

3^k -차 마방진에 대하여 (On the 3^k -magic squares)

구정회, 류재철*, 이병국
(Jeong-hoe Koo, Jaechil Yoo, Byung-gook Lee)

요 약

3-차 마방진을 이용하여 3^k -차 마방진($k = 2, 3, 4, \dots$)을 만드는 일반적인 방법을 제시한다.

Abstract

In this paper, we propose an algorithm of generating magic squares of degree 3^k ($k = 2, 3, 4, \dots$) by using the magic square of degree 3.

1. 서 론

사각형 모양을 방형이라고 하듯이 사각형 모양의 숫자배열을 '방진'이라 하며, 특히, N-차 마방진은 1에서 $N \times N$ 까지의 모든 숫자들을 한 번씩만 사용해서 N행 N열의 배열을 만들 때, 어떤 행이나 열이나 대각선의 합이 항상 $\frac{N \cdot (N + 1)}{2}$ 이 되는 배열을 말한다.

현재 "www.yahoo.co.kr"에서 "마방진"을 검색하면 1,680여 개의 웹문서가 검색되며, "www.google.com"에서는 "magic square"로 2,020,000여 개의 웹문서가 검색되고 있다. 이는 마방진 문제가 많은 사람들에게 매우 흥미로운 문제로 인식되어지고 있음을 뜻하며, 지금까지 수많은 형태의 마방진이 만들어지고 이를 이론화하려는 연구들이 있어왔다. 특별히 마방진을 만드는 방법에 대한 연구의 역사는 매우 길며, 많은 방법들이 고안되었다. 그러나 마방진이 갖고 있는 수학적 성질 또는 그것의 이론에 대한 연구 결과는 그리 많지 않다. 마방진과 관련한 문제는 크게 세 가지로 나누어 생각할 수 있다. 첫째, 마방진을 만

* 교신저자, 이 논문은 동의대학교 일반연구과제의 지원을 받아 작성되었음.

Key words : magic square, magic square of degree N.

© THE KOREAN SOCIETY FOR INDUSTRIAL AND APPLIED MATHEMATICS, 2006

드는 방법, 둘째, 마방진의 개수 세기, 셋째, 마방진이 갖고 있는 수학적 성질의 연구 등으로 분류할 수 있다.

본 논문에서는 3^k -차 마방진($k = 2, 3, 4 \dots$)을 만드는 일반적인 방법을 제시하고자 한다. 이 방법은 구 정희 선생이 집단수 또는 구궁수라는 이름으로 3차 마방진의 각 수와 중앙수와의 관계를 이용하여 9차, 27차 마방진으로 확장하고, 이를 이용하여 동양철학적 의미를 설명하는 등 수 십년간의 그의 기본적 아이디어를 3^k -차 마방진을 만드는 방법으로 일반화시킨 것이다.

2. 마방진의 유래

낙서(洛書)라고 불리는 3차 마방진이 중국 하나라의 우임금 때 발견된 이래 중국에서는 낙서가 세상의 비밀과 진리를 함축하고 있다고 믿었다. 이는 그것의 유일성으로 인해 주역의 원리가 함축된 그림으로 인식되기도 했고, 우주의 진리를 나타내는 수의 배열로도 인식되어 왔다. 그러나 마방진과 관련해서 남아있는 기록은 그리 많지 않다.

중국에 전해오는 낙서 이후의 기록으로는 송나라 때 양휘가 지은 '양휘산법(1275)', 명나라 때 정대위가 지은 '산법통종(1593)'에 3차 마방진에서부터 각각 8차, 10차까지의 마방진에 대한 언급이 있다. 우리나라에서 방진 연구에 획기적인 공헌을 한 사람은 조선의 유학자인 최석정(호는 명곡, 1646~1715)이었다. 그가 지은 '구수략'에는 3차에서부터 10차까지의 마방진이 서술되어 있는데, 특히 자신이 고안한 9차 마방진은 9행 9열 대각선의 합이 3백69로 같음은 물론 이를 이루는 9개의 숫자로 이루어진 9개의 작은 셀(cell)이 다시 마방진을 이루는 특이한 구조로 되어 있다. 반면 서양의 경우에는 16세기 초 알브레히트 뒤러가 자신의 죽은 해 1514년을 의미하도록 자신의 판에 새긴 동판 '멜란콜리아'라는 4차 마방진을 남겼다. 또한 근대의 천재수학자인 페르마(1601~1665), 오일러(1707~1783)와 가우스(1777~1855) 등이 마방진에 관한 연구를 수행했다. 특별히 주목할 만한 것은 오일러가 제안한 직교라틴방진 문제를 오래 전에 최석정이 생각했다는 사실이다(참고 논문 [1], [2]).

3. 마방진의 개수 및 성질에 관한 연구

지금까지의 연구 결과 2차 마방진을 제외하고 모든 방진에서 마방진이 존재한다는 것이 알려졌다. 1행 1열(1차 방진)의 방진은 숫자가 1 하나 뿐 이므로 자명하게 마방진이 된다. 그런데 2차 방진은 마방진이 될 수 없다. 1, 2, 3, 4를 한 번씩만 써서 상하좌우, 대각선 방향의 숫자 합을 같게 할 수는 없다. 3차 방진은 낙서의 방진에서 보듯이 마방진이 유일하게 존재한다. 4차 방진은 뒤러의 방진에서 보는 것처럼 마방진이 존재한다. 특히 4차 마방진은 8백80개, 5차 마방진은 2억7천5백30만5천2백24개가 존재한다는 사실이 알려졌다. 그러나 현재까지 6차 이상의 마방진에 대해서는 그 숫자가 몇 개인지 정확히 알지 못한다. 1998년에 Pinn과 Wierczkowski에 의해 6차 마방진의 개수가 대략 $(0.17745 \pm 0.00016) \times 10^{20}$ 개 정도임을 보였다(참고 논문 [5]).

표 <1>

4	9	2
3	5	7
8	1	6

표 <2>

-1	4	-3
-2	0	2
3	-4	1

표 <3>

-10	35	-28	-5	40	-23	-12	33	-30
-19	-1	17	-14	4	22	-21	-3	15
26	-37	8	31	-32	13	24	-39	6
-11	34	-29	-9	36	-27	-7	38	-25
-20	-2	16	-18	0	18	-16	2	20
25	-38	7	27	-36	9	29	-34	11
-6	39	-24	-13	32	-31	-8	37	-26
-15	3	21	-22	-4	14	-17	1	19
30	-33	12	23	-40	5	28	-35	10

표 <4>

31	76	13	36	81	18	29	74	11
22	40	58	27	45	63	20	38	56
67	4	49	72	9	54	65	2	47
30	75	12	32	77	14	34	79	16
21	39	57	23	41	59	25	43	61
66	3	48	68	5	50	70	7	52
35	80	17	28	73	10	33	78	15
26	44	62	19	37	55	24	42	60
71	8	53	64	1	46	69	6	51

마방진의 수학적 성질을 밝히는 일은 오일러, 가우스 이래 이론화하기가 쉬운 주제가 아니고, 수학의 다른 분야와 연관성을 맺기도 쉽지 않아 알려진 결과는 그리 많지 않다. 최근의 이론적 결과는 참고논문 [2]에 언급된 Adler의 몇 편의 논문과 참고논문 [3], [4] 정도가 있을 뿐이다.

4. 3^k-차 마방진을 만드는 방법

홀수차 마방진을 만드는 de la Loubere의 방법과 Albrecht Durer의 방법, 4의 배수차 또는 4의 배수가 아닌 짝수차 마방진을 만드는 일반적인 방법들은 Suzuki, Alejandre 등의 홈페이지를 참조하면 자세한 사항을 얻을 수 있고, Adler의 마방진 연산에 의한 마방진 만드는 방법은 참고논문 [2]와 [3]을 참조하자.

3^k($k=2,3,4,\dots$)-차 마방진을 만드는 일반적인 방법을 $k=2$ 일 때와 $k=3$ 일 때의 경우로 설명한다. 이 방법은 일반적으로 k 가 4 이상인 자연수로 확장될 수 있으며, k 에 대하여 수학적 귀납법을 적용하면 제시된 방법에 의해 만들어지는 방진이 마방진이 됨을 쉽게 보일 수 있다. 우선 표 <1>의 3차 마방진의 각 수에 -5를 더해 표 <2>를 생각하자.

9차 마방진을 3x3의 셀로 나눈 후, 각 셀의 중앙에 표 <2>의 각 수를 배치한다. 각 셀

표 <5>

-91	314	-253	-46	359	-208	-109	296	-271	-86	319	-248	-41	364	-203	-104	301	-266	-93	312	-255	-48	357	-210	-111	294	-273
-172	-10	152	-127	35	197	-190	-28	134	-167	-5	157	-122	40	202	-185	-23	139	-174	-12	150	-129	33	195	-192	-30	132
233	-334	71	278	-289	116	215	-352	53	238	-329	76	283	-284	121	220	-347	58	231	-336	69	276	-291	114	213	-354	51
-100	305	-262	-82	323	-244	-64	341	-226	-95	310	-257	-77	328	-239	-59	346	-221	-102	303	-264	-84	321	-246	-66	339	-228
-181	-19	143	-163	-1	161	-145	17	179	-176	-14	148	-158	4	166	-140	22	184	-183	-21	141	-165	-3	159	-147	15	177
224	-343	62	242	-325	80	260	-307	98	229	-338	67	247	-320	85	265	-302	103	222	-345	60	240	-327	78	258	-309	96
-55	350	-217	-118	287	-280	-73	332	-235	-50	355	-212	-113	292	-275	-68	337	-230	-57	348	-219	-120	285	-282	-75	330	-237
-136	26	188	-199	-37	125	-154	8	170	-131	31	193	-194	-32	130	-149	13	175	-138	24	186	-201	-39	123	-156	6	168
269	-298	107	206	-361	44	251	-316	89	274	-293	112	211	-356	49	256	-311	94	267	-300	105	204	-363	42	249	-318	87
-92	313	-254	-47	358	-209	-110	295	-272	-90	315	-252	-45	360	-207	-108	297	-270	-88	317	-250	-43	362	-205	-106	299	-268
-173	-11	151	-128	34	196	-191	-29	133	-171	-9	153	-126	36	198	-189	-27	135	-169	-7	155	-124	38	200	-187	-25	137
232	-335	70	277	-290	115	214	-353	52	234	-333	72	279	-288	117	216	-351	54	236	-331	74	281	-286	119	218	-349	56
-101	304	-263	-83	322	-245	-65	340	-227	-99	306	-261	-81	324	-243	-63	342	-225	-97	308	-259	-79	326	-241	-61	344	-223
-182	-20	142	-164	-2	160	-146	16	178	-180	-18	144	-162	0	162	-144	18	180	-178	-16	146	-160	2	164	-142	20	182
223	-344	61	241	-326	79	259	-308	97	225	-342	63	243	-324	81	261	-306	99	227	-340	65	245	-322	83	263	-304	101
-56	349	-218	-119	286	-281	-74	331	-236	-54	351	-216	-117	288	-279	-72	333	-234	-52	353	-214	-115	290	-277	-70	335	-232
-137	25	187	-200	-38	124	-155	7	169	-135	27	189	-198	-36	126	-153	9	171	-133	29	191	-196	-34	128	-151	11	173
268	-299	106	205	-362	43	250	-317	88	270	-297	108	207	-360	45	252	-315	90	272	-295	110	209	-358	47	254	-313	92
-87	318	-249	-42	363	-204	-105	300	-267	-94	311	-256	-49	356	-211	-112	293	-274	-89	316	-251	-44	361	-206	-107	298	-269
-168	-6	156	-123	39	201	-186	-24	138	-175	-13	149	-130	32	194	-193	-31	131	-170	-8	154	-125	37	199	-188	-26	136
237	-330	75	282	-285	120	219	-348	57	230	-337	68	275	-292	113	212	-355	50	235	-332	73	280	-287	118	217	-350	55
-96	309	-258	-78	327	-240	-60	345	-222	-103	302	-265	-85	320	-247	-67	338	-229	-98	307	-260	-80	325	-242	-62	343	-224
-177	-15	147	-159	3	165	-141	21	183	-184	-22	140	-166	-4	158	-148	14	176	-179	-17	145	-161	1	163	-143	19	181
228	-339	66	245	-321	84	264	-303	102	221	-346	59	239	-328	77	257	-310	95	226	-341	64	244	-323	82	262	-305	100
-51	354	-213	-114	291	-276	-69	336	-231	-58	347	-220	-121	284	-283	-76	329	-238	-53	352	-215	-116	289	-278	-71	334	-233
-132	30	192	-195	-33	129	-150	12	174	-139	23	185	-202	-40	122	-157	5	167	-134	28	190	-197	-35	127	-152	10	172
273	-294	111	210	-357	48	255	-312	93	266	-301	104	203	-364	41	248	-319	86	271	-296	109	208	-359	46	253	-314	91

의 나머지 8개의 수는 각 셀의 중앙과의 위치 관계에 따라, 표 <2>에서 대응하는 위치의 수와 중앙수와의 차이에 9를 곱한 후 각 셀의 중앙수를 더함으로써 결정된다.

예를 들면 표 <3>에서의 35는 위치가 셀의 중앙수 바로 위에 있으므로 표 <2>에서의 그것에 해당하는 수는 4이고 이는 표 <2>의 중앙수와의 차이가 +4 이므로 $4 \times 9 = 36$ 이며, 그 셀의 중앙수 -1을 더함으로써 35를 결정한다. 같은 방법으로 각 셀의 나머지 수를 표 <2>에서 대응하는 위치의 수와 중앙수와의 차이에 9를 곱한 후 각 셀의 중앙수를 더함으로써 표 <3>을 완성한다. 표 <3>의 각 수에 $41(= \left[\left(\frac{3^2 \times 3^2}{2} \right) \right] + 1)$ 을 더하면 표 <4>의 새로운 3^2 -차 마방진을 얻는다(단, $\lfloor x \rfloor$ 는 x를 넘지 않는 최대 정수이다).

표 <6>

274	679	112	319	724	157	256	661	94	279	684	117	324	729	162	261	666	99	272	677	110	317	722	155	254	659	92
193	355	517	238	400	562	175	337	499	198	360	522	243	405	567	180	342	504	191	353	515	236	398	560	173	335	497
598	31	436	643	76	481	580	13	418	603	36	441	648	81	486	585	18	423	596	29	434	641	74	479	578	11	416
265	670	103	283	688	121	301	706	139	270	675	108	288	693	126	306	711	144	263	668	101	281	686	119	299	704	137
184	346	508	202	364	526	220	382	544	189	351	513	207	369	531	225	387	549	182	344	506	200	362	524	218	380	542
589	22	427	607	40	445	625	58	463	594	27	432	612	45	450	630	63	468	587	20	425	605	38	443	623	56	461
310	715	148	247	652	85	292	697	130	315	720	153	252	657	90	297	702	135	308	713	146	245	650	83	290	695	128
229	391	553	166	328	490	211	373	535	234	396	558	171	333	495	216	378	540	227	389	551	164	326	488	209	371	533
634	67	472	571	4	409	616	49	454	639	72	477	576	9	414	621	54	459	632	65	470	569	2	407	614	47	452
273	678	111	318	723	156	255	660	93	275	680	113	320	725	158	257	662	95	277	682	115	322	727	160	259	664	97
192	354	516	237	399	561	174	336	498	194	356	518	239	401	563	176	338	500	196	358	520	241	403	565	178	340	502
597	30	435	642	75	480	579	12	417	599	32	437	644	77	482	581	14	419	601	34	439	646	79	484	583	16	421
264	669	102	282	687	120	300	705	138	266	671	104	284	689	122	302	707	140	268	673	106	286	691	124	304	709	142
183	345	507	201	363	525	219	381	543	185	347	509	203	365	527	221	383	545	187	349	511	205	367	529	223	385	547
588	21	426	606	39	444	624	57	462	590	23	428	608	41	446	626	59	464	592	25	430	610	43	448	628	61	466
309	714	147	246	651	84	291	696	129	311	716	149	248	653	86	293	698	131	313	718	151	250	655	88	295	700	133
228	390	552	165	327	489	210	372	534	230	392	554	167	329	491	212	374	536	232	394	556	169	331	493	214	376	536
633	66	471	570	3	408	615	48	453	635	68	473	572	5	410	617	50	455	637	70	475	574	7	412	619	52	457
278	683	116	323	728	161	260	665	98	271	676	109	316	721	154	253	658	91	276	681	114	321	726	159	258	663	96
197	359	521	242	404	566	179	341	503	190	352	514	235	397	559	172	334	496	195	357	519	240	402	564	177	339	501
602	35	440	647	80	485	584	17	422	595	28	433	640	73	478	577	10	415	600	33	438	645	78	483	582	15	420
269	674	107	287	692	125	305	710	143	262	667	100	280	685	118	298	703	136	267	672	105	285	690	123	303	708	141
188	350	512	206	368	530	224	386	548	181	343	505	199	361	523	217	379	541	186	348	510	204	366	528	222	384	546
593	26	431	611	44	449	629	62	467	586	19	424	604	37	442	622	55	460	591	24	429	609	42	447	627	60	465
314	719	152	251	656	89	296	701	134	307	712	145	244	649	82	289	694	127	312	717	150	249	654	87	294	699	132
233	395	557	170	332	494	215	377	539	226	388	550	163	325	487	208	370	532	231	393	555	168	330	492	213	375	537
638	71	476	575	8	413	620	53	458	631	64	469	568	1	406	613	46	451	636	69	474	573	6	411	618	51	456

비슷한 방법으로 3³-차 마방진을 생각할 수 있다. 표 <3>의 각 수를 3³-차 마방진의 3×3 셀의 중앙수로 놓고 각 셀의 나머지 수는 그 수의 위치에 따라 표 <2>에서 그 위치에 해당하는 수와 중앙수와의 차이에 9²(=81)을 곱한 후 각 셀의 중앙수를 더함으로써 결정된다. 표 <5>를 얻은 후, 각 수에 365(=[$\frac{3^3 \times 3^3}{2}$]) + 1)를 더하면 표 <6>의 새로운 3³-차 마방진을 얻는다.

일반적인 3^k-차 마방진을 만드는 경우, 각 3×3 셀의 중앙수는 3^(k-1)-차 마방진의 수로부터 얻어지며, 나머지 위치에 있는 8개의 수를 계산할 때 필요한 표 <2>에서의 해당 위치의 수, 즉 중앙수와의 차이에 곱해지는 수는 9^(k-1)이며, 1부터 3^k×3^k의 양수로 이

투어진 마방진을 얻기 위해 마지막 단계에서 일률적으로 더해지는 수는 $\left\{\left\{\frac{3^k \times 3^k}{2}\right\}\right\} + 1$ 이다.

또한 여기서 제시된 3^k -차 마방진은 각 수를 $9^{(k-1)}$ 로 나누어 나머지를 택하면 각 3×3 셀의 값은 모두 같고, 그 값을 대표 값으로 하면 $3^{(k-1)}$ -차 마방진과 같은 특이한 구조를 갖는다. 이는 여기서 제시된 3^k -차 마방진을 생성하는 알고리즘을 반대로 생각하면 자명하다.

3차 마방진을 이용하여 확장된 3^k -차 마방진을 만드는 방법을 다음과 같이 연산을 통해 설명할 수도 있다. 즉, 임의의 n 차 마방진 A 와 m 차 마방진 B 에 대하여 연산 $A * B$ 를 아래와 같이 정의하자.

$$A * B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mm} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1m} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m1} & C_{m2} & \cdots & C_{mm} \end{bmatrix} = C$$

여기서 $C_{ij} = m^2 A + (b_{ij} - m^2) \mathbf{1}_{n \times n}$

$$\begin{aligned} &= m^2 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + (b_{ij} - m^2) \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} m^2 a_{11} + b_{ij} - m^2 & m^2 a_{12} + b_{ij} - m^2 & \cdots & m^2 a_{1n} + b_{ij} - m^2 \\ m^2 a_{21} + b_{ij} - m^2 & m^2 a_{22} + b_{ij} - m^2 & \cdots & m^2 a_{2n} + b_{ij} - m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m^2 a_{n1} + b_{ij} - m^2 & m^2 a_{n2} + b_{ij} - m^2 & \cdots & m^2 a_{nn} + b_{ij} - m^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

임의의 n 차 마방진 A 와 m 차 마방진 B 에 대한 연산 $A * B$ 에 의해 생성된 $C = A * B$ 는 $(n \times m)$ -차 마방진이 됨을 연산의 정의에 의해 쉽게 확인할 수 있다. 또한 $(n \times m)$ -차 마방진 C 의 각 원소를 m^2 으로 나눈 후 나머지를 택하면 B 의 속성을 갖는 소블럭으로 이루어진 마방진이 된다.

예를 들면, 3차 마방진 $A = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ 와 4차 마방진 $B = \begin{bmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 11 & 5 \\ 13 & 3 & 2 & 16 \end{bmatrix}$ 에

대하여,

$$A * B = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 11 & 5 \\ 13 & 3 & 2 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix}$$

라고 하면 연산의 정의에 의해 각 A_{ij} 를 계산할 수 있다.

$$\text{즉, } A_{11} = 4^2A + (1-4^2)1_{3 \times 3} = 16 \begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix} - 15 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49 & 129 & 17 \\ 33 & 65 & 97 \\ 113 & 1 & 81 \end{bmatrix}.$$

$$A_{43} = 4^2A + (2-4^2)1_{3 \times 3} = 16 \begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix} - 14 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & 130 & 18 \\ 34 & 66 & 98 \\ 114 & 2 & 82 \end{bmatrix}$$

와 같이 $1 \leq i, j \leq 4$ 에 대하여 모든 A_{ij} 를 구할 수 있고 $A * B$ 는 12차 마방진이 된다는 것을 확인할 수 있다. 또한 12차 마방진 $A * B$ 의 각 원소를 16으로 나눈 나머지를 고려하면, 즉

$$A * B|_{\text{mod}16} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1_{3 \times 3} & 15 \cdot 1_{3 \times 3} & 14 \cdot 1_{3 \times 3} & 4 \cdot 1_{3 \times 3} \\ 12 \cdot 1_{3 \times 3} & 6 \cdot 1_{3 \times 3} & 7 \cdot 1_{3 \times 3} & 9 \cdot 1_{3 \times 3} \\ 8 \cdot 1_{3 \times 3} & 10 \cdot 1_{3 \times 3} & 11 \cdot 1_{3 \times 3} & 5 \cdot 1_{3 \times 3} \\ 13 \cdot 1_{3 \times 3} & 3 \cdot 1_{3 \times 3} & 2 \cdot 1_{3 \times 3} & 16 \cdot 1_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

이며, 이것은 4차 마방진 B 의 속성을 갖는다($0 \cdot 1_{3 \times 3} = 16 \cdot 1_{3 \times 3}$ 로 생각하면).

$$\text{특히 } A = B = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix} \text{라고 하면,}$$

$$A * A = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \text{라고 놓으면, 연산의 정의에 의해}$$

$$A_{ij} = 3^2A + (a_{ij} - 3^2)1_{3 \times 3} \text{이다.}$$

$$\text{즉, } A_{11} = 3^2A + (4-3^2)1_{3 \times 3} = 9 \begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 & 76 & 13 \\ 22 & 40 & 58 \\ 67 & 4 & 49 \end{bmatrix}.$$

$$A_{12} = 3^2A + (9-3^2)1_{3 \times 3} = 9 \begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix} - 0 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 & 81 & 18 \\ 27 & 45 & 63 \\ 72 & 9 & 54 \end{bmatrix}.$$

$$A_{13} = 3^2A + (2-3^2)1_{3 \times 3} = 9 \begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix} - 7 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & 74 & 11 \\ 20 & 38 & 56 \\ 65 & 2 & 47 \end{bmatrix} \text{ 등을 얻을}$$

수 있고, 비슷한 방법으로 모든 A_{ij} ($1 \leq i, j \leq 3$)를 계산할 수 있으며, 얻어진 3²-차

마방진이 표 <4>의 마방진과 같음을 확인할 수 있다.

3^k -차 마방진으로의 확장은 $A^k = A * A^{(k-1)}$ 로 정의하고, 마방진의 연산의 정의를 통해 얻는다. 예를 들면, $A = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ 일 때, 3^3 -차 마방진 A^3 는 $A * (A * A)$ 를 통해 얻을 수 있으며, 연산을 통해 얻어진 27차 마방진 A^3 가 표 <6>의 마방진과 같음을 쉽게 확인할 수 있다.

5. 결 론

본 논문에서는 3차 마방진을 이용하여 3^k -차 마방진을 만드는 알고리즘을 구정희 선생의 중앙수의 개념을 일반화시킨 방법과 두 마방진의 연산을 통해 얻는 방법으로 제시하였다. 특별히 두 마방진의 연산을 이용한 방법은 중앙수의 개념을 일반화시킨 방법을 포함하며, 3^k -차 마방진을 만드는 알고리즘은 두 마방진을 3차로 제한하여 연속해서 연산을 반복시키는 것이다.

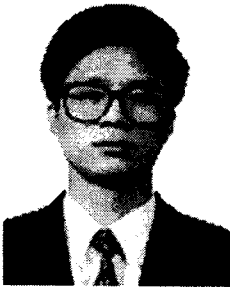
참 고 문 헌

1. 오윤용·한상근, "최석정과 그의 마방진," 한국 수학교육학회지 시리즈 A 제32권 3호, 205-219, 1993.
2. 이동훈·한상근, "마방진에 대하여," 한국수학교육학회지 시리즈 E 제7집, 201-213, 1998.
3. Adler, A., "Magic N-cubes Form a Free Monoid," The electronic journal of combinatorics 4, #R15, 1997.
4. Benjamin, T·Yasuda, K., "Magic "Squares" Indeed," The American Mathematical Monthly, Vol. 106, Number 2, 152-156, 1999.
5. Pinn, K·Wieczerkowski, C., "Number of magic squares from parallel tempering Monte Carlo," cond-mat/9804109, 1998.



류 재 철(Jaechil Yoo)

- e-mail : yoo@deu.ac.kr
- 1985년 성균관대학교 수학교육과 졸업(학사)
- 1987년 KAIST 응용수학과 졸업(석사)
- 1996년 위스콘신 주립대학교 수학과 졸업(박사)
- 1987년~1990년 삼성 SDS CAD/CAM/CAE팀
- 1997년~현재 동의대학교 수학과 부교수
- 관심분야 : 수치해석



이 병 국(Byung-gook Lee)

- e-mail : lbg@dongseo.ac.kr
- 1987년 연세대학교 수학과 졸업(학사)
- 1989년 KAIST 응용수학과 졸업(석사)
- 1993년 KAIST 수학과 졸업(박사)
- 1993년~1995년 데이콤 종합연구소 선임연구원
- 1995년~현재 동서대학교 인터넷공학부 부교수
- 관심분야 : Computer Graphics, CAGD