

論文

시간유한요소법을 이용한 분포형 구동기의 형상최적화에 관한 연구

석진영*, 김유단**

A Study on Shape Optimization of Distributed Actuators
using Time Domain Finite Element Method

Jinyoung Suk* and Youdan Kim**

ABSTRACT

A dynamic analysis method that freezes a time domain by discretization and solves the spatial propagation equation has a unique feature that provides a degree of freedom on spatial domain compared with the space discretization or space-time discretization finite element method. Using this feature, the time finite element analysis can be effectively applied to optimize the spatial characteristics of distributed type actuators. In this research, the time domain finite element method was used to discretize the model. A state variable vector was used in the discretization to include arbitrary initial conditions. A performance index was proposed on spatial domain to consider both potential and vibrational energy, so that the resulting shape of the distributed actuator was optimized for dynamic control of the structure. It is assumed that the structure satisfies the final rest condition using the realizable control scheme although the initial disturbance can affect the system response. Both equations on states and costates were derived based on the selected performance index and structural model. Ricatti matrix differential equations on state and costate variables were derived by the reconfiguration of the sub-matrices and application of time/space boundary conditions, and finally optimal actuator distribution was obtained. Numerical simulation results validated the proposed actuator shape optimization scheme.

초 록

시간유한요소법은 시간영역을 고정시키고 행렬 미분방정식 형태의 공간전파 관계식을 품으로써 시간과 공간에 대한 동적 해석을 수행하는 방법이다. 이 방법은 공간이산화 유한요소법이나 시/공간 동시이산화 유한요소법에 비해 공간에 관한 자유도가 발생하는 것이 두드러진 특징으로, 이를 이용하여 분포형 구동기의 공간에 따른 특성을 최적화하는데 효율적으로 사용될 수 있다. 본 논문에서는 임의의 초기조건을 반영할 수 있도록 구성된 상태변수 벡터를 이용하여 구조물을 시간영역에서 이산화하고, 공간영역에서 전파관계식 및 경계조건을 이용하여 공간전파 관계식을 형성하였다. 이 때 구동기의 공간에 따른 형상 분포는 설계되어야 할 변수의 함수이고, 시간반응은 형상함수를 이용하여 이산화하였다. 포텐셜 에너지 및 운동에너지를 구조물의 변위제어에 적절한 최적의 성능지수로 설정하고, 이를 최소화하도록 미지의 함수인 구동기의 분포형상을 구하였다. 일반적으로

구조물은 임의의 초기조건에서 외란을 받게 되나, 본 연구에서는 구현가능한 제어법칙을 이용하여 최종시간에서 안정화(rest) 조건을 만족한다고 가정하였다. 구동기 분포형상 최적화를 위해 상태/준상태 방정식을 유도하였다. 서브행렬 재

* 2005년 5월 23일 접수 ~ 2005년 8월 11일 심사완료

* 정희원, 충남대학교 항공우주공학과
연락처, E-mail : jsuk@cnu.ac.kr
대전광역시 유성구 궁동 220

** 정희원, 서울대학교 기계항공공학부

형상화와 시/공간 경계조건을 통해 상태변수와 준상태변수에 대한 Ricatti 미분방정식을 유도하였다. 이를 통해 구동기 분포형상 최적화를 구현하였으며, 수치 시뮬레이션을 통해 적절한 구동기의 분포형상 최적화를 수행할 수 있음을 보였다.

Key Words : Time domain(시간 영역), Spatial Propagation(공간 전파), Performance Index(성능 지수), Optimization(최적화)

1. 서 론

21세기에 접어들면서 우주공간에 대한 활용가능성에 대해 새로운 각도에서 접근하고 있다. 국제우주정거장에 대한 다국적 협력이 활발해지고, 우리나라도 국제우주정거장 계획에 참가하여 연구성과를 공유할 계획이다. 국제우주정거장 및 3축 안정화 인공위성 등 대부분의 우주비행체는 태양전지판을 포함하는 매우 유연한 구조물로 이루어져 있으며, 이러한 구조적 유연성에 기인하는 동적 해석 및 진동제어와 관련된 연구가 지난 이십여년 동안 지속적인 관심 속에 진행되어 왔다.

한편, 1990년대 이후로 스마트 구조물이라는 구동기 및 감지기 내장형 구조물에 대한 관심이 집중되었는데[1-3], 형상기억합금(SMA, Shape Memory Alloy)이나 PZT, PVDF 등의 압전 트랜스듀서는 구조물에 내장되거나 외장되어 구조물의 변위 등 동특성을 파악할 수 있으며, 구동시스템으로도 사용될 수 있어 이에 관한 연구가 국내외적으로 광범위하게 전개되고 있다. 또한, 내장형 감지기의 감지 민감도 향상 및 구동기의 구동력 증대/전력공급원 문제 등 기술적인 문제점들을 조금씩 해결해 가고 있다. 이러한 스마트 구동기의 분포형상에 관한 최적화 문제는 최소의 제어력 및 구동파워로 구조물의 능동진동억제 등 제어목적만을 만족시킬 수 있으므로 Payload에 대한 제약사항이 심한 우주공간에서의 활용가능성에 대한 관심이 증가되고 있다. 예를 들어, 태양전지판이 전개된 3축 안정화 인공위성처럼 유연한 우주비행체의 경우에 태양전지판의 진동에 의한 포인팅 정밀도가 떨어질 수 있으므로 적극적인 방법으로 이를 보상할 필요가 있다. 이 때 스마트 구조물을 효과적으로 사용할 수 있으며, 구동기의 분포형상을 최적화 한다면 최소의 소비전력으로 제어 목적을 실현할 수 있다. 따라서 장차 우주공간에서 이러한 구동기를 기존의 반작용 휠 및 추력기 등과 병행하여 사용할 수 있을 것이다.

현재까지 구동기의 위치 최적화 문제는 두 갈래로 나누어 진행되어 왔다. 첫째는 Point-Force 구동기에 대한 문제로서 일점에 작용하기 때문에

분포면적과 관계없이 작용위치만 결정하는 문제이다. 이 경우에는 Topology 접근법으로서 트러스 등의 특정부분에 구동기를 위치시키는 문제가 중요한 관심사로 대두되었다[4]. 두 번째는 분포형 구동기로써 위치뿐만 아니라, 폭과 높이 등을 동시에 결정하는 방법이다[5].

초기에는 구동기 위치 및 분포 최적화 문제를 구조물의 진동에너지 한계를 구속조건으로 하고, 제어입력 에너지와 구조물의 무게를 최소화하도록 하는 다목적 최적화(MDO)문제로 귀결되었다. 이러한 접근방식은 최근에도 여전히 유효하게 활용되고 있다[6-8]. 한편, 제어 관점에서 보면 구동기 최적화 문제를 개회로 제어시스템에서 접근하여 최소의 입력으로 최대의 출력을 가진할 수 있는 Controllability Measure를 설정하고 이를 최대화하는 문제로 귀착시킨 방법[9-11]과 폐회로 입장에서 특정한 제어시스템을 적용하여 이에 가장 적절한 구동기 위치를 푸는 방법[12-16]으로 나누어진다. 앞에서 언급한 모든 구동기 최적화 기법에서 사용되는 구동기 및 플랜트의 모델링은 모두 공간이산화 유한요소법을 사용하였다. 이러한 방식은 구동기의 파라미터를 공간이산화 기법으로 이산화하기 때문에 엄밀한 의미에서 공간에 대한 연속성을 보장하지 못한다. 즉, 최적의 구동기 위치/형상이 결정되어도 수치적으로 어느 정도의 성능저하를 가져올 수밖에 없다.

본 논문에서는 분포형 구동기의 공간분포 자체를 연속함수로 두고 이를 최적화하는 방법을 제안하였다. 이러한 방식은 기존의 공간이산화 유한요소법에서는 불가능하며, 시간이산화 유한요소법 및 공간전파 관계식을 이용함으로써 가능하게 된다. 전통적인 공간이산화 유한요소법에 대해 시간영역을 고정시켜 공간분포 시스템에 대한 설계자유도를 확보하려는 방법이 제안된 바 있는데, 시간영역 유한요소해석을 이용하여 구성된 행렬미분방정식은 구조물의 변위 제적을 비롯한 다른 상태변수의 해를 공간좌표에 대해 구할 수 있게 공식화되었다[17]. 따라서 공간에 따른 분포형 구동기의 제어력 특성을 설계하여 시스템의 동적 반응에 연결시킬 수 있는 동역학적 문제를 시간유한요소법을 이용하여 해결할 수 있는

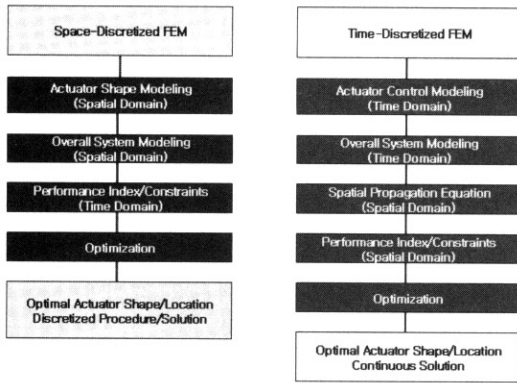


Fig. 1. Two Approaches on Optimal Actuator Configuration

것이 시간유한요소법에 의한 공간전파 관계식이 가지는 큰 장점이라고 하겠다.

본 논문에서는 시간이산화 유한요소법을 이용하여 대상 구조물을 이산화하였다. 임의의 초기 조건을 반영할 수 있도록 구성된 상태변수 벡터를 이용하여 구조물을 시간영역에서 이산화하고, 공간영역에서 전파관계식 및 경계조건을 이용하여 공간전파 관계식을 형성하였다. 이 때 구동기의 공간에 따른 형상분포는 설계되어야 할 변수의 미지의 함수가 된다. 구조물의 변위제어에 적절한 최적의 성능지수를 포텐셜 에너지 및 운동 에너지를 이용하여 설정하고, 이를 최소화하도록 미지의 함수인 구동기의 형상분포를 구함으로써 최적의 구동기 형상을 설계하였다. Fig. 1에 구동기 최적화에 대한 기존의 연구방법과 본 연구에서 제안된 기법과의 절차를 비교하여 나타내었다.

II. 시간유한요소법에 의한 모델링

분포형 구동기의 형상 최적화는 스마트 구조물을 설계할 때 매우 중요한 문제이다. Fig. 2와 같이 분포형 구동기가 공간상에 분포한다고 가정하고, 이를 공간에 대한 분포와 시간에 대한 가진력 사이에 상호 독립적이라고 가정한다. 실제로 압전구동기 등의 스마트 구조물은 가진력이

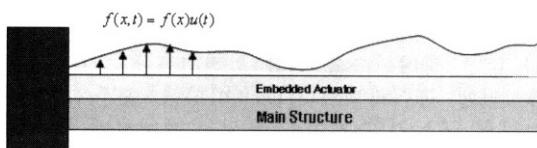


Fig. 2. Actuator Placement for Smart Structures

외부전압이고 구동기의 내부 스트레인에 의해 작용력이 발생하므로 이러한 가정은 타당하다. 본 연구에서는 시간이산화 유한요소법에 의한 모델링을 수행하였다. 그 결과로 얻은 공간분포에 관한 함수인 $f(x)$ 를 설계변수로 하여 공간전파 관계식을 구속조건으로 하고, 성능지수를 설정하여 최적의 구동기 분포형상 $f^*(x)$ 를 구함으로써 구동기 최적화 문제를 접근하였다.

일반적인 분포형 파라미터 시스템의 운동을 묘사하기 위해 시간영역에서 확장된 해밀톤의 원리를 이용하여 행렬파동 방정식을 유도하였다. 구조물을 Euler-Bernoulli 보로 가정하고 가로방향의 변위만을 고려하면 보의 운동에너지는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$T = \frac{1}{2} \int_L \rho(x) \dot{w}^2(x,t) dx \quad (1)$$

여기서 $u(x,t)$ 는 보의 변위, L 은 보의 길이를 나타낸다. 피적분 인자에 대한 변분을 취하고 포텐셜 에너지에 대해서도 같은 수학적 과정을 거치도록 한다. 한편, 비보존 분포력 $f(x,t) = f(x) \cdot u(t)$ 에 의한 가상일은 다음의 형태를 취한다.

$$\int_T \delta W dt = \int_T \int_L f(x) u(t) \delta w(x,t) dx dt \quad (2)$$

여기서 $f(x) \cdot u(t)$ 는 구조물에 작용하는 임의의 분포외력이다. 파동방정식은 확장된 해밀톤의 원리를 이용하여 다음과 같이 얻어진다.

$$\int_T \delta(T - V) dt + \int_T \delta W dt = 0 \quad (3)$$

연속체에 대한 N -자유도 미분방정식을 얻기 위해서 특정시간에서의 구조물의 변위 및 가상변위는 다음과 같이 이산화할 수 있다.

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \sum_i \phi_i(t) w_i(x) \\ \delta w(x,t) &= \sum_i \phi_i(t) \delta w_i(x) \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 $\phi_i(t)$ 들은 미리 지정된 초기 및 말기조건들을 만족하도록 선정된 형상함수인데, 형상함수들은 시간에 대한 첫 번째 미분이 존재하도록 해야 한다. 상태변수 벡터 $w(x) = [w_1(x) \ w_2(x) \ \dots \ w_N(x)]^T$ 는 공간영역의 함수로서 나타낸 보의 변위에 대한 시간수열(time sequence)이다. 이제 확장된 해밀톤의 원리를 이용하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\int_L [\delta w^T M \dot{w} - \delta w^T K w'' + \delta w^T F f(x)] dx = 0 \quad (5)$$

여기서

$$M_{ij} = \int_{\Delta t} \rho \dot{\phi}_i(t) \dot{\phi}_j(t) dt$$

$$K_{ij} = \int_{\Delta t} EI \phi_i(t) \phi_j(t) dt$$

$$F_i = \int_{\Delta t} \phi_i(t) u(t) dt$$

조합된 행렬 미분방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$-Mw + Kw^{(4)} = Ff(x) + F_0 w_0(x) \quad (6)$$

여기서 $w_0(x)$ 는 보의 초기 변위분포이며, F_0 는 보의 초기변위와 관련된 영향벡터이다. 식(6)에서 보듯이 보의 공간전파는 외력의 공간분포와 밀접한 관계가 있다. 이러한 공식화에서 동적 시스템의 초기 및 말기조건은 공간영역 유한요소해석시의 경계조건과 유사한 역할을 한다. Fig. 3에 시간유한요소법을 이용하여 모델링하는 절차를 나타내었다.

다양한 종류의 기하학적/자연적 경계조건에 대해 구조물의 초기조건에 의한 공간전파는 상태변수 벡터를 $y(t) \equiv [w(x) \frac{dw(x)}{dx} M(x) V(x)]^T$ 로 정의하고, 식(6)을 상태공간식으로 변환시켜 두점 경계치 문제를 풀어서 구할 수 있다.

$$\frac{dy(x)}{dx} = Ay(x) + Bf(x) + B_0 w_0(x) \quad (7)$$

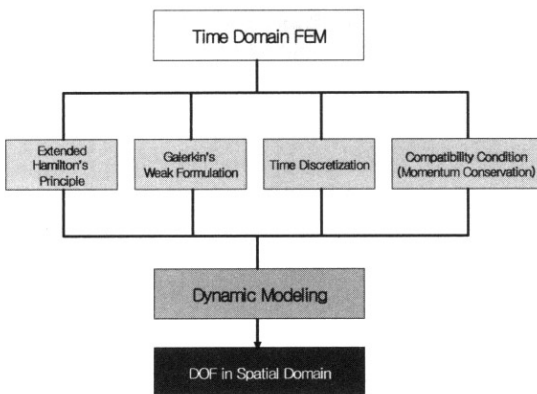


Fig. 3. Modeling Procedure using Time Domain Finite Element Method

여기서

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(EI)} I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ EIK^{-1}M & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ EIK^{-1}F \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ EIK^{-1}F_0 \end{bmatrix}$$

여기서 I 는 시간유한요소법에 의해 구성된 노드의 개수와 행렬의 차원이 동일한 단위행렬이다. 굽힘 모멘트와 전단력의 공간분포 관계를 이용하고, 상태천이행렬 $\Psi(x)$ 를 이용하여 상태변수 벡터 $y(x)$ 를 공간에 대한 함수로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y(x) = \Psi(x, x_0)y(x_0) + \int_{x_0}^x \Psi(x, \zeta) [Bf(\zeta) + B_0 w_0(\zeta)] d\zeta \quad (8)$$

여기서 $\Psi(x, x_0) = e^{A(x-x_0)}$ 는 공간전파에 관한 상태천이 행렬이다. 본 논문에서 고려하는 양단 경계조건을 가지는 구조물의 경우에 경계조건의 초기치 및 종말치를 이용하여 굽힘모멘트 $M(x)$ 과 전단력 $V(x)$ 에 대해 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} M(0) \\ V(0) \end{bmatrix} = -\Omega_{22}^{-1} \begin{bmatrix} \mu_3 \\ \mu_4 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} w(L) \\ \frac{dw(x)}{dx} \Big|_{x=L} \end{bmatrix} = -\Omega_{12} \Omega_{22}^{-1} \begin{bmatrix} \mu_3 \\ \mu_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}$$

여기서

$$\Omega = \Phi e^{AL} \Phi^{-1} \equiv \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{bmatrix}$$

$$\mu = \Phi e^{A(L-x_f)} \Phi^{-1} B + \Phi H \Phi^{-1} B_0$$

$$H = \int_0^L e^{A(L-\zeta)} w_0(\zeta) d\zeta$$

위 식에서 알 수 있듯이 구조물의 양단에서의 물리적/구조적 특성은 상태천이 행렬의 부행렬의 역변환을 통해 구해진다. 식(9)에 주어진 역행렬의 존재성에 대해 검토해 보면, 행렬 Ω_{22} 는 증대된 상태공간 시스템 행렬의 행렬지수식에 의

해 구해진 상태천이 행렬의 부행렬이다. 상태천이 행렬의 판별식 계산에서 전파되는 수치적 오차는 원행렬의 조건수와 관련되어 있다. 즉, 상태천이 행렬의 역조건수가 작게 될수록 판별식은 0에 접근하게 되어 특이(singular)행렬이 된다. 따라서 상태천이 행렬의 역조건수가 적절한 경계를 벗어나게 되면 수치 역변환에서 문제가 발생할 수 있다. 이러한 수치적 문제를 해결하기 위해서는 고려하고 있는 구조물의 유연도가 기준치를 초과할 경우에 해석적인 해법에 의한 공간전파 관계식을 적용해야 한다.

III. 구동기 분포형상 최적화

본 절에서는 시간유한요소법을 이용한 구동기의 분포 설계를 위하여 분포형상 최적화를 수행하는 과정을 설명하고자 한다. 공간에 관한 변위, 변위각, 굽힘모멘트, 전단력이 보의 길이방향으로 전파하는 특성을 지배하는 미분방정식 (2)에서 $f(x)$ 는 공간에 관한 설계변수이다. 최적화 설계를 수행하기 위해서는 성능지수를 적절히 선정하여야 한다. 본 연구에서 제안되는 성능지수는 시간영역이 아니라 공간영역을 따라 전파하는 파동 물리량의 에너지를 바탕으로 선정된다. 즉, 공간을 따라 시간모드들이 전파하는 것을 공간전파 관계식의 구속조건 하에서 진동에너지 개념을 적용하게 된다. 또한, 최적 입력 선정문제는 공간상에서 최적의 구동기 분포문제가 된다. 성능지수를 아래와 같이 공간상에 따른 진동에너지 및 구동기 분포면적을 최소화하도록 제안할 수 있다.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^L \{y^T(x) Q y(x) + f^T(x) R f(x)\} dx \quad (10)$$

위 식의 성능지수를 물리적 공간 및 모달공간에서 해석적으로 표현한 관계식을 얻을 수 있는데, 이를 부록에 수록하였다. 최적조건(Optimality Condition)에 의해 다음과 같이 상태/준상태 변수에 관한 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{y}(x) \\ \dot{\lambda}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(x) \\ \lambda(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_0 u(x) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

여기서 구동기 설계변수 $f(x) = -R^{-1}B^T\lambda(x)$ 와 같이 준상태변수(costate) $\lambda(x)$ 에 대한 함수로 나타낼 수 있다. 이렇게 언어진 문제는 일종의 선형최적 추적문제와 동일한 형태가 된다. 다만, 본 추적문제에서 독립변수는 시간이 아니라 공간에 관한 변수 x 이며, 경계조건은 다음과 같이 구조

물의 이점경계치 조건을 부여하는 것으로 시간영역 추적문제와 쌍대성을 가진다고 할 수 있다.

$$y_i(0) = 0, (i=1, \dots, 2N), \quad \lambda_j(0) = 0, (j=2N+1, \dots, 4N)$$

$$\lambda_i(L) = 0, (i=1, \dots, 2N), \quad y_j(L) = 0, (j=2N+1, \dots, 4N)$$

구조물의 양단 경계치 조건을 적용하기 위하여 다음과 같이 상태변수와 준상태변수를 분리하여 행렬 미분방정식을 변환시킨다.

$$y(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{bmatrix}, \quad \lambda(x) = \begin{bmatrix} \lambda_1(x) \\ \lambda_2(x) \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1(x) \\ \dot{\lambda}_2(x) \\ \dot{y}_2(x) \\ \dot{\lambda}_1(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & -B_{r12} & -B_{r11} & A_{12} \\ -Q_{21} & -A_{22}^T & -Q_{22} & -A_{21}^T \\ A_{21} & -B_{r22} & A_{22} & -B_{r21} \\ -Q_{11} & -A_{12}^T & -Q_{12} & -A_{11}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(x) \\ \lambda_2(x) \\ y_2(x) \\ \lambda_1(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{01}u_0(x) \\ B_{02}u_0(x) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

여기서 $B_r = BR^{-1}B^T$ 이다. 위 식에서 상태변수 벡터를 두 개씩 묶어 두 개의 서브벡터 $X_1(x)$, $X_2(x)$ 로 분류하여 다음과 같이 공간에 관한 상태천이 행렬식을 만들고 양단에서의 경계조건을 대입한다.

$$\begin{bmatrix} X_1'(x) \\ X_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(x) \\ X_2(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix} \quad (13)$$

여기서

$$X_1(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ \lambda_2(x) \end{bmatrix}, \quad X_2(x) = \begin{bmatrix} y_2(x) \\ \lambda_1(x) \end{bmatrix}$$

$$D_{11} = \begin{bmatrix} A_{11} & -B_{12} \\ -Q_{21} & -A_{22}^T \end{bmatrix}, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} -B_{11} & A_{12} \\ -Q_{22} & -A_{21}^T \end{bmatrix},$$

$$D_{21} = \begin{bmatrix} A_{21} & -B_{22} \\ -Q_{11} & -A_{12}^T \end{bmatrix}, \quad D_{22} = \begin{bmatrix} A_{22} & -B_{21} \\ -Q_{12} & -A_{11}^T \end{bmatrix}$$

$X_1(0)$, $X_2(L)$ 은 정의되어 있다고 하고, 다음의 식을 가정하자.

$$X_2(x) = K(x)X_1(x) + s(x) \quad (14)$$

상태천이 관계식으로부터 다음의 식이 성립한다.

$$X_1(x_f) = \phi_{11}(x_f, x)X_1(x) + \phi_{12}(x_f, x)X_2(x) \quad (15)$$

$$0 = \phi_{21}(x_f, x)X_1(x) + \phi_{22}(x_f, x)X_2(x)$$

$$X_2(x_f) = \phi_{22}^{-1}(x_f, x)\phi_{21}(x_f, x)X_1(x_f) = 0 \quad (16)$$

위의 식은 $X_1(x_f) = 0$ 을 의미하지는 않으며, 상태천이 부행렬과 준상태변수의 조합으로 최종 식이 0이 됨을 의미한다. 상태변수 및 준상태변수에 대한 미분방정식을 이용하여 수식을 정리하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} X_2'(x) &= K'X_1(x) + KX_1'(x) \\ &= D_{21}X_1(x) + D_{22}X_2(x) \end{aligned} \quad (17)$$

위 식을 정리하면 공간에 관한 전과 이득행렬 $K(x)$ 및 $s(x)$ 가 다음과 같이 Ricatti 방정식을 만족함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} K'(x) + K(x)D_{11} + K(x)D_{12}K(x) - D_{21} - D_{22}K(x) &= 0 \\ s'(x) + [K(x)D_{12} - D_{22}]s(x) + K(x)f_1(x) - f_2(x) &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

한편, 경계조건으로부터 다음 식을 얻을 수 있다.

$$X_2(x_f) = 0 = K(x_f)X_1(x_f) + s(x_f) \quad (19)$$

그런데, 임의의 $X_1(t_f) \neq 0$ 에 대해 성립해야 하므로 서로 독립적인 두 이득행렬에 대한 경계조건은 다음과 같다.

$$K(x_f) = 0, \quad s(x_f) = 0$$

위의 분포형상 최적화 문제를 풀기 위해서는 행렬 미분방정식을 전방향/후방향으로 수치적분을 수행해야 한다. 이상과 같이 상태변수 벡터 X_2' 에 대한 행렬미분방정식 하나와 선형최적 추적문제에서와 유사한 두 개의 행렬미분 리카티 방정식을 얻을 수 있다. 따라서 수치적분으로 준상태변수를 구할 수 있고, 이로부터 최적 구동기 분포형상을 결정지을 수 있다. 구동기의 분포형상 최적화를 위한 절차를 Fig. 4에 정리하였다.

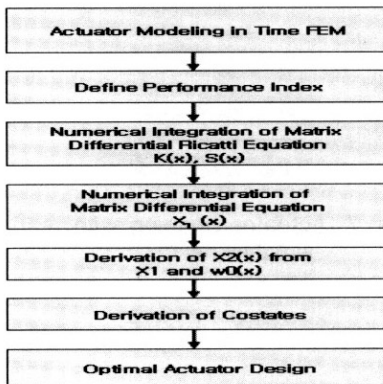


Fig. 4. Numerical Procedure for Actuator Placement

IV. 수치 예제

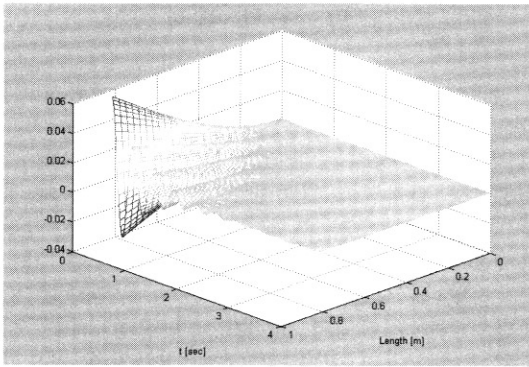
앞절에서 제안한 구동기 분포형상 최적화 과정을 외팔보 문제에 적용하였다. 본 연구에 적용된 예제의 물성치는 표 1과 같다. 구동입력의 기준형상을 설정하기 위하여 보의 끝단에 1N의 힘을 가할 때의 초기 분포형상으로부터 이를 안정화하는 입력을 선형최적화 방법으로 구한 값을 사용하였다. 시간유한요소 해석 시에 관련된 매개변수로는 시간영역 유한요소의 분할 개수, 사용된 형상함수의 차수 및 모델 저차원화 정도가 있다. 이들 각각에 대한 시뮬레이션을 실시한 결과, 최적화 결과에 큰 영향을 미치지 않음을 알 수 있었다.

Table 1. Configuration Parameters for a Flexible Structure

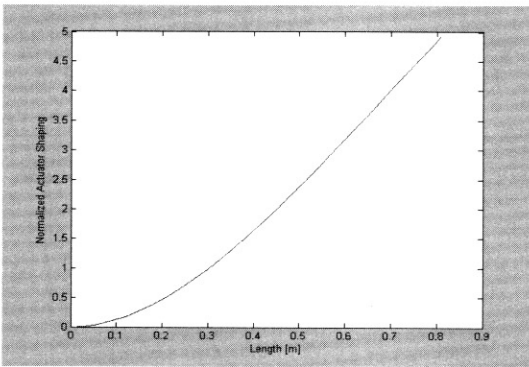
Parameter	Value	Units
mass density	2800	kg/m ³
Young's Modulus	7.5842 × 10 ¹⁰	N/m ²
thickness	0.0020	m
width	0.0635	m
length	0.8100	m

본 수치 예제에서는 시뮬레이션 시간 4초, 200개의 시간영역 유한요소를 사용하였으며, 모델 저차원화를 수행하여 원 모델의 1/5개의 일반화된 시간영역 모드 좌표(modal coordinates)를 사용하였다. 시간영역 모드 좌표계에서 구현된 리카티 방정식으로부터의 해를 이용하여 최적화를 수행한 결과, 대상 모델의 초기치 반응 및 최적화된 구동기 형상분포 해를 Fig. 5에서 보여주고 있다. 그림에서 구동기의 최적 형상분포는 끝단으로 갈 수록 큰 파워를 가지도록 구동기를 분포시키는 것이 진동에너지를 최소화하는 데에 적절하다는 것을 제시하고 있다. 이러한 결과는 본 연구에서 구조물의 해당 위치에서 힘을 발생하는 구동기를 가정하였으므로 타당한 결과라고 사료된다. 다른 구동기의 종류로서 모멘트를 발생하는 구동기를 가정하게 되면, 시간유한요소 해석 시에 이를 고려하여 모델링을 수행하여 그에 따른 결과를 유도할 수 있을 것으로 생각되며, 이 경우에는 구조물의 뿌리 부분에서 큰 파워를 가지는 경향으로 결과가 나올 것으로 사료된다.

식(10)으로 표현된 성능지수에 진동에너지 총합과 분포면적에 대한 가중치를 서로 다르게 한



(a)



(b)

Fig. 5. Results of the Actuator Placement (Weight on Q = 200)
 (a) 3-dimensional time response
 (b) optimized actuator shaping

에 나타내었다. Table 2에서 보듯이 분포면적에 대한 상대적인 가중치가 클 수록 분포면적의 절대값이 커지는 한편, 증대된 제어력으로 인해 구조물이 진동에너지는 초기 값으로부터 더 빠른 속도로 수렴하고 있음을 볼 수 있다. 표의 최종 진동에너지와 구조물의 분포형상은 이를 수치적으로 정량화한 값으로서 그림에서 나타난 사실을 뒷받침하고 있다. 한 가지 흥미로운 사실은 진동에너지를 최소화시키도록 가중치를 높이면 제어효과와 구동기의 분포면적은 일정한 값으로 수렴해 간다는 것이다. 이러한 결과를 바탕으로 구동기의 분포형상을 결정하는 기준 값으로 활용할 수 있을 것으로 판단된다.

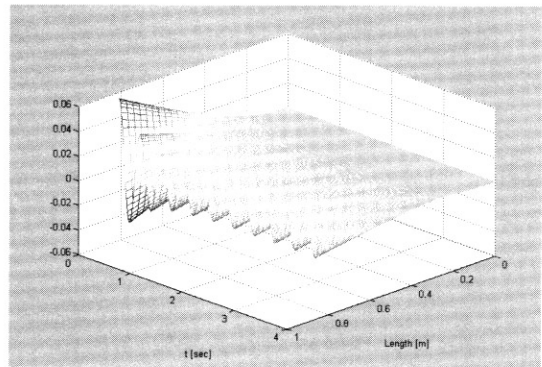


Fig. 6. 3-dimensional time response (Weight on Q = 20)

Table 2. Vibration Energy and Actuator Power with respect to Weight on Q

Weight on Q	Vibration Energy[Nm]	Actuator Power[N ² /m]
20	3.4483e-001	2.1830e+000
200	1.3614e-001	2.6503e+000
2000	1.3359e-001	2.7052e+000
10000	1.3356e-001	2.7107e+000

경우에 대한 구동기의 최적 분포형상과 이에 따른 외팔보의 시간반응을 Figs. 6-7에서 보여주고 있다. 이 때 진동에너지 항에 대한 상대적인 가중치를 부여하기 위하여 가중행렬 Q 에 일정한 값을 곱하여 그 결과를 살펴보았으며, 진동에너지와 분포면적으로 나타내어지는 구동파워를 Table 2

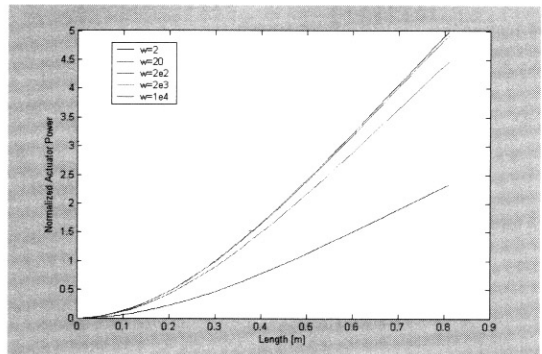


Fig. 7. Actuator Shaping with respect to weights on Q

V. 결 론

본 논문에서는 시간유한요소법을 이용하여 구동기 분포형상 최적화를 수행하는 절차를 제안하였다. 시간유한요소법을 이용하여 공간전파 관계

식을 유도하고, 그 결과 공간에 대한 자유도를 이용하여 최적의 구동파워를 가질 수 있도록 구동기의 분포형상을 공간에 대한 연속적인 값으로 구할 수 있음을 보였다. 시간영역 모드 좌표계에서 최적화 과정을 수행하였으며, 모드 저차원화를 통해 계산시간을 줄이면서도 정확도를 유지할 수 있음을 알 수 있었다. 힘을 발생시키는 구동기에 대한 수치예제를 통하여 대상 구조물의 진동을 적절히 제어할 수 있는 구동기의 분포형상을 수치적으로 구할 수 있음을 보였다. 모멘트 발생 구동기 등 구동기의 종류에 따른 특성은 시간유한요소 해석시에 모델링 부분에 반영될 수 있을 것으로 보이며, 이는 추후 연구되어야 할 과제이다. 본 논문의 결과로 구동기 분포형상을 최적화하는 기본적인 체계를 구축하였으므로, 이 결과를 활용하여 양단 경계조건을 가지는 임의의 스마트 구조물에 대한 제어시스템 구성을 위한 구동기 최적화에 적용할 수 있을 것으로 기대된다.

후 기

이 논문은 2003년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음 (KRF-2003-041-D00157)

참고문헌

1) L. R. Ray, and L. Tian, "Damage Detection in Smart Structures, Through Sensitivity Enhancing Feedback Control", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 227, No. 5, 1999, pp. 987-1002.

2) S. Narayanan, and V. Balamurugan, "Finite Element Modeling of Piezolaminated Smart Structures for Active Vibration Control with Distributed Sensors and Actuators", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 262, No. 3, 2003, pp. 529-562.

3) 방형준, 김대현, 홍창선, 김천곤, "스마트 구조물의 동시다점 진동 취득용 안정화된 광섬유 브래그 격자 센서 시스템의 개발", 한국항공우주학회지, 제31권, 제1호, 2004, pp. 50-57.

4) D. K. Anthony, "Robustness of Optimal Design Solutions to Reduce Vibration Transmission in a Lightweight 2-D Structure", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 245, No. 3, 2001, pp. 417-431.

5) S. Devasia, T. Meressi, B. Paden, and E. Bayo, "Piezoelectric Actuator Design for Vibration Suppression: Placement and Sizing", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 16, No. 5, 1993, pp. 859-864.

6) J. Kim, J.K. Ryou, and S. J. Kim, "Optimal Gain Distribution for Two-Dimensional Modal Transducer and Its Implementation Using Multi-Layered PVDF Films", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 251, No. 3, 2002, pp. 395-408.

7) Y.J. Yan, and L.H. Yam, "A Synthetic Analysis on Design of Optimum Control For An Optimized Intelligent Structure", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 249, No. 4, 2002, pp. 775-784.

8) Y. Kim, D. Kum, and C. Nam, "Simultaneous Structural/Control Optimum Design of Composite Plate with Piezoelectric Actuators", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol.20, No.6, 1997, pp. 1111-1117.

9) C.N. Viswanathan, R.W. Longman, and P.W. Likins, "A Degree of Controllability Definition: Fundamental Concepts and Application to Modal Systems", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 7, No. 2, 1984, pp. 222-230.

10) A. Arbel, "Controllability Measures and Actuator Placement in Oscillatory Systems", *International Journal of Control*, Vol. 33, No. 3, 1981, pp. 565-574.

11) I. Bruant, G. Coffignal, and F. Lene, "A Methodology for Determination of Piezoelectric Actuator and Sensor Location on Beam Structures", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 243, No. 5, 2001, pp. 861-882.

12) K. Jiramoto, H. Doki, and G. Obinata, "Optimal Sensor/Actuator Placement for Active Vibration Control Using Explicit Solution of Algebraic Riccati Equation", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 229, No. 5, 1999, pp. 1057-1075.

13) W. Gawronski, "Simultaneous Placement of Actuators and Sensors", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 228, No. 4, 1999, pp. 915-922.

14) S.M. Yang, "Stability Analysis of Linear Structural Control Systems with Noncolocated Feedback", *Computers and Structures*, Vol. 62, No. 4, 1997, pp. 685-690.

- 15) K. Choe, and H. Baruh, "Actuator Placement in Structural Control", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 15, No. 1, 1992, pp. 40-48.
- 16) M.L. DeLorenzo, "Sensor and Actuator Selection for Large Space Structure Control", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 13, No. 2, 1990, pp. 249-257.
- 17) J. Suk, and Y. Kim, "Time Domain Finite Element Analysis of Dynamic Systems", *AIAA Journal*, Vol. 36, No. 7, 1998, pp. 1312-1319.

부 록 : 성능지수의 해석적 표현

A.1 물리적 공간에서의 성능지수의 해석적 표현

식(10)으로 표현된 성능지수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 J &= \frac{1}{2} \int_L \int_T \{ \rho v^2(x,t) + Ekv''(x,t)^2 \} dt dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_L \int_T \rho v^2(x,t) dt dx + \frac{1}{2} \int_L \int_T EI(w_0'' + v'')^2 dt dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_L \int_T \rho v^2 dt dx + \frac{1}{2} \int_L \int_T EI(w_0''^2 + 2w_0''v'' + v''^2) dt dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_L [w_0 v]^T \begin{bmatrix} 0 & 0^T \\ 0 & \int_T \rho \dot{\phi}_j \dot{\phi}_j dt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ v \end{bmatrix} dx \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_L [w_0''^T \quad v''^T]^T \begin{bmatrix} \int_T EI dt & [\int_T EI \phi_j dt]^T \\ \int_T EI \phi_j dt & \int_T EI \phi_j \phi_j dt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0'' \\ v'' \end{bmatrix} dx
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

따라서 성능지수는 다음과 같이 표현된다.

$$J = \frac{1}{2} \int_L \{ w_a^T M w_a + w_a''^T \tilde{K} w_a'' \} dx \tag{A.2}$$

여기서

$$\tilde{K} = K + \begin{bmatrix} 0 & [\int_{\Delta t} EI \phi_j dt]^T \\ \int_{\Delta t} EI \phi_j dt & \underline{0} \end{bmatrix}$$

A.2 모달공간에서의 성능지수의 해석적 표현

식 (A.2)에서 피적분 인자를 행렬의 곱으로 표현하면 다음과 같다.

$$w_a^T M w_a + w_a''^T \tilde{K} w_a'' = [w_a^T \quad w_a'^T \quad w_a''^T \quad w_a'''^T] \begin{bmatrix} M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{K} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_a \\ w_a' \\ w_a'' \\ w_a''' \end{bmatrix} \tag{A.3}$$

다음과 같은 모달공간으로의 변환행렬을 도입하자.

$$\tilde{w}_a = \Phi \tilde{\eta} \tag{A.4}$$

식(A.3)은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \tilde{\eta}^T \Phi^T & \tilde{\eta}'^T \Phi^T & \tilde{\eta}''^T \Phi^T & \tilde{\eta}'''^T \Phi^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{K} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi \tilde{\eta} \\ \Phi \tilde{\eta}' \\ \Phi \tilde{\eta}'' \\ \Phi \tilde{\eta}''' \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \eta^T & \eta'^T & \eta''^T & \eta'''^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi^T M \Phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi^T \tilde{K} \Phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\eta} \\ \tilde{\eta}' \\ \tilde{\eta}'' \\ \tilde{\eta}''' \end{bmatrix} \tag{A.5}
 \end{aligned}$$