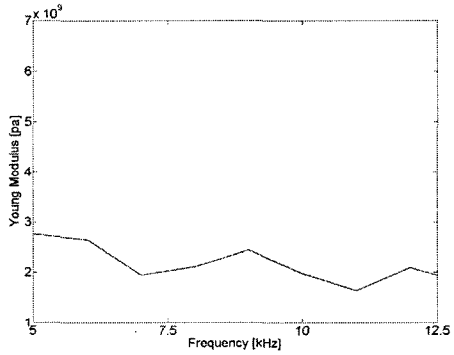


Fig. 11 Estimated Young's modulus for Acryl plate

Fig. 9에서 얻은 각 센서의 분산 커브로부터 Fig. 10과 같이 군속도를 구한 후 식 (8)에 대입하여 영계수를 예측한 결과 Fig. 11과 같이 약 2.3 GPa이 나왔다. 이때 영계수는 신호대 잡음비가 좋은 주파수 범위가 Fig. 9에서 볼 수 있듯이 약 3 kHz에서 6 kHz 부근이므로 이 영역에서의 평균을 취한 값이다.

실제 아크릴의 영계수는 2.2~3.8 GPa이므로 제안된 방법으로 예측한 값과 잘 일치함을 확인할 수 있었다.

4. 결 론

재료의 물성치인 영계수를 측정하기 위해서는 균일한 시편을 제작하여 정밀한 인장시험을 통하여 알 수 있다. 이 논문에서는 시편을 제작하지 않고 금속

재료에서 간단히 가속도계만을 사용하여 군속도의 측정함으로써 영계수를 측정하는 방법을 제안하였다. 밀도를 계산하기 위해 부피 및 질량을 알아야 되기 때문에 복잡한 형상에 대해서는 적용이 어렵지만, 평판 및 막대와 같은 간단한 구조물에서는 복잡한 인장시험 없이 가속도계만으로도 영계수를 측정할 수 있다.

참 고 문 헌

(1) E. Paul DeGarmo et al, 1988, als and Processes in Manufacturing 7th, MACMILLAN.

(2) Sohn, C.-H., et al. 2006, "Monitoring Pipe Thinning Using Time-frequency Analysis", Submitted to the Korean Society for Noise and Vibration Engineering.

(3) Cremer, L. and Heckl, M., 1998, Structure-borne Sound, Springer-verlag Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo, p. 101.

(4) Viktorov, I. A., 1967, Rayleigh and Lamb Waves, Plenum Press, pp. 67~102.

(5) Donald Ross, 1987, "Mechanics of Underwater Noise, Peninsula Publising Los Altos", California, p.159.

(6) Cohen, L., 1995., "Time-frequency Distributions, Prentice Hall PTR, Englewood Cilffs", New Jersey 07632.

(7) Hlawatsch, F., 1995, "Time-frequency Analysis and Synthesis of Linear Signal Spaces", Kluwer Academic Publishers.

(8) Cohen, L., 1989, "Time-frequency Distributions-A Review", Proceedings of the IEEE. Vol. 77, No. 7, pp. 941~981.

(9) Combes, J. M., Grossman, A. and Tchamitchian, P., Eds. 1989, "Wavelets, Time-frequency Methods, and Phase Space", Berlin: Springer,.

(10) Jeong, T.-G., 2006, "Study on the Nonstationary Behavior of Slider Air Bearing Using Reassigned Time-frequency Analysis", Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 16, No. 3, pp. 255~262.

(11) Park, Y.-K. and Kim, Y.-H., 1997, "A Method to Reduce the Cross-talk of Wigner-Ville Distribution; Rotating Window", Transactoins of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 7, No. 2, pp. 319~329.

(12) Park, Y.-K. and Kim, Y.-H., 1997, "Wigner-Ville Distribution Applying the Rotating Window and Its Characteristics", Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 7, No. 5, pp. 747~756.