Journal of Natural Sciences
Pai Chai University, Korea
Vol. 16, No. 1 : 39-48, 2005

바빌로니아수학의 역사적 고찰

김성숙*, 김데니엘**
*배재대학교 전산정보수학과, **남오레곤대학 수학과

Some historical aspects of Babylonian Mathematics

Sung Sook Kim*, G. Daniel Kim**
*Department of Applied Mathematics, Paichai University,
**Department of Mathematics, Southern Oregon University

Abstract

Many researchers consider the totality of Babylonian mathematics was profoundly elementary, but some of their mathematical knowledge achieved a level comparable to the Greeks. The aim of this article is to provide a brief overview of the environmental and social background which made mathematical development. Historically, mathematics is always a product of society. So it is valuable to study historical background which have produced mathematics.

서 론

바빌로니아 제국은 기원전 2000년에 셈족이 메소포타미아를 침략하여 수메르인들을 패배시키고 바빌론을 그들의 수도로 만들면서 시작되었다. 19세기 초 메소포타미아 문화를 연구한 고고학자들은 글자나 그림이 새겨져 있는 약 50만개의 점토판을 발굴해 냈는데 그 중 5만개는 고대도시 니푸르(Nippur)의 유적지에서 발굴되었다. 현재는 세계 각국의 박물관이나 대학 도서관－파리의 루브르박물관, 베를린의 박물관, 바그다드 박물관, 런던의 대영 박물관과 예일대학, 컬럼비

Corresponding Author : Sung-Sook Kim, Department of Applied Mathematics, PaiChai University, Daejeon, 302-735, Korea. Tel. : +82-42-520-5368, E-mail : sskim@pcu.ac.kr

아대학, 펜실베이니아 대학의 고고학 전시관-등에 소장되어 있다. 이 점토판들의 크기는 몇 평방 인치밖에 안 되는 것부터 시작하여 다양한 크기가 있다. 판의 한쪽 면에만 글자가 있는 경우도 있고 양쪽 면 모두에 글자가 있는 경우도 있으며 판의 가장자리 둘레에만 글자가 있는 경우도 있다. 초기에는 이 점토판들이 단순한 상업적 목적을 위한 기록으로 생각되어졌으나 후에 이 50만개의 점토판 중에서 약 300개가 수학에 관한 표와 문제가 적혀 있는 점토판으로 판명되었다. 이들은 역수와 곱셈표 등 수 계산을 위하여 여러 가지 수표를 점토판에 써서 가지고 다닌 것으로 보인다. 바빌로니아 시대에 수학이 매우 발전하여서 메소포타미아 수학의 황금기였다고 볼 수 있다. 설형문자라 불리는 낯선 쐐기 모양의 활자체로 된 60진법의 체계, $\sqrt{2}$의 매우 정확한 근사값, 2차 방정식의 해법을 비롯한 대수, 그리고 유명한 피타고라스 3쌍[1] 등을 해결한 메소포타미아 수학의 황금기였다고 볼 수 있다. 이 논문에서는 점토판 중에서 가장 유명한 플림프톤 322과 바빌로니아 수학이 나오게 된 역사적 배경에 대하여 논의하려고 한다. 우리가 비록 그 시대의 저자에 대하여 아는 것이 하나도 없지만 그 시대의 사회나 경제적 배경에 대하여 알게 될 때 그들이 기록한 점토판의 내용 등을 해독하고 이해하는데 많은 도움이 될 것이다.

바빌로니아 수학의 역사적 배경

바빌로니아인들은 현재 이라크에 속해 있는 티그리스강과 유프라테스강 주변에 '비옥한 초승달 지대'라고 불리던 언덕에서 거주하였다. 바빌로니아 제국이 형성되기 이전부터 토양은 비옥하고 강물은 풍부했지만, 남쪽 평야에서 살기에는 환경적인 두 가지의 중요한 단점이 있었다. 첫째, 연간 강우량은 인공적인 관개시설 없이 농작물들을 재배하기에 충분하지 않았으며 이 평야는 경사도가 매우 낮은 평지였기에 해마다 봄 수확기에 홍수로 인하여 농작물이 손실을 입었다. 둘째, 이 지역에는 아주 제한된 종류의 천연자원만이 있었다. 그 시대에 위대한 지도자는 관개시설 같은 광대한 공공사업을 공동으로 함으로써 서로 떨어져 있는 여러 도시국가들을 결합하여 힘을 모았다. 그러한 일을 하기 위해서는 측량법을 개발해야 했고 물품을 거래하고 노동력을 계산하여 계획하며 세금을 부과하고 징수하는 데 필요한 회계 업무 등을 처리하기 위하여 매우 높은 수준의 지식과 그에 수반되는 수학의 발전이 요구되었다. 천연자원이 풍부하지 않던 지역에 청동과 일용품을 관리하고 감시하는 것은 이 시대에 아주 중요한 일이었다. 이런 관리경

---

1) 피타고라스 정리를 만족하는 직각삼각형의 변의 길이가 될 수 있는 (3, 4, 5)와 같은 3 쌍의 양의 정수 즉, $a^2+b^2=c^2$을 이루는 (a, b, c)를 만족하는 수의 집합

영을 위해서도 많은 수학의 발전이 필요하게 되었다. 바빌로니아 제국이 형성되기 이전에 이 지역에 살았던 수메르인들은 점토판 위에서 토큰의 이미지를 그리며 숫자로 문양을 표시하는 것이 계속되면서, 날카로운 갈대를 가지고 점토판 위에 물건의 모양을 그대로 그리거나 그 물건을 나타내는 토큰을 그림으로써 표현했다. 즉, 이렇게 해서 문자가 시작되었고 계수법이 발전되었다. 초기에는 다른 종류의 물체의 개수를 세기 위해 네 가지 단위가, 면적 측정을 위해 또 다른 한 종류의 단위가, 년/월/일을 표시하기 위해 또 다른 하나의 단위가 있었다. 보리, 맥아, 밀과 귀리 같은 특별한 유형의 곡식의 용량을 측정하는 네 가지 측정체계가 있었고, 여러 가지 유제품의 지방을 측정하기 위하여 두 가지 측정체계가 있었다. 이때는 수 측정이 추상적인 개념이 아니고 물건에 의존하는 형태였다. 계수를 계속하는 가운데, 특정한 물건의 개수와 수 자체의 개념을 분리하는 수의 추상화가 발전하게 되었고, 수학 그 자체를 위한 연구도 이루어졌다. 이렇게 산술로부터 대수가 발전하였다. 이러한 독특한 수 체계가 바빌로니아 시대에 이르러 60진법으로 발전하였다. 이 60진법으로부터 시간, 분, 초를 세는 현대의 시스템이 얻어졌다.

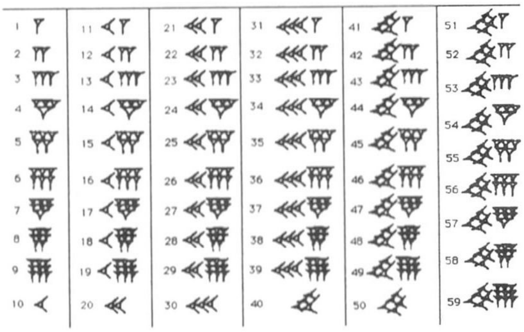
이 많은 수표가 쓰여진 점토판 중 Plimpton 322는 현존하는 수천개의 점토판 중의 가장 유명한 것 중 하나이다. 뉴욕에서 출판업을 하던 George. A. Plimpton이 소장하고 있다가 1930년대 중반에 Columbia 대학에 기증 한 것이다. 그 이름은 Plimpton 소장품의 목록번호 322에서 붙여진 것이다. 그는 이 점토판을 1930년경에 Edgar J. Banks로부터 $10에 구입하였는데 그는 이 점토판을 이라크 남쪽 Senkereh로 불리는 유적지에서 구했다고 한다. 그것은 기원전 1900년에서 기원 전 1600년 사이인 고대 바빌로니아 시대의 것으로 알려져 있으며 1945년 경에 고고학자인 노이게바우어(Neugebauer)와 사크스(Sachs)에 의해 처음으로 해독되었다. 이것이 해독되기 전에는 이런 점토판들이 단순히 상업적 목적이나 기록으로 간주되어 왔다. 이 점토판에는 직각 삼각형의 3변을 이루는 피타고라스 3쌍을 이루는 세 개의 양의 정수의 집합 중 두 쌍이 써 있으며 직각 삼각형의 한 각의 Secont의 자승이 되는 수가 쓰여 있다는 사실이 해독이 되면서 많은 학자들의 관심의 대상이 되어왔다.

바벨로니아인의 수체계

기원전 약 3000년경, 수메르인들은 세계최초로 천문학을 연구하여 천문법을 만들었다. 그들은 높은 곳에서 달의 변화를 관찰하여, 달의 모습이 변화는 것에 근거하여 1년을 12개월, 모두 354일로 하고, 윤달을 정하고 한 주일은 7일로 정하고 7일의 이름을 별들의 이름을 따서 각각 일요일(태양신), 월요일(달신), 화요일(화성신), 수요일(수성신), 목요일(목성신), 금요일(금성신), 토요

일(토성신)이라고 불렀다. 그 후 하루 24시간을 2시간을 한 단위로 하여 12단위로 만들었으며 한 시간을 60분, 일분을 60초로 만들어 사용하였다. 또한 원의 둘레를 360도로 나누고 현재의 위도와 경도를 발명하였다. 이러한 수체계가 발전하여서 바빌로니아 시대에 이르러 60진법의 수체계를 완성시켰다. 고대 바빌로니아인들은 고대 이집트인보다 기하학을 제외한 일반 수학분야에서 더 발달되었다. 그들은 위치기수법(positional notation) 을 사용하여 수를 나타내었고 모든 역수는 아니지만 역수를 알고 있었으며 제곱근도 계산을 하였다. 또한 1차 방정식과 2차 방정식의 해법을 알고 있으며 수표의 도움으로 3차 방정식도 풀었다. 그들은 60진법을 사용하였는데, 고대 바빌로니아인들은 그림문자에서 발달된 𒁹 와 𒌋 를 이용하여 모든 수를 나타내었다.

옆의 [그림 1]에서 보는 바와 같이 1에서 9까지는 𒁹 을 수의 개수만큼 나열하여 만들었고, 10 이상의 수는 𒁹 과 𒌋 를 조합하여 만들었다. 예를 들어 56을 나타내면 십을 나타내는 글자 𒌋 다섯 개와 1을 나타내는 글자 𒁹 여섯 개를 십자리와 1자리에 배열하여 로 표시하였다.



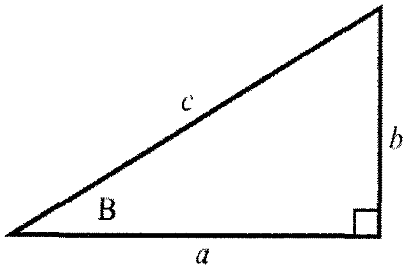
[그림 1] 60진법의 수

Plimpton 322에 대한 해석

[그림 2] 점토판 플림프톤 322

[그림 3] 플림프톤 322의 그림

현존하는 점토판의 크기는 13x9x2 cm 이며 [5, pp. 38-41] 쐐기문자로 60진법에 의하여 쓰여 있다. 이 점토판의 일부는 부서져 있어서 원래의 점토판은 더 크고 더 많은 내용을 포함하고



[그림 4] 피타고라스 삼각형

있을 수 있다. 처음에 이 점토판이 발견되었을 때, 많은 학자들은 이것이 천문학과 관련되어 있거나 다른 상거래를 위한 기록이라고 생각해왔다. 그러나 1945년경에 고고학자인 노이게바우어(Neugebauer)와 사크스(Sachs)에 의해 처음으로 해독된 후에 이것이 수학과 관련된 문서라는 것이 밝혀졌다. 그들은 피타고라스의 3쌍이 되는 숫자 중 두 쌍이 쓰여 있다는 것을 밝혔는데, 예를 들면 아래 수표에서 써있는 (119, 169), (4601, 6649), (65, 97), (481, 769), (1771, 3229), (56, 106)이다. 4개의 열과 15개 행으로 되어있는 이 문서의 두 번째 열은 피타고라스의 3쌍 중에 가장 작은 수이고 세 번째 열은 가장 큰 수이다. 그러므로 직각 삼각형에서 세 번째 열은 빗변이 되고 두 번 째 열은 높이와 밑변 중에 작은 변이 된다. 직각 삼각형의 다른 한변의 길이는 나타나 있지 않다. 4번째 열은 1부터 15까지 순서대로 번호가 매겨져 있다. 현존하는 점토판의 첫 번째 열은 모두 다 1로 시작하지만 불행히도 점토판의 일부가 깨졌기 때문에 더 많은 행이 있을 지도 모르기에 첫 번째 열이 모두 다 1로 시작하는지는 확실치가 않다. 다음은 점토판의 쐐기문자를 아라비아 수로 표시한 것이다.

[표 1] 플림프톤 322를 아라비아수로 표시한 것

$(c/a)^2$	높이 b	빗변 c	번호
1:59:00:15	1:59	2:49	1
1:56:56:58:14:50:06:15	56:07	1:20:25	2
1:55:07:41:15:33:45	1:16:41	1:50:49	3
1:53:10:29:32:52:16	3:31:49	5:09:01	4
1:48:54:01:40	1:05	1:37	5
1:47:06:41:40	5:19	8:01	6
1:43:11:56:28:26:40	38:11	59:01	7
1:41:33:45:14:03:45	13:19	20:49	8
1:38:33:36:36	8:01	12:49	9
1:35:10:02:28:27:24:26	1:22:41	2:16:01	10
1:33:45	45	1:15	11
1:29:21:54:02:15	27:59	48:49	12
1:27:00:03:45	2:41	4:49	13
1:25:48:51:35:06:40	29:31	53:49	14
1:23:13:46:40	56	1:46	15

60진법으로 쓰인 위 수표의 수를 10진법으로 전환하여 보자. 5번째 행의 첫 번째 열인 1:48:54:01:40은 1 + 48/60 + 54/3600 + 1/216000 + 40/12960000 = 1 + 4225/5184 = 9409/5184이며 97/72의 제곱이다. 그리고 4225/5184은 65/72의 제곱이다. 5행의 두 번째 열의 수 1:05는 10진법으로 변환하면 $1\times60+5=65$이고, 3번째 열의 수 1:37는 $1\times60+37=97$이 된다. 또한 11번째 행은 1:33:45인데 이 수를 십진법으로 고치면 1+33/60 + 45/3600 = 25/16이 되며 5/4의 제곱이다. 이 행의 두 번째 열의 45는 45이며 세 번째 열의 1:15는 75이다. 다음 표는 60진법으로 쓰인 위 수표를 10진법으로 변환한 것이다.

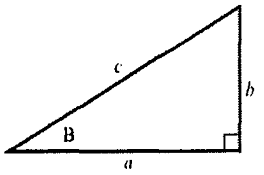
[표 2] 플림프톤 322를 십진법으로 바꾼 것

$(c/a)^2$	높이 b	빗변 c	번호
$(169/120)^2$	119	169	1
$(4825/3456)^2$	3367	4825	2
$(6649/4800)^2$	4601	6649	3
$(18541/13500)^2$	12709	18541	4
$(97/72)^2$	65	97	5
$(481/360)^2$	319	481	6
$(3541/2700)^2$	2291	3541	7
$(1249/960)^2$	799	1249	8
$(769/600)^2$	481	769	9
$(8161/6480)^2$	4961	8161	10
$(75/60)^2 = (5/4)^2 = 25/16$	45	75	11
$(2929/2400)^2$	1679	2929	12
$(289/240)^2$	161	289	13
$(3229/2700)^2$	1771	3229	14
$(106/90)^2$	56	106	15

현재까지 많은 학자들이 이 점토판에 대하여 주장하는 이론 중 두 가지를 소개하면 다음과 같다.

1) D. E. Joyce는 삼각함수표라고 주장한다.[4]

첫째 열은 직각삼각형의 csc ^{1}B의 제곱이며 연결된 각은 대충 1도 차이가 나므로 이표가 45도에서 30도까지의 cosecants의 제곱의 표라고 제안한다. 만약 이것이 사실이라면 이것은 지금부터 몇 천년 전에 발견된 삼각함수의 최초의 예가 될 것이다.



2) Neugebauer는 고대 바빌로니아인들은 피타고라스 3쌍을 찾는 알고리즘을 알고 있었다고 주장한다. 만약 p와 q가 다음을 만족하는 정수라면 $(x, y, z) = (p^2 - q^2,\ 2pq,\ p^2 + q^2)$는 피타고라스의 3쌍이 된다.[5]

(1) p > q > 0
(2) p와 q는 서로소이다.
(3) p와 q 하나는 짝수이고 다른 하나는 홀수이다.

그는 바빌로니아인들이 피타고라스 3쌍을 찾기 위해 매개변수 p와 q를 사용했을 것이라고 주장한다. 그의 주장에 따라 수표를 다시 만들면 다음 표가 된다.

[표 3] 피타고라스 3쌍을 포함한 수표

번호	각	p	q	x	y	z
1	44.76°	12	5	224	119	169
2	44.25°	104	27	2221320	3367	4825
3	43.79°	115	32	2203730	4601	6649
4	43.27°	205	54	2185320	12709	18541
5	42.08°	9	4	215	65	97
6	41.54°	20	9	21320	319	481
7	40.32°	54	25	20936	2291	3541
8	39.77°	32	15	208	799	1249
9	38.72°	25	12	205	481	769
10	37.44°	121	40	20130	4961	8161
11	36.87°	2	1	2	45	75
12	34.98°	48	25	15512	1679	2929
13	33.86°	15	8	15230	161	289
14	33.26°	50	27	1510640	1771	3229
15	31.89°	9	5	148	56	106

Neugebauer와 Sachs은 위 수표로부터 다음 사실을 발견하였다. 첫째 열은 각 수가 완전제곱수이고 이 수에서 1을 빼도 다시 완전제곱수가 나온다. 예를 들면 11번째 행은 25/16인데 25/16에서 1을 빼면 9/16이며 l'.의 제곱이다. 5번째 행은 9409/5184인데 1을 빼면 4225/5184이며 65/72의 제곱이다. 이런 해석에 따르면 첫 번째 열은 $(c/a)^2 = 1 + (b/a)^2$이고 이것은 고대 그리스 수학이 발전하기 이전에 가장 많이 발전된 수학을 보여주고 있다.

Plimpton 322의 오류

Plimpton 322 점토판에는 4개의 오류가 있다. 두 번째와 3번째 열에 각각 2번의 오류가 나타난다. 이것은 필사자들이 숫자를 베끼거나 머리 속에서 생각했던 숫자를 쓰는 과정에서 나타난 것으로 보인다. 어떤 오류는 단순히 8과 9를 바꾸어서 쓴 오류이고 다른 오류는 어떤 수 대신에 제곱한 수를 쓴 것 등이다. 이 오류의 내용을 보면 필사자들이 머릿속에서 계산을 하여 점토판에 쓰는 과정에서 나타난 것으로 추정한다. 첫 번째 오류는 9번째 행과 2번째 열에서 8:1을 9:1.로 쓴 것이다. 이 것은 단순히 필사자가 집중을 하지 않고 쓴 단순 실수로 추정된다. 두 번째 오류는 15번째 행과 3번째 열이다. 1:46대신 53이라고 썼는데 1:46는 53의 두 배되는 수로서 피타고라스 3쌍에 맞는 수가 된다. 세 번째 오류는 13번째 행과 두 번째 열인데 2:41을 7:12:01로 썼다. 7:12:01은 2:41의 제곱인데 필사자가 실수로 제곱근을 구하지 않고 단순히 제곱한 수로 쓴 것으로 보인다. 마지막 오류는 두 번째 행과 3번째 열이다. 3:12:01 라고 쓰여 있는데 1:20:25이 맞다. 이 오류에 대하여선 여러 이론이 있지만 아직까지 어떤 것도 확증되지 않았다.

역수표

고대 바빌로니아인의 계산하는 기술 중 가장 놀랄만한 것은 그들은 복잡한 60진법의 계산을 돕기 위하여 많은 표를 작성한 것이다. 그들은 계산을 위하여 여러 종류의 표를 제작하였으며 높은 수준의 계산을 하였다. 그러나 덧셈이나 나눗셈을 위한 수표는 발견되지 않았고 곱셈을 위한 표들이 대부분이었다. 나눗셈 대신 역수표가 발견되었다. 그들이 모든 나눗셈을 다룬 것은 아니지만, 역수표를 이용하여 나눗셈을 다루었다. 즉, 그들은 n으로 나누는 대신 $\overline{n}=\frac{1}{n}$을 곱하였다. 점토판에 쓰여 있는 한 역수표의 내용은 옆의 그림과 같다[10].

[표 4] 역수표

n	$\overline{n}$	n	$\overline{n}$	n	$\overline{n}$
2	30	16	3,45	45	1,20
3	20	18	3,20	48	1,15
4	15	20	3	50	1,12
5	12	24	2,30	54	1,6,40
6	10	25	2,24	1	1
8	7,30	27	2,13,20	1,4	56,15
9	6,40	30	2	1,12	50
10	6	32	1,52,30	1,15	48
12	5	36	1,40	1,20	45
15	4	40	1,30	1,21	44,26,40

또한 제곱과 세제곱표, 제곱근의 표와 지수표도 발견된다. 지수표는 아마도 복리이자를 보간법으로 계산하는데 쓰였을 것이다. 그들은 이런 종류의 표를 측량에 쓰이는 단위들을 전환하기 위하여 만들었던 것 같다.

결 론

바빌로니아 수학은 이미 발달된 메소포타미아 시대의 실용적인 산술과 측량 등 생활의 필요와 관리경영을 위해서도 많은 수학의 발전이 필요하였다. 측량이나 일의 분담 같은 오랜 기간의 사회적 필요에 의하여 수학이 태동되었고 태동 이후 많은 수학자들은 실생활을 위한 수학이 아니라 수학 자체를 즐기면서 수학의 묘미에 빠져 들어갔던 것 같다. 필자는 바빌로니아 수학의 역사적 배경에 대한 연구를 하면서 박물관에서 보았던 점토판에 대한 인식이 새롭게 바뀌었다. 전에는 단순한 점토판으로만 보았지만 앞으로는 그 안에 새겨진 내용에 관하여도 많은 관심을 갖게 될 것이다. 지금까지 발굴된 점토판의 내용에 따라 여러 가지 이론이 전개되었지만 이후에 더 많은 고고학적인 유물이 발견되면 지금까지의 주장이 수정될 수도 있을 것이다. 역사를 보면 예술을 비롯한 사회의 발달 가운데에는 항상 수학이 핵심적인 역할을 해왔다. 피타고라스의 3쌍의 대한 연구가 바빌로니아 시대에는 별로 주목을 받지 못하고 수학 자체를 즐기는 사람들에 의하여 이루어졌을지도 모른다. 후에 고대 그리스에서 피타고라스학파를 중심으로 피타고라스정리를 비롯한 많은 수학 이론을 정립하여 피타고라스의 3쌍의 연구가 수학사에서 중요한 자리를 차지하게 되었다. 우리 시대에 진행되고 있는 많은 연구가 현재에는 의미를 알 수 없을지라도 미래에 후손들이 수학사를 연구할 때는 큰 의미를 부여할 수도 있을 것이고 미래에도 수학은 인류문화를 더욱 풍요롭게 만들며 끊임없이 발전할 것이다.

참고문헌

1. R. C. Buck, Sherlock Holmes in Babylon, Amer Math. Monthly 87 (1980) 335-345.
2. E. M. Bruins, On Plimpton 322, Pythagorean numbers in Babylonian mathematics, Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Proceedings 52 (1949) 629-632.
3. ______, Pythagorean triads in Babylonian mathematics: The errors on Plimpton 322, Sumer 11 (1955) 117-121.
4. D. E. Joyce, Plimpton 322, , Clark University, 1995.
5. O. Neugebauer, and A. J. Sachs, Mathematical Cuneiform Texts, American Oriental Series, vol. 29, American Oriental Society and the American Schools of Oriental Research, New Haven, 1945.
6. E. Robson, Three Old Babylonian methods for dealing with "Pythagorean" triangles, Journal of

Cuneiform Studies 49 (1997) 51-72.

7. ____, Mesopotamian Mathematics, 2100-1600 BC: Technical Constants in Bureaucracy and Education, Oxford Editions of Cuneiform Texts, vol. 14, Clarendon Press, Oxford, 1999.
8. ____, Mesopotamian mathematics: some historical background, in Using History to Teach Mathematics, V. J. Katz, ed., Mathematical Association of America, Washington, D.C., 2000, pp. 149-158.
9. ____, Neither Sherlock Holmes nor Babylon: a reassessment of Plimpton 322, Historia Mathematica 28(2001)167-206.
10. http://it.stlawu.edu/~dmelvill/mesomath/