論 文
54D-4-1

상태변수와 입력변수에 시간지연을 갖는 불확정 동적 시스템의 제어기 설계

Delay-Dependent Stabilization for Uncertain Dynamic Systems with State and Input Delays

趙 賢 珠* · 朴 柱 炫†
(Hyun-Ju Cho · Ju-Hyun Park)

Abstract - This paper aims at asymptotic stabilization for uncertain dynamic systems with state and input delays. We propose a memoryless state feedback controller which maximizes the delay bound for guaranteeing stability of the system. Using Lyapunov method and linear matrix inequality (LMI) approach, a delay-dependent stabilization criterion is devised by taking the relationship between the terms in the Leibniz-Newton formula into account. The criterion is represented in terms of LMIs, which can be solved by various effcient convex optimization algorithms. Numerical examples are given to illustrate our main method.

Key Words : Uncertain Dynamic System, State And Input Delay, Delay-Dependent Criterion, Lyapunov Method, LMI

1. 서 론

일반적으로 제어기를 설계할 때 수학적 모델과 실제 시스템 간에 차이가 존재한다. 가장 대표적인 것으로 시간지연과 불확정성을 들 수 있다. 여러 다양한 동적 시스템에서 시간지연과 불확정성은 제어 시스템을 구현할 때 시스템의 성능을 저하시키거나 시스템의 안정성까지도 보장하지 못하는 경우가 발생한다[1]. 그래서 시간지연이나 불확정성을 가진 시스템의 점근 안정도와 안정화(asymptotic stability and stabilization)에 대한 연구는 지난 수십 년 동안 계속 되어왔다[2]-[13]. 문헌에 따르면 시스템의 안정도 문제를 해결하기 위해 리아프노프 이론(Lyapunov method)이나 특정 방정식 방법(characteristic equation method), 상태 방정식의 해(state solution approach)를 이용하였다. 특히 최근에는 블록 최적화 알고리즘(convex optimization algorithm)을 가지는 선형행렬 부등식(Linear Matrix Inequality, LMI)를 이용하는 방식이 널리 이용되고 있다[2]-[12]. 이 선형행렬 부등식의 다양한 적용 사례들은 참고문헌 [10]에 잘 나타나 있는데 변수나 행렬의 조정 없이도 다양한 동적 시스템의 안정도를 판별하거나 안정화 시키는 조건을 이끌어 낼 수 있다는 장점을 가진다. 또한 여러 가지 선형 제약 조건들을 쉽게 다룰 수 있다. 일반적으로 제시되는 안정도 또는 안정화 조건은 시간지연 독립조건(delay-independent criterion)과 시간지연 종속조건(delay-dependent criterion)의 두 가지로 나뉜다. 앞의 방법은 시간지연에 의존하지 않는 안정도 조건을 연구하는 방식이고[11]-[13], 다른 방법은 시간지연을 고려한 방식이다[2]-[4]. 시간지연 종속조건은 시간지연의 길이에 대한 정보를 이용하기 때문에 대개 시간지연 독립조건보다 나은 결과를 나타낸다[2]-[4]. 최근에 Wu [4]가 제시한 시스템 안정도 조건은 다른 결과보다도 비교적 좋은 결과를 보여 주었다. 그러나 이 연구에서는 시스템 안정도는 고려하였으나 시스템의 안정화 문제는 고려하지 않았다.

한편 제어기 설계에 영향을 미치는 또 다른 요인으로 입력변수의 시간지연을 들 수 있다. 실제 입력변수을 가지는 시스템에서는 상태변수와 마찬가지로 입력변수에도 시간지연이 존재한다. 그러나 지금까지 이 부분에 관한 연구는 미흡하였다. Yue [5]는 입력변수의 시간지연을 포함한 시스템을 다루었지만 상태변수의 시간지연이 제외된 제한적인 시스템에 대하여 기술하였다.

시간 지연을 가지는 시스템에 대하여 다루는 주된 연구 분야는 제어기 설계 유무에 따른 안정성 문제와 제어기 설계시 성능 개선의 관점에 따라 나뉠 수 있다. 첫째로, 제어기를 가지지 않는 시간지연 시스템의 안정성을 판별하는 것인데 이는 보통 시간지연의 최대 허용범위로 시스템의 강인 안정성(robust stability)을 판별한다[2],[4],[7],[8]. 이에 대한 확장으로 제어기를 가지는 시간지연을 가지는 시스템의 안정화를 판별하는 것이다. 전자와 마찬가지로 시간지연의 최대 허용범위로 판별하는 것이 일반적이다[3],[5],[7]-[9]. 마지막으로, 시스템의 성능을 고려하여 제어기를 설계하는 것이다. 성능보장 문제를 다룬 대표적인 제어 기법으로 보장 비용 제어(guaranteed cost control)가 있다[14]-[17].

본 논문에서는 Wu [4]가 제안한 보조정리를 이용하여 시간지연과 불확정성을 가지면서 입력에 시간지연이 추가된 시스템의 점근 안정화를 위한 제어기 설계 방법을 제시한다. [3],[5],[7]-[9]와 마찬가지로 시스템의 안정성 확보의 관점에서 제어기를 설계한다. 즉 시스템의 안정도 확보를 위해, 시

† 교신저자, 正會員 : 嶺南大學校 電氣工學科 助教授 · 工博
E-mail : jessie@yu.ac.kr
* 學生會員 : 趙賢珠 : 嶺南大學校 電氣工學科 碩士課程
接受日字 : 2004年 8月 3日
最終完了 : 2005年 1月 21日

간지연의 허용 한계치를 최대화하는 비메모리 궤환 제어기(memoryless state feedback controller)를 제안한다. 시스템의 안정화 판별은 리아프노프 이론과 선형행렬 부등식 이론을 적용하여 시스템의 강인 안정성을 보장하는 충분조건을 선형행렬 부등식으로 표시한다. 이 부등식을 만족하는 해가 제어기 변수가 되며 이 해는 최근에 개발된 우수한 성능의 여러 최적화 알고리즘을 이용하여 쉽게 찾을 수 있다[10].

본 논문에서 R^n은 n차원의 유클리드 공간을 의미하고, $R^{n\times m}$은 $n\times m$의 실계수 행렬의 집합을 의미하고, $(\cdot)^T$는 벡터 또는 행렬의 전치를 의미하고, $*$는 대칭부분을 의미하고, I는 적절한 차원의 단위행렬이며 $diag(\cdots)$은 대각화 행렬을 의미한다. 대칭행렬 X에 대하여 $X>0$ 또는 $X\geq 0$는 행렬 X가 양한정(positive definite) 혹은 준양한정(positive semi-definite)을 나타낸다.

2. 본 론

2.1 문제 제기

본 논문에서는 다음과 같은 시간지연과 불확정성을 가지는 시간지연 시스템을 고려한다.

$$\Lambda:\begin{cases}\dot{x}(t)=(A+\triangle A)x(t)+(A_1+\triangle A_1)x(t-d)\\ \qquad\qquad +Bu(t)+B_1u(t-h),\ t>0,\\ x(t)=\phi(t),\quad t\in[-d,0],\end{cases}\qquad(1)$$

여기서 $x(t)\in R^n$은 상태벡터, $u(t)\in R^m$은 제어기 입력, $A\in R^{n\times n}$, $A_1\in R^{n\times n}$, 그리고 $B\in R^{n\times m}$는 상수 행렬, $\phi(t)$는 $t\in[-d,0]$에서의 초기조건, d $h>0$는 시간지연상수이다.

불확정성은 다음과 같이 가정한다.

$$[\triangle A(t)\quad \triangle A_1(t)]=DF(t)[E\quad E_1]\qquad(2)$$

여기서 D E E_1은 상수행렬이고, $F(t)$는 다음의 성질을 만족한다.

$$F^T(t)F(t)\leq I,\quad \forall t.$$

시스템 Λ의 점근 안정성을 보장할 수 있도록 다음의 비메모리 궤환 제어기를 설계하고자 한다.

$$u(t)=Kx(t),\qquad(3)$$

여기서 $K\in R^{m\times n}$는 조절상수행렬이고 시간지연 d와 h의 최대 허용범위와 그 때의 K를 구하는 것이 이 논문의 목적이다.

다음의 보조정리는 본 논문에서 제안하는 정리를 증명할 때 사용된다.

보조정리 1 [4].

자유롭게 조정 가능한 행렬 Y, T, W를 라이프니츠-뉴턴 방정식으로부터 다음과 같은 관계로 나타낼 수 있다.

$$2(x^T(t)Y+x^T(t-d)T+x^T(t-h)W)\times\left(2x(t)-x(t-d)-x(t-h)-\int_{t-d}^{t}\dot{x}(s)ds-\int_{t-h}^{t}\dot{x}(s)ds\right)=0.\quad(4)$$

보조정리 2 [7].

$Q=Q^T, H\ E$ 그리고 $R=R^T>0$인 적절한 행렬이 주어졌을 때 $F^TF\leq R$를 만족하는 모든 F에 대하여 $Q+HFE+E^TF^TH^T<0$과 $Q+\lambda HH^T+\lambda^{-1}E^TRE<0$을 만족하는 $\lambda>0$인 λ가 존재할 때 필요충분조건이다.

2.2 제어기 설계

시스템 Λ에 대한 점근안정성을 위한 조건을 리아프노프 방정식과 선형행렬 부등식을 이용하여 다음의 정리와 같이 제시한다.

정리 1

주어진 d와 h에 대하여 양한정 행렬 $V=V^T>0$, $H=H^T>0$, $N_1=N_1^T>0$, $N_2=N_2^T>0$와 대칭행렬 G L M 그리고 준양한정 행렬 $\Sigma=\begin{bmatrix}\Sigma_{11}&\Sigma_{12}&\Sigma_{13}\\ *&\Sigma_{22}&\Sigma_{23}\\ *&*&\Sigma_{33}\end{bmatrix}\geq 0$ 이 존재할 때 다음의 식이 성립하면 시스템 Λ는 점근안정하다.

$$\Pi=\begin{bmatrix}\Pi_{11}&\Pi_{12}&\Pi_{13}&\Pi_{14}&D&VE^T\\ *&\Pi_{22}&\Pi_{23}&\Pi_{24}&0&VE_1^T\\ *&*&\Pi_{33}&\Pi_{34}&0&0\\ *&*&*&\Pi_{44}&(d+h)D&0\\ *&*&*&*&-I&0\\ *&*&*&*&*&-I\end{bmatrix}<0,\qquad(5)$$

$$\Gamma=\begin{bmatrix}\Sigma_{11}&\Sigma_{12}&\Sigma_{13}&L\\ *&\Sigma_{22}&\Sigma_{23}&M\\ *&*&\Sigma_{33}&H\\ *&*&*&V\end{bmatrix}\geq 0,\qquad(6)$$

여기서

$\Pi_{11}=VA^T+G^TB^T+AV+BG+N_1+N_2+2(L+L^T)+(d+h)\Sigma_{11}$,

$\Pi_{12}=A_1V-L+2M^T+(d+h)\Sigma_{12}$,

$\Pi_{13}=B_1G-L+2H^T+(d+h)\Sigma_{13}$,

$\Pi_{14}=(d+h)(VA^T+G^TB^T)$,

$\Pi_{22}=-N_1-M-M^T+(d+h)\Sigma_{22}$,

$\Pi_{23}=-M-H^T+(d+h)\Sigma_{23}$,

$\Pi_{24}=(d+h)VA_1^T$,

$\Pi_{33}=-N_2-H-H^T+(d+h)\Sigma_{33}$,

$\Pi_{34}=(d+h)G^TB_1^T$

$\Pi_{44}=-(d+h)V$,

으로 정의된다. 이 때 제어기 입력은 $u(t)=GV^{-1}x(t)$으로 설계된다.

증명

제어기 입력을 포함한 시스템 Λ의 폐루프 시스템은 다음과 같다.

$$\dot{x}(t)=(A+DF(t)E+BK)x(t)+(A_1+DF(t)E_1)x(t-d)+B_1Kx(t-h).\qquad(7)$$

이 식의 안정도를 판별하기 위하여 리아프노프 방정식을 다음과 같이 정의한다.

$$V(x_t)=x^T(t)Px(t)+\int_{t-d}^{t}x^T(s)Q_1x(s)ds+\int_{t-h}^{t}x^T(s)Q_2x(s)ds+\int_{-d}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{x}^T(s)P\dot{x}(s)dsd\theta+\int_{-h}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{x}^T(s)P\dot{x}(s)dsd\theta.\qquad(8)$$

여기서 $x_t=x(t+s)$, $s\in[-\max(d+h),0]$이다.

이 리아프노프 방정식을 시간에 관하여 미분하면

$$\dot{V}(x_t)=\dot{x}^T(t)Px(t)+x^T(t)P\dot{x}(t)+x^T(t)Q_1x(t)-x^T(t-d)Q_1x(t-d)+x^T(t)Q_2x(t)-x^T(t-h)Q_2x(t-h)+d\dot{x}^T(t)P\dot{x}(t)$$

$$
\begin{aligned}
&-\int_{t-d}^{t}\dot{x}^T(s)P\dot{x}(s)ds+h\,\dot{x}^T(t)P\dot{x}(t)-\int_{t-h}^{t}\dot{x}^T(s)P\dot{x}(s)ds\\
&=x^T(t)((A+BK+DF(t)E)^TP+P(A+BK+DF(t)E)+Q_1\\
&\quad+Q_2+(d+h)(A+BK+DF(t)E)^TP(A+BK+DF(t)E))\\
&\quad\times x(t)+2x^T(t)(P(A_1+DF(t)E_1)+(d+h)(A+BK\\
&\quad+DF(t)E)^TP(A_1+DF(t)E_1))x(t-d)+2x^T(t)(PB_1K\\
&\quad+(d+h)(A+DF(t)E+BK)^TPB_1K)x(t-h)+x^T(t-d)\\
&\quad\times(-Q_1+(d+h)(A_1+DF(t)E_1)^TP(A_1+DF(t)E_1))\\
&\quad\times x(t-d)+2(d+h)x^T(t-d)(A_1+DF(t)E_1)^TPB_1Kx(t-h)\\
&\quad+x^T(t-h)(-Q_2+(d+h)K^TB_1^TPB_1K)x(t-h)\\
&\quad-\int_{t-d}^{t}\dot{x}^T(s)P\dot{x}(s)ds-\int_{t-h}^{t}\dot{x}^T(s)P\dot{x}(s)ds\\
&=\xi^T(t)\Pi_1\xi(t)-\int_{t-d}^{t}\dot{x}^T(s)P\dot{x}(s)ds-\int_{t-h}^{t}\dot{x}^T(s)P\dot{x}(s)ds.
\end{aligned}
$$

으로 계산되어진다.

여기서

$$\xi(t)=[x^T(t)\quad x^T(t-d)\quad x^T(t-h)],$$

$$\Pi_1=\begin{bmatrix}(1,1) & (1,2) & (1,3)\\ * & (2,2) & (2,3)\\ * & * & (3,3)\end{bmatrix},$$

$$
\begin{aligned}
(1,1)&=(A+DF(t)E+BK)^TP+P(A+DF(t)E+BK)+Q_1+Q_2\\
&\quad+(d+h)(A+DF(t)E+BK)^TP(A+DF(t)E+BK),\\
(1,2)&=P(A_1+DF(t)E_1)+(d+h)(A+DF(t)E+BK)^T\\
&\quad\times P(A_1+DF(t)E_1),\\
(1,3)&=PB_1K+(d+h)(A+DF(t)E+BK)^TPB_1K,\\
(2,2)&=-Q_1+(d+h)(A_1+DF(t)E_1)^TP(A_1+DF(t)E_1),\\
(2,3)&=(d+h)(A_1+DF(t)E_1)^TPB_1K,\\
(3,3)&=-Q_2+(d+h)K^TB_1^TPB_1K,
\end{aligned}
$$

으로 정의된다.

라이프니츠-뉴턴 방정식으로부터

$$x(t-d)=x(t)-\int_{t-d}^{t}\dot{x}(s)ds,$$

$$x(t-h)=x(t)-\int_{t-h}^{t}\dot{x}(s)ds,$$

위의 두 식이 성립하며 적당하게 만들어진 행렬 Y, T와 W로부터 보조정리 1을 이끌어낼 수 있다.

또 준양한정 행렬 $X=\begin{bmatrix}X_{11} & X_{12} & X_{13}\\ * & X_{22} & X_{23}\\ * & * & X_{33}\end{bmatrix}\geq 0$ 에 대해서 다음이 성립한다.

$$(d+h)\xi^T(t)X\xi(t)-\int_{t-d}^{t}\xi^T(t)X\xi(t)ds-\int_{t-h}^{t}\xi^T(t)X\xi(t)ds=0, \quad (9)$$

여기서 $\xi(t)$는 위에서 정의한 바와 같다.

$X=X^T\geq 0$ 이고 어떤 행렬 Y, T와 W에 대해서 (4)식과 (9)식을 이용해서 $\dot{V}(x_t)$를 정리하면

$$
\dot{V}(x_t)=\xi^T(t)\left(\Pi_1+\begin{bmatrix}2(Y+Y^T)+(d+h)X_{11} & -Y+2T^T+(d+h)X_{12} & -Y+2W^T+(d+h)X_{13}\\ * & -T-T^T+(d+h)X_{22} & -T-W^T+(d+h)X_{23}\\ * & * & -W-W^T+(d+h)X_{33}\end{bmatrix}\right)\xi(t)
$$

$$
-\int_{t-d}^{t}\zeta^T(t,s)\begin{bmatrix}X_{11} & X_{12} & X_{13} & Y\\ * & X_{22} & X_{23} & T\\ * & * & X_{33} & W\\ * & * & * & P\end{bmatrix}\zeta(t,s)ds
$$

$$
-\int_{t-h}^{t}\zeta^T(t,s)\begin{bmatrix}X_{11} & X_{12} & X_{13} & Y\\ * & X_{22} & X_{23} & T\\ * & * & X_{33} & W\\ * & * & * & P\end{bmatrix}\zeta(t,s)ds,
$$

여기서

$$\zeta(t,s)=[x^T(t)\quad x^T(t-d)\quad x^T(t-h)\quad \dot{x}^T(s)],$$

으로 표현되고, $\dot{V}(x_t)<0$이 성립하려면 다음 두 식이 성립하여야 한다.

$$
\Pi_1+\begin{bmatrix}2(Y+Y^T)+(d+h)X_{11} & -Y+2T^T+(d+h)X_{12} & -Y+2W^T+(d+h)X_{13}\\ * & -T-T^T+(d+h)X_{22} & -T-W^T+(d+h)X_{23}\\ * & * & -W-W^T+(d+h)X_{33}\end{bmatrix}<0, \quad (10)
$$

$$
\begin{bmatrix}X_{11} & X_{12} & X_{13} & Y\\ * & X_{22} & X_{23} & T\\ * & * & X_{33} & W\\ * & * & * & P\end{bmatrix}\geq 0 \quad . \quad (11)
$$

(10)식을 여수 정리(schur complement)[10]를 사용하여 계산하면

$$
\Pi_2+\begin{bmatrix}PD\\ 0\\ 0\\ (d+h)PD\end{bmatrix}F(t)[E\ \ E_1\ \ 0\ \ 0]
+\begin{bmatrix}E^T\\ E_1^T\\ 0\\ 0\end{bmatrix}F(t)[D^TP\ \ 0\ \ 0\ \ (d+h)D^TP]<0, \quad (12)
$$

여기서

$$
\Pi_2=\begin{bmatrix}(1,1) & (1,2) & (1,3) & (d+h)(A+BK)^TP\\ * & (2,2) & (2,3) & (d+h)A_1^TP\\ * & * & (3,3) & (d+h)K^TB_1^TP\\ * & * & * & -(d+h)P\end{bmatrix},
$$

$$
\begin{aligned}
(1,1)&=(A+BK)^TP+P(A+BK)+Q_1+Q_2+2(Y+Y^T)+(d+h)X_{11},\\
(1,2)&=PA_1-Y+2T^T+(d+h)X_{12},\\
(1,3)&=PB_1K-Y+2W^T+(d+h)X_{13}\\
(2,2)&=-Q_1-T-T^T+(d+h)X_{22},\\
(2,3)&=-T-W^T+(d+h)X_{23},\\
(3,3)&=-Q_2-W-W^T+(d+h)X_{33}.
\end{aligned}
$$

으로 정의된다.

(12)식에 보조정리 2를 적용하고 λ를 양변에 곱하면

$$
\lambda\Pi_2+\lambda^2\begin{bmatrix}PD\\ 0\\ 0\\ (d+h)PD\end{bmatrix}[D^TP\ \ 0\ \ 0\ \ (d+h)D^TP]
+\begin{bmatrix}E^T\\ E_1^T\\ 0\\ 0\end{bmatrix}[E\ \ E_1\ \ 0\ \ 0]<0, \quad (13)
$$

으로 계산된다.

(13)의 행렬식을 정리하고, (11)식에 λ를 곱한 후, λP, λQ_1, λQ_2, λX_{11}, λX_{12}, λX_{13}, λX_{22}, λX_{23}, λX_{33}, λY, λT, λW를 P, Q_1', Q_2', X_{11}', X_{12}', X_{13}', X_{22}', X_{23}', X_{33}', Y, T, W로 치환하고 여수 정리를 이용하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다

$$\begin{bmatrix} (1,1)' & (1,2)' & (1,3)' & (d+h)(A+BK)^T P & PD & E^T \\ * & (2,2)' & (2,3)' & (d+h)A_1^T P & 0 & E_1^T \\ * & * & (3,3)' & (d+h)K^T B_1^T P & 0 & 0 \\ * & * & * & -(d+h)P & (d+h)PD & 0 \\ * & * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 , \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & Y \\ * & X_{22} & X_{23} & T \\ * & * & X_{33} & W \\ * & * & * & P \end{bmatrix} \geq 0 , \quad (15)$$

여기서

$$(1,1)' = (A+BK)^T P + P(A+BK) + Q_1' + Q_2' + 2(Y+Y^T) + (d+h)X_{11}',$$

$$(1,2)' = PA_1 - Y + 2T + (d+h)X_{12}',$$

$$(1,3)' = PB_1K - Y + W^T + (d+h)X_{13}',$$

$$(2,2)' = -Q_1' - T - T^T + (d+h)X_{22}',$$

$$(2,3)' = E_1^T E_1 - T - W^T + (d+h)X_{23}',$$

$$(3,3)' = -Q_2' - W - W^T + (d+h)X_{33}',$$

으로 정의된다.

(14)식의 양측에 $diag\{P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, I, I\}$를 곱하고, (15)식에도 같은 방법으로 양측에 $diag\{P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}\}$를 곱한다. 또 $V=P^{-1}$, $L=P^{-1}YP^{-1}$, $H=P^{-1}WP^{-1}$, $M=P^{-1}TP^{-1}$, $N_1=P^{-1}Q_1'P^{-1}$, $N_2=P^{-1}Q_2'P^{-1}$, $\Sigma_{11}=P^{-1}X_{11}'P^{-1}$, $\Sigma_{12}=P^{-1}X_{12}'P^{-1}$, $\Sigma_{13}=P^{-1}X_{13}'P^{-1}$, $\Sigma_{22}=P^{-1}X_{22}'P^{-1}$, $\Sigma_{23}=P^{-1}X_{23}'P^{-1}$, $\Sigma_{33}=P^{-1}X_{33}'P^{-1}$, $G=KP^{-1}$로 정의하고 여수 정리를 사용하여 계산하면 정리 1의 (5), (6)식을 각각 이끌어 낼 수 있다. ■

참조 1

정리 1에서의 선형행렬 부등식은 최근에 개발된 여러 최적화 알고리즘으로 쉽게 구할 수 있다. 본 논문에서는 Matlab의 LMI Control Toolbox를 이용한다.

참조 2

본 논문에서는 [3],[5],[7]-[9]에서와 같이 시스템 안정성 확보를 위한 제어기 설계 방법을 제시하였다. 서론에서 언급되었듯이, 또 다른 제어문제 중 하나는 제어기 설계시 적절한 성능을 보장하는 것이다. 대표적인 방법 중 하나로 Chang과 Peng[14]에 의해 소개된 보장 비용 제어기법이다. 연속 함수 시스템에서 주로 사용되는 보장 비용 함수(cost function)는 다음과 같다.

$$J = \int_0^\infty [x^T(t)R_1 x(t) + u^T(t)R_2 u(t)]dt$$

여기서 $R_1>0$, $R_2>0$이다.

시간 지연 혹은 불확정 동적 시스템에 대하여 폐루프 시스템이 정규적이고 임펄스프리이면서 점근적 안정성을 만족하는 $u*(t)$와 폐루프 시스템의 보장 비용 상한치인 $J \le J*$가 존재하면, $J*$를 가리켜 보장 비용이라 하고 $u*(t)$를 보장 비용 제어기라 한다[15]-[17]. 추후에 본 논문의 연구 결과를 바탕으로 시스템의 성능 보장을 고려한 보장 비용 제어로 확장하려 한다.

2.3 수치 예제

앞 절에서 제시한 결과의 유용성을 보이기 위하여 다음의 두 예제를 고려하자.

예제 1

시간지연 시스템에서 가장 널리 인용되는 예제 중 하나인 다음의 시스템을 고려하자.

$$\dot{x}(t) = (A+\Delta A)x(t) + (A_1 + \Delta A_1)x(t-d) + Bu(t)$$

여기서

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ A_1=\begin{bmatrix} -2 & -0.5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \ B=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

이고 $\Delta A(t)$와 $\Delta A_1(t)$는 불확정성 행렬로 다음을 만족한다.

$$\| \Delta A(t) \| \le 0.2, \quad \| \Delta A_1(t) \| \le 0.2 \quad \forall t.$$

위 시스템을 식 (3)과 같은 행렬로 나타내면

$$D=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ E=E_1=\begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix},$$

으로 나타낼 수 있다. 정리 1에서 제시한 선형행렬 부등식에 적용하여 해를 구하면 시간지연의 최대허용범위와 제어기 각각 $d \le 0.8071$, $u(t) = [-0.0013 \ \ -0.9938]x(t)$의 결과를 얻었다. 표 1에서는 본 논문에서의 결과와 다른 연구 결과들을 비교하였다. 표 1에 따르면 다른 논문들에 비해 시간지연의 최대허용범위가 커졌음을 알 수 있다. 또한 [3],[9]의 연구 결과에 비해 적은 K값으로 시스템의 안정성을 확보할 수 있음을 알 수 있다.

표 1. 시간지연의 최대 허용 범위 (예제 1)

Table 1. Stability bound of d and control gain K (Example 1)

	d	K
Li *et al.* [7],[8]	0.2716	$-[8.701\times10^{-6} \ \ 1.009]$
Moon *et al.* [3]	0.4500	$-[4.8122 \ \ 7.7129]$
Fridman & Shaked [9]	0.5865	$-[0.3155 \ \ 4.4417]$
Ours	0.8071	$-[0.0013 \ \ 0.9938]$

예제 2

제어기 입력에 시간지연을 추가한 다음의 시스템을 고려해보자.

$$\dot{x}(t) = (A+\Delta A)x(t) + (A_1 + \Delta A_1)x(t-d) + Bu(t) + B_1 u(t-h)$$

여기서

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ A_1=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}, \ B=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

이고 $\Delta A(t)$와 $\Delta A_1(t)$,는 예제 1과 같고 $B_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$이다.

선형행렬 부등식을 만족하는 시간지연의 최대허용범위는 $d+h \le 0.8148$로, 이 때 제어기는 $u(t)=[-0.0176 \ \ -0.6789]x(t)$로 설계된다. 그림 1은 초기조건이 $\phi(t)=[0.2 \ 0.2]^T$, $t\in[-0.4074, 0]$이고 시간 지연이 각각 $d=h=0.4074$일 때 제어기 시스템의 응답 곡선으로, 시간이 지남에 따라 0으로 수렴함을 알 수 있다.

3. 결 론

본 논문에서는 상태변수와 입력변수에 시간지연과 불확정성을 가지는 동적 시스템에서 시간지연의 최대허용범위 내에서 점근 안정성을 보장하는 제어기를 설계하였다. 본 연구에서는 리아프노프 방정식을 이용하여 제어기 설계를 제안하였다. 이 때 시간지연의 최대허용범위는 블록 최적화가 가능한 선형행렬 부

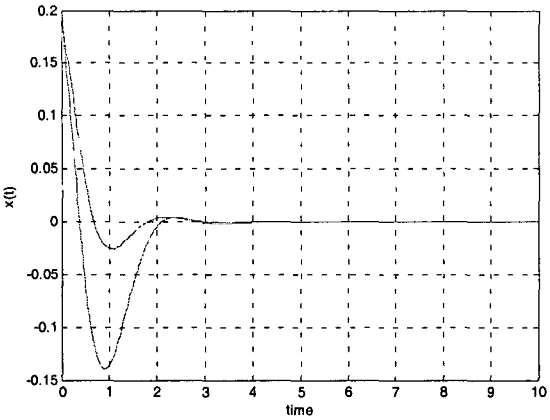

그림 1 시스템 응답 곡선 (예제 2)

Fig. 1. Time response of system (Example 2)

등식으로 표현되어 모든 해를 동시에 구할 수 있다. 또한 제시된 결과는 수치예제를 통해 기존의 결과보다 향상되었음을 보여준다.

향후 본 논문의 연구 결과를 바탕으로 참고 2에서 언급한 보장 비용 제어 문제, 포화 구동기(saturating actuator)를 가지는 시스템의 안정화 문제 등으로 확장하고자 한다.

참 고 문 헌

[1] J. Hale and S.M. Verduyn Lunel, Introduction to Functional Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1993.

[2] P. Park, "A delay-dependent stability criterion for systems with uncertain time-invariant delays," IEEE Translations on Automatic Control, Vol. 44. pp. 876-877, April 1999..

[3] Y .S. Moon, P. Park, W. H. Kwon, and Y .S. Lee, "Delay-dependent robust stabilization of uncertain state-delayed systems", International Journal of Control, Vol. 74, pp. 1447-1455, 2001.

[4] M. Wu, Y. He, J. -H She, and G. -P Liu, "Delay-dependent criteria for robust stability of time-varying delay systems", Automatica, Vol. 40, pp. 1435-1439, 2004.

[5] D. Yue, "Robust stabilization of uncertain systems with unknown input delay", Automatica, Vol. 40. pp. 331-336, 2004.

[6] L. Xie, "Output feedback H_∞ control of systems with parameter uncertainty", International Journal of Control, Vol. 63, pp.1656-1659, 1996.

[7] X. Li and C. de Souza, "Criteria for robust stability and stabilization of uncertain linear systems with state delay," Automatica, Vol. 22, pp. 1657-1662, 1997.

[8] X. Li and C. de Souza, "Delay-dependent robust stability and stabilization of uncertain linear delay systems: A linear matrix inequality approach", IEEE Translations on Automatic control. Vol. 42, pp. 1144-1148, 1997.

[9] E. Fridman and U. Shaked, "An improved stabilization method for linear time-delay systems", IEEE Translations on Automatic Control, Vol. 47, pp. 1931-1937, 2002.

[10] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory, Philadelphia, PA:SIAM, 1994.

[11] V. Kapila and W. M. Haddad, "Memoryless H_∞ controllers for discrete time systems with time delay", Automatica, Vol. 35, pp.1443-1451, 1998.

[12] M. Zribi and M. S. Mahmoud, " H_∞-control design for systems with multiple delay", Computers and Electrical Engineering, Vol. 25, pp. 451-475, 1999.

[13] P. -L. Liu and I. -J. Su, "Stability for single and large-scale uncertain systems with time-varying delays", IEE Proceeding Control Theory Application, Vol. 146, pp. 591-597, 1999.

[14] S. S. L. Chang, T. K. C. Peng, Adaptive guaranteed cost control of systems with uncertain parameters, IEEE translation on Automatic Control, AC-17 pp. 474-483, 1972.

[15] I. R. Petersen, Optimal guaranteed cost control and filtering for uncertain linear systems, IEEE translation on Automatic Control, AC-37 pp. 1971~1977, 1994.

[16] L. Yu, J. Chu, An LMI approach to guaranteed cost control of linear uncertain time-delay systems, Automatica, vol. 35, pp. 1155-1159, 1999.

[17] Esfahani S. H. Petersen I. R. An LMI approach to output-feedback-guaranteed cost control for uncertain time-delay systems, International Journal of Robust and Nonlinear Control, vol. 10, pp. 157-174, 2000.

저 자 소 개

조 현 주(趙 賢 珠)

1981년 1월 19일생. 2004년 영남대학교 전기공학과 졸. 2004~현재 동 대학원 전기공학과 석사과정.

Tel : (053)810-3962, Fax : (053)810-4629

E-mail : eliny@yumail.ac.kr

박 주 현(朴 柱 炫)

1967년 12월 12일생. 1990년 경북대학교 전자공학과 졸. 1997년 포항공과대학교 대학원 졸(공학박사). 1997~2000년 지능자동화연구센터 연구원. 2000~현재 영남대학교 조교수.

Tel : (053)810-2491, Fax : (053)810-4629

E-mail : jessie@yu.ac.kr