

論文

내재적 이중시간 전진기법과 DADI 기법을 이용한 비정상 Navier-Stokes 코드개발

이은석*

Development of An Unsteady Navier-Stokes Solver using Implicit Dual Time Stepping Method and DADI Scheme

Eun Seok Lee*

ABSTRACT

In present study, a two dimensional unsteady Navier-Stokes solver has been developed using the Diagonalized ADI (DADI) method and implicit dual time stepping method. The jacobian matrices in steady state Navier-Stokes equations are introduced from inviscid flux terms. The implicit treatment of artificial dissipation terms results in a block penta-diagonal matrix system and it becomes a scalar penta-diagonal matrix by diagonalization. In steady state equations about fictitious time, a new residual including a real time derivative term is introduced. From a converged solution about fictitious time, a real time unsteady solution can be obtained, which is called 'implicit dual time stepping method'. For code validation, an oscillating flat plate, a regular Karman vortices past a circular cylinder and shock buffeting around a bicircular airfoil problems are numerically solved. And they are compared with a theoretical solution, experiments and other researcher's computations.

초 록

본 연구에서는 비정상 유동해석을 위한 CFD 코드의 개발을 위해 대각화 ADI 기법을 적용한 정상 해석기법과 내재적 이중시간 전진기법을 도입하였다. 정상상태 Navier-Stokes 방정식의 Jacobian 행렬은 비점성항에 대해서만 적용하였고 여기에 내재적 인공점성 연산자를 첨가하여 블록 5대각 행렬을 유도하였다. 시간단축을 위해 스칼라 5대각 행렬로 대체하였다. 가상시간에 대한 정상상태기법에 실시간에 대한 미분항이 포함된 새로운 잔류항을 정의하였다. 가상시간에 대해 수렴된 해로부터 실시간 해를 구하고 시간에 대해 적분을 수행하는 내재적 이중시간 전진기법을 이용한 비정상 Navier-Stokes 코드를 개발하였다. 이에 대한 검증으로 정지한 유체속에 진동하는 평판문제, 원기둥 후방의 주기적인 Karman 와류생성, 이중원호 익형주위의 충격파 진동문제등을 수치해석하여 이론치, 실험치, 타연구자의 계산결과와 비교, 분석하였다.

Key Words : DADI(대각화 ADI), Implicit dual time(내재적 이중시간), Unsteady(비정상)

* 2005년 2월 3일 접수 ~ 2005년 8월 10일 심사완료

* 정회원, 한국항공우주연구원 엔진그룹

연락처, E-mail : esl@kari.re.kr

대전시 유성구 어은동 45번지

I. 서 론

내재적 시간전진기법은 수치적 안정성을 이유로 많은 비정상 수치기법에 이용되어 왔다. 하지

만 완전한 내재적 기법은 매시간 간격마다 비선형 방정식을 풀어야 하는 단점으로 인해 Beam and Warming [1] 의 근사인자분해(Approximately Factorization)기법을 이용한 비정상 해석기법이 많이 쓰이고 있다. 이 경우, 시간적으로 2차의 정확도와 수치 안정성을 도모할 수 있다.

실시간 간격만을 쓰는 경우, 정상상태 기법에서 빠른 수렴을 위해 사용되는 국부시간 전진기법(local time stepping), 다중격자법(Multigrid), 예조건기법(Preconditioning) 등의 가속기법을 사용하기가 매우 어렵고 시간적으로 1차의 정확도를 가지는 단점이 있다. 이를 보완하기 가상시간 개념을 도입한 이중시간 전진기법이 도입되었다. [2] 이중시간 전진기법은 정상상태 방정식의 수치기법을 가상시간에 대해 그대로 적용하고 실시간 간격에 대한 미분항이 추가된 새로운 잔류항을 도입하는 기법으로 가상시간에 대해 수렴된 해는 매 실시간 간격에서의 정확한 비정상 해를 의미한다.

본 연구에서는 대각화된(Diagonalized) ADI 기법을 이용한 2차원 정상상태 Navier-Stokes 방정식 코드로부터 가상시간을 도입한 이중시간 전진기법을 이용하여 비정상 유동해석 코드를 개발하였다.

코드의 검증을 위해 세 가지의 비정상 유체역학 문제를 다루었다. 첫째는 정지한 유체내의 진동하는 평판문제이다. 수치해석 결과와 이론적 해를 비교하였다. 둘째는 원기둥 후방의 규칙적인 Karman 와류 해석이다. 수치해석 결과를 시험치 및 타 연구자의 계산결과와 비교, 분석하였다. 셋째는 천음속 유동장에서의 충격과 진동 현상이다. 특정 마하수와 레이놀즈수 환경에서 익형 주위에 생성, 이동, 소멸을 주기적으로 반복하는 충격과 진동현상을 해석하여 시험치와 비교하였다.

II. 본 론

2.1 지배방정식

2차원 Navier-Stokes 방정식을 내재적 형식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{Q^{n+1} - Q^n}{\Delta t} + \frac{\partial}{\partial \xi} (A \Delta Q^{n+1}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (B \Delta Q^{n+1}) = - \left(\frac{\partial F^n}{\partial \xi} + \frac{\partial G^n}{\partial \eta} \right) = R^n \quad (1)$$

여기서 A, B 행렬은 비점성항에 대한 플럭스

Jacobian을 F, G 는 ξ, η 방향에 대한 비점성항, 점성항, 인공점성항이 포함된 플럭스 벡터를 나타낸다. 순수한 플럭스 Jacobian 행렬은 3대각 행렬이나 4차의 인공점성항 계수의 내재적 처리로 인해 블록 5대각 행렬을 이룬다. 여기에 근사인자분해(Approximate Factorization)를 도입하여 델타형식을 이루면 다음과 같다.

$$(I + \Delta t \frac{\partial}{\partial \xi} A) (I + \Delta t \frac{\partial}{\partial \eta} B) \Delta Q^{n+1} = \Delta t R^n \quad (2)$$

시간적으로 2차의 정확도를 얻기 위해 시간간격을 다음으로 차분화 할 수 있다.

$$\frac{3Q^{n+1} - 4Q^n + Q^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{\partial}{\partial \xi} (A \Delta Q^{n+1}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (B \Delta Q^{n+1}) = - \left(\frac{\partial F^n}{\partial \xi} + \frac{\partial G^n}{\partial \eta} \right) = R^n \quad (3)$$

이 경우 근사인수분해를 도입한 델타형식은 다음과 같다.

$$(I + \frac{2}{3} \Delta t \frac{\partial}{\partial \xi} A) (I + \frac{2}{3} \Delta t \frac{\partial}{\partial \eta} B) \Delta Q^{n+1} = \frac{2}{3} \Delta t R^n + \frac{1}{3} \Delta Q^n \quad (4)$$

식 (4)의 블록 5대각행렬 (Block penta-diagonal matrix)은 계산시간이 많이 소요되므로 Pulliam과 Steger [3]가 제안한 행렬의 고유값을 이용, 대각화된 스칼라 5대각 행렬(Diagonalized scalar penta-diagonal matrix) 형태로 바꾸면 다음으로 나타낼 수 있다. 단, 위에서 언급한 대로 Jacobian 행렬 A, B 에는 내재적 인공점성항 계수에 의한 내재적 연산자 D_ξ, D_η 가 각각 포함되어 있다.

$$A = T_\xi (\Lambda_\xi + D_\xi) T_\xi^{-1}, \quad B = T_\eta (\Lambda_\eta + D_\eta) T_\eta^{-1}$$

$$T_\xi \left\{ I + \frac{2}{3} \Delta t \frac{\partial}{\partial \xi} (\Lambda_\xi + D_\xi) \right\} T_\xi^{-1} T_\eta \left\{ I + \frac{2}{3} \Delta t \frac{\partial}{\partial \eta} (\Lambda_\eta + D_\eta) \right\} T_\eta^{-1} \Delta Q^{n+1} = \frac{2}{3} \Delta t R^n + \frac{1}{3} \Delta Q^n \quad (5)$$

기존의 AF-ADI 의 경우, 벡터화된 형태의 블록 대각화 행렬을 내재적 기법에 사용하는 데 비해, DADI의 경우, 스칼라 행렬을 내재적 차분 기법에 사용하여 1회 계산시간을 대폭 감소시킨 장점이 있다. 1980년 Puliam과 Steger [3]에 의해 처음으로 개발된 형태로 ADI 기법에 비해 2-3배의 계산시간이 빠른 것으로 보고 된다. 단점은

ADI 기법을 대각화, 선형화하여 내재적 차분항의 오차가 약간 증가한다는 것이다. 본 연구에서는 이와 같은 단점을 극복하고자 방정식 우측 인공점성항의 2nd, 4th order 계수항을 내재적 항으로 처리하여 좌측의 내재적 부분으로 이항하였고 이것은 스칼라화된 왼쪽의 DADI 행렬이 자연스럽게 인공점성 계수항을 흡수하여 두개의 내재적 부분을 하나로 매끄럽게 처리할 수 있었다. 참고로 LU-SGS 기법은 Jacobian 행렬 A, B 를 Lower 와 Upper 형태의 삼각행렬로 나누어 처리하는 것으로 ADI와 DADI기법의 중간형태라 할 수 있다.

2.2 이중시간 전진기법

정상상태의 Navier-Stokes 방정식에 가상시간 τ 를 도입한 식을 다음으로 나타내어 보자.

$$\frac{\partial Q}{\partial \tau} = -\frac{\partial Q}{\partial t} + RHS = RHS^* \quad (6)$$

이 경우, 가상시간 τ 에 대해 우변의 새로운 잔류항(Residual) RHS^* 를 영(Zero)으로 수립시키면 실시간 t 에 대한 정확한 비정상 해를 얻을 수 있다는 것이 이중시간기법의 이론적 배경이다. 식 (4)의 시간간격을 가상시간으로 간주하고 잔류항을 식 (6)의 새로운 잔류항으로 대체하면 다음으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} & (I + \frac{2}{3} \Delta \tau \frac{\partial}{\partial \xi} A)(I + \frac{2}{3} \Delta \tau \frac{\partial}{\partial \eta} B) \\ & \Delta Q^{n+1,m+1} = \frac{2}{3} \Delta \tau (R^{n+1,m} - \frac{\partial Q^n}{\partial t}) \quad (7) \\ & + \frac{1}{3} \Delta Q^{n+1,m} \end{aligned}$$

식 (7)는 근사인수분해기법과 이중시간전진기법을 도입한 내재적 시간적분법을 적용한 형태이다. 실시간(n 시간간격)에 대해서는 2차의 one sided Euler backward 유한차분기법을 적용하고 가상시간(m 시간간격)에 대해서 ADI 기법을 적용하였다. 또한 행렬의 고유값을 이용하여 대각화된 스칼라 5대각행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & T_\xi \{ I + \frac{2}{3} \Delta \tau \frac{\partial}{\partial \xi} (A_\xi + D_\xi) \} T_\xi^{-1} T_\eta \{ I + \\ & \frac{2}{3} \Delta \tau \frac{\partial}{\partial \eta} (A_\eta + D_\eta) \} T_\eta^{-1} \Delta Q^{n+1,m+1} = \quad (8) \\ & \frac{2}{3} \Delta \tau (R^{n+1,m} - \frac{\partial Q^n}{\partial t}) + \frac{1}{3} \Delta Q^{n+1,m} \end{aligned}$$

한편, Euler 내재적 기법과 Trapezoidal 기법을 동시에 고려하기 위해 다음의 형태를 생각해 보자.

$$\begin{aligned} \Delta Q^{n+1} = & -\Delta t \{ \Gamma (\frac{\partial F}{\partial \xi}^{n+1} + \frac{\partial G}{\partial \eta}^{n+1}) \\ & + (1 - \Gamma) (\frac{\partial F^n}{\partial \xi} + \frac{\partial G^n}{\partial \eta}) \} \quad (9) \end{aligned}$$

where $\Gamma = 1$: Euler Implicit scheme

$\Gamma = 0.5$: Trapezoidal scheme

위의 기법을 식 (8)에 적용하고 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & T_\xi \{ I + \frac{\Gamma}{a} \Delta \tau \frac{\partial}{\partial \xi} (A_\xi + D_\xi) \} T_\xi^{-1} T_\eta \{ I + \frac{\Gamma}{a} \Delta \tau \\ & \frac{\partial}{\partial \eta} (A_\eta + D_\eta) \} T_\eta^{-1} \Delta Q^{n+1,m+1} = \frac{\Gamma}{a} \Delta \tau \quad (10) \\ & (\Gamma R^{n+1,m} + (1 - \Gamma) R^n - Q_t) + \frac{1}{3} \Delta Q^{n+1,m} \end{aligned}$$

$$\text{where } Q_t = \frac{aQ^{n+1,m} + bQ^n + cQ^{n-1}}{\Delta t}$$

$$a = \Gamma + \frac{1}{2}, \quad b = -2\Gamma, \quad c = \Gamma - \frac{1}{2}$$

$$R = -(\frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\partial G}{\partial \eta})$$

식 (10)의 형태는 Γ 의 선택에 상관없이 시간적으로 2차의 정확도를 가진다. Rigby [4]에 의하면 오차분석 결과, $\Gamma=0.5$ 의 경우, 수치 불안정으로 수렴성이 현저하게 낮아진다. $\Gamma=0.65$ 의 경우가 $\Gamma=1$ 의 Euler implicit scheme 보다 약 50% 실시간 간격을 더욱 증가시킬 수 있다. 본 연구에서는 Γ 를 0.65에서 1사이의 값을 사용하고 있다.

난류모델링은 Chien [5]의 k- ϵ 방정식을 채택하여 정상상태의 Navier-Stokes 방정식과 연계하여 풀었다. 또한 초음속 흐름에 대비하여 Nichols [6]가 제안한 압축성 효과를 고려하였다. 박리가 발생하는 경우, k- ϵ 모델이 비교적 수렴성이 좋으나 반복횟수당 계산시간이 Baldwin-Lomax 모델에 비해 약 50% 정도 추가되는 단점이 있다.

2.3 평판의 진동문제; Stokes's 2nd Problem

비정상 코드의 첫 번째 검증은 위해 수평으로 진동하는 평판 주위의 흐름에 대해 수치해석을 실시하였다. 평판은 무한한 깊이의 정지한 유동

의 아래벽면에서 조화운동(harmonic motion)을 하고 있으며 그 이론적인 해는 다음으로 나타낼 수 있다.

$$u(\eta, t) = Ue^{-\eta} \cos(2\pi ft - \eta) \quad (11)$$

where $\eta = ky, k = \sqrt{\frac{\pi f}{\nu}}$

여기서 f 는 평판의 진동주파수를 나타낸다. 속도분포 $u(\eta, t)$ 는 $Ue^{-\eta}$ 의 진폭을 가지고 무차원화된 수직방향(η)으로 감쇠진동하는 모양을 보이게 된다. 수치계산을 위해 평판모양의 21×61 격자를 구성하였으며 마하수 0.05에 해당되는 속도(U)를 평판에 부여하였다. 계산영역 좌우에는 주기경계조건, 아랫면에는 벽면조건(no-slip), 윗면에는 대칭형(slip) 경계조건을 각각 부여하였다.

그림 1에 각각 시간 $t=0, T/4, T/2, 3T/4, T$ 에 따른 속도분포를 수치계산결과(원)와 이론치(실

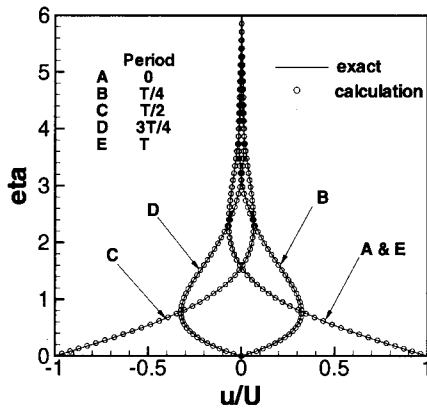


그림 1. 진동하는 평판주위의 속도분포

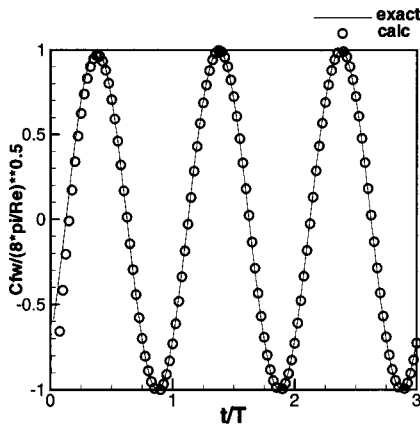


그림 2. 진동하는 평판의 마찰계수의 시간에 따른 변화

선) 각각 비교하였다. 계산치와 이론치가 매우 근접함을 볼 수 있다. $t=T/4$ 와 $3T/4$ 에 점성침투 깊이(Viscous penetration depth)가 벽면에서 생성됨을 볼 수 있다.

그림 2에서는 실시간에 따른 표면마찰계수의 변화를 나타낸 것이다. 식 (10)의 우변 잔류항에 있는 Q_w 를 초기시간에 정확하게 구현하지 못하여 실시간 초기에는 이론치와 계산치가 약간 차이가 난다. 하지만 시간이 지날수록 이론치와 계산치가 정확하게 일치함을 볼 수 있다.

2.4 원기둥을 지나는 비정상 유동

코드검증을 위한 두 번째 문제로 원기둥을 지나는 유동을 수치해석 하였다. Schlichting [7]에 의하면 레이놀즈수 60에서 5000 사이에서 원기둥 후방 유동에 규칙적인 Karman 와류가 관찰된다. 무차원화된 주파수(S : Strouhal 수)는 다음으로 정의된다.

$$S = \frac{fD}{V} \quad (12)$$

여기서 f 는 Karman 와류의 주파수, D 는 원의

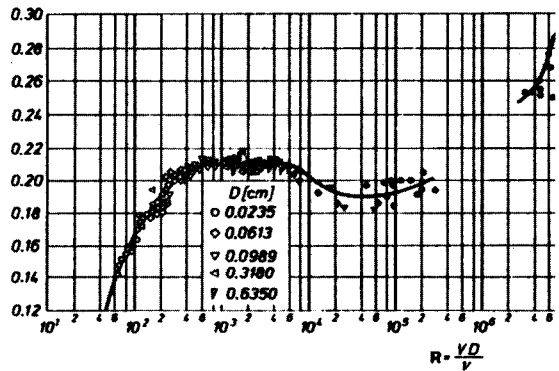


그림 3. 레이놀즈수에 따른 원기둥을 지나는 유동의 Strouhal 수 (실험치, Schlichting [7], p. 32)

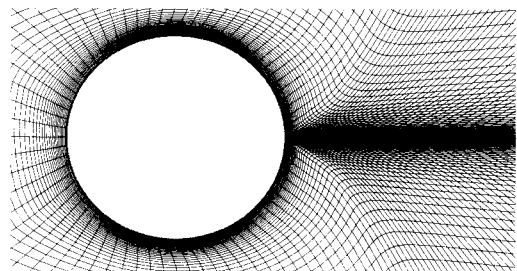


그림 4. 원기둥 주위의 격자 (257×49, C-형)

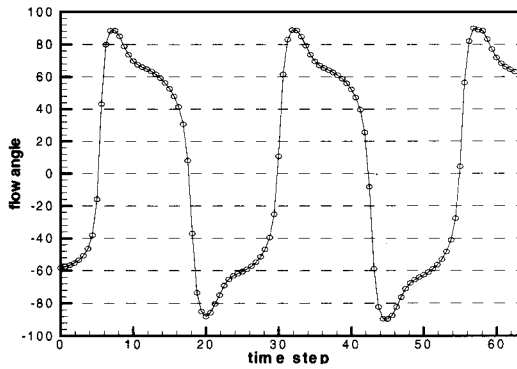


그림 5. 시간에 따른 유동의 흐름각 변화 ($M_{\infty} = 0.2, Re=1000$)

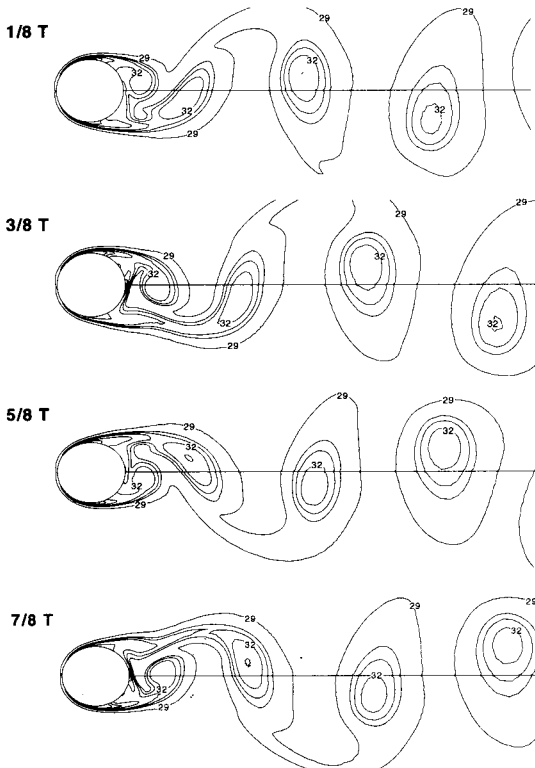


그림 6. 시간에 따른 유동의 등엔트로피 선도

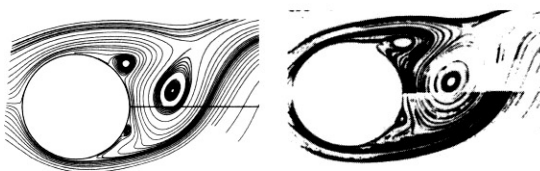


그림 7. Arnon [4]의 계산결과(우)와 본 계산 결과(좌)의 유동 흐름선도 비교

직경, V 는 자유류의 속도에 해당된다. 그림 3에 의하면 레이놀즈수 500~5000 사이에서 Strouhal 수는 약 0.21이다.

수치해석을 위해 그림 4에서와 같이 257×49 C-형 격자를 구성, 계산영역을 이산화하였다. 무한개의 원기둥이 세로방향으로 나열되어 있다고 간주하고 그 간격은 지름의 5배로 설정하였다. 자유류의 마하수는 0.2, 레이놀즈수는 1000으로 가정하였다.

실시간 계산수행을 하는 동안 유동의 수렴여부를 판단하기 위해 원기둥 후방 중앙에서 0.8배 직경만큼 떨어진 곳에서의 유동의 흐름각을 시간에 따라 관찰하였다(그림 5). 약 8차례의 주기가 지난 후, 상하 대칭모양의 주기성이 포착되었고 이때 비정상해가 수렴되었다고 판단하였다. 계산된 Strouhal 수는 0.206으로 실험치(0.21, 그림 3)와 매우 근접함을 알 수 있다.

그림 6에서는 시간에 따른 등엔트로피 선도를 나타낸 것으로 와류생성 구조를 관찰할 수 있다. 벽면 후방에서 생성된 와류는 후방으로 갈수록 점차 확산되어 이동해 나가는 것을 볼 수 있다.

그림 7에서는 그림 6의 맨 아래그림(7/8T)에 해당되는 유동의 흐름선도를 나타내었다. Arnon et al. [2]등의 수치계산결과와 본 연구의 결과를 함께 비교하였다. 원기둥 벽면 뒷쪽 아래면에서부터 떨어져 나온 와류가 후방으로 전파되는 모습을 보여준다.

2.5 이중원호 익형주위의 충격파진동

Levy [8] 등에 의해 1976년부터 이중원호 익형주위에서의 충격파 진동에 대한 풍동실험과 수치계산 연구가 미국 NASA Ames 연구소를 중심으로 수행되어 왔다. 실험 결과 약 18% 두께를 가진 이중원호 익형위에서 자유류 마하수가 0.74~0.78 인 경우, 충격파가 비정상적으로 진동하는 특성이 있음을 알아냈다. 원인분석을 위해 수치해석을 수행한 결과, 익형의 상하 벽면에서 충격파가 전후방으로 이동하면서 생성, 소멸을 주기적으로 반복하는 현상이 그 원인으로 밝혀졌고 이 현상을 충격파 진동(Shock buffeting)으로 명명하였다. 여기서는 비정상 유동코드의 세 번째 검증으로 충격파 진동문제를 다루었다.

수치해석을 위해 자유류의 마하수는 0.754, 레이놀즈수는 11 million 으로 가정하였고 257×49 C-형 격자를 구성하였다(그림 8).

Giles [2]의 무반사 아음속 입, 출구 (Non-reflecting subsonic inlet, exit) 경계조건을 각각

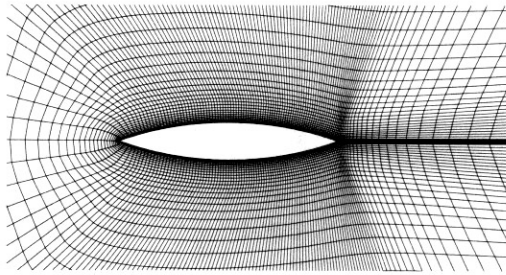


그림 8. 이중원호 익형주위의 격자

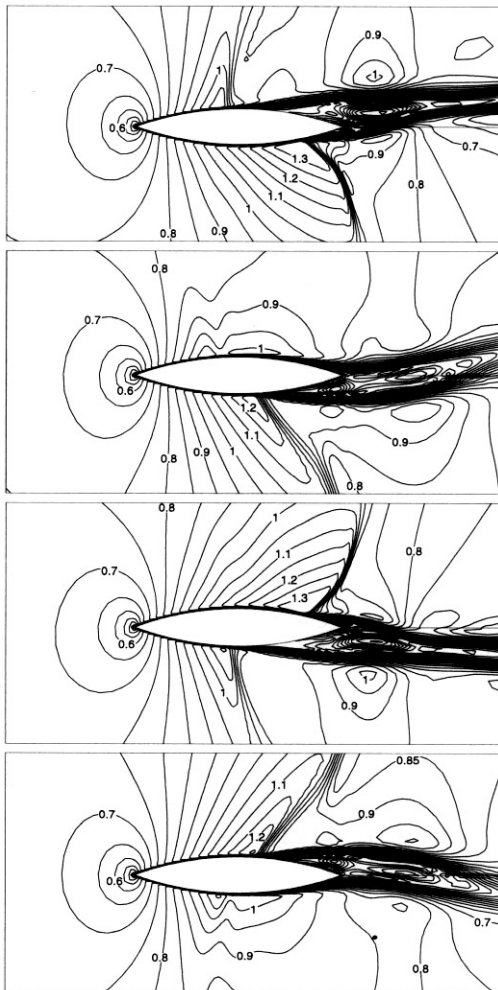


그림 9. 시간에 따른 이중원호 익형주위의 마하수 분포 ($t=0, 1/4T, 2/4T, 3/4T, T$)

입, 출구 경계에 부여하고 위쪽, 아래쪽 원방경계면간의 거리는 10배의 코드길이를 적용하였다. 그림 9에 1/4 주기간격에 해당하는 시간에서의 마하수 분포를 각각 나타내었다.

초기에 아랫면 뒷전에서 시작한 조그마한 흐름박리 바로 전방에 충격파가 형성됨을 볼 수 있다. 충격파 전방의 국부적인 흐름속도가 증가됨에 따라 충격파의 강도가 커지고 (그림 9의 첫 번째), 더욱 강해진 충격파와 역 압력구배로 인해 흐름박리영역이 더욱 커져 박리영역과 충격파는 전방으로 이동한다(그림 9의 두 번째). 충격파가 익형 중앙의 최대두께 위치(국부적인 흐름속도가 최대인 곳)를 지나면서 강도는 약해지고 순 압력구배의 영향을 받아 더 이상 충격파가 전방으로 진행하지 못하고 약해지면서 소멸된다.

표 1. 무차원화된 Reduced Frequency의 비교

	Steger [11] (CFD)	Arnone [2] (CFD)	Present (CFD)	McDevitt [10] (Exp.)
Reduced Frequency	0.41	0.42	0.44	0.49

McDevitt et al. [10]등이 실험을 통해 측정한 무차원화 된 충격파 생성소멸 주파수는 0.49이고 Steger [11]와 Arnone [2]등이 수치계산한 값은 각각 0.41, 0.42이다. 본 계산결과 0.44의 값을 얻을 수 있었다.

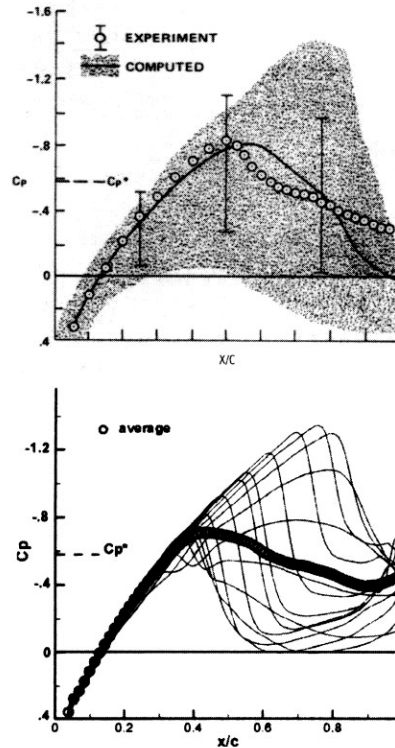


그림 10. 이중원호익형의 비정상 압력분포 (윗쪽: Levy [8], 아래쪽: 본 연구)

NASA Ames의 풍동실험 장치를 통해 Levy [8]가 실험 및 수치해석을 통해 얻은 익형 주위의 압력분포를 그림 10의 위쪽에 나타내었다. 실험을 통해 얻은 압력의 평균값은 원 심볼(symbol)을 의미하고 원 심볼 위아래 바(bar)는 시간에 따른 압력의 비정상 특성(fluctuation)에 해당된다. 빗금 친 영역은 수치계산결과로부터 형성된 비정상 압력분포에 해당된다. 그림 6의 아래쪽은 본 연구를 통해 계산된 각 시간에서의 압력선도를 나타낸 것이다. 위쪽의 빗금 친 영역 보다는 좀 더 실험치에 접근된 모습을 볼 수 있다.

이중원호 익형계산의 경우, 실시간 1회 전진에 대해 가상시간 약 300~400 회 반복계산이 수행되며 잔류항이 초기치의 4~5 order 감소하였다. 실시간 40회의 전진이 하나의 주기를 이루게 되고 약 25 주기의 반복계산 후에 하나의 비정상해를 얻는다. 전체 계산시간은 약 3~4시간 정도이다. (Pentium 2.8 GHz) 이와 같이 하나의 비정상해를 얻기 위해 수렴과정이 정상해에 비해 복잡하고 또한 가상시간 반복계산의 수렴설정, 실시간 간격, 비정상해 수렴판정을 어떻게 결정하는가에 따라 수렴특성이 달라지므로 경우마다 사용자의 적절한 판단이 요구된다. 최근 서울대 [12]에서 비정상 Navier-Stokes 방정식을 이중시간 전진기법으로 해석하였으며 다양한 실시간 간격, 격자 크기에 대해 공력특성의 변화를 해석하여 최적의 격자와 실시간 간격을 구하였다.

III. 결 론

본 연구에서는 ADI 기법을 적용한 정상상태 Navier-Stokes 수치기법으로부터 가상시간을 도입하여 새로운 잔류항을 정의한 비정상 내재적 이중시간 전진기법에 대하여 2차원 비정상 Navier-Stokes 해석코드를 개발하였다. 또한 대각화(Diagonalization) 작업을 통해 블록 5대각 행렬을 스칼라 5대각 행렬로 바꾸어 계산시간을 단축하였다. 연산자 L 를 도입하여 Euler 내재적 기법과 Trapezoidal 기법을 혼용하여 사용할 수 있게 하였고 이로써 실시간 간격의 증가를 도모하였다. 이러한 내재적 이중시간 전진기법은 기존의 단일시간 전진기법에 비해 약 5~10배의 계산시간이 단축된다.

비정상 코드의 검증을 위해 세 가지 비정상 유체역학 문제를 수치적으로 해석하였으며 각각의 경우에 대해 이론치, 실험치와 타 연구자의 계산결과를 함께 비교, 분석하였다. 초기조건을 정확히 주지 못할 경우, 초기상태의 해는 이론치와

다소 차이가 났으나 일단 주기성을 가진 해로 수렴한 후에는 이론치 및 실험치에 비교적 잘 일치하였다.

참고문헌

- 1) Beam, R., and Warming, R. F., "An Implicit Finite Difference Algorithm for Hyperbolic Systems on Conservative Form", *Journal of Computational Physics*, Vol. 22, No. 1, Sep. 1976, pp. 87~110.
- 2) Arnone, A., Liou, M.-S., and Povinelli, L. A., "Multigrid Time-Accurate Integration of Navier-Stokes Equations", AIAA 93-3361-CP, 1993, pp. 694~702
- 3) Pulliam, T. H., and Steger, J. L., "Implicit Finite-Difference Simulations of Three Dimensional Compressible Flows", *AIAA Journal*, Vol. 18, No. 2, Feb. 1980, pp. 159-167.
- 4) Rigby, D. L., "Compact Spatial Differencing and Subiteration Time Marching in the PARC Code," AIAA 96-0385, Jan. 1996.
- 5) Chien, K.-Y., "Prediction of Channel and Boundary-Layer Flows with a Low Reynolds Number Turbulence Model", *AIAA Journal*, Vol. 20, 1982, pp. 33-38.
- 6) Nichols, R. H., "A Two-equation Model for Compressible Flows", AIAA-90-0294, 1990
- 7) Schlichting, H., *Boundary-Layer Theory*, McGraw-Hill, 1978.
- 8) Levy, L. L., 1977, "An Experimental and Computational Investigation of the Steady and Unsteady Transonic Flow Field About an Airfoil in a Solid-Wall Test Channel", AIAA Paper 77-678, 1977.
- 9) Giles, M., "Non Reflecting Boundary Conditions for Euler Equations Calculations", *AIAA Journal*, Vol.108, 1989, pp. 2050~2058.
- 10) McDevitt, J. B., Levy, L. L., and Deiwert, G. S., "Transonic Flow About a Thick Circular-Arc Airfoils", *AIAA Journal*, Vol. 14, No. 5, May 1976, pp. 606~613.
- 11) Steger, J. L., "Implicit Finite-Difference Simulation of Flow About Arbitrary Two-dimensional Geometries", *AIAA Journal*, Vol. 16, No. 7, July 1978, pp. 679~686.
- 12) 김태윤, 이보성, 이동호, Y. Kohama, "지면 운동에 따른 정사각주 후류의 와류 유동장 수치 해석 Part I. 조정지면과 이동지면의 비교", 한국항공우주학회지, 제33권, 제6호, 2005, pp. 1-7