

< 논문 >

## 상대 절점 변위를 이용한 비선형 유한 요소 해석법

배 대 성<sup>†</sup> · 김 완 구<sup>\*</sup>

(2004년 7월 16일 접수, 2005년 2월 17일 심사완료)

### A Relative Nodal Displacement Method for Element Nonlinear Analysis

Dae sung Bae and Wan Goo Kim

**Key Words :** Relative Nodal Displacement(상대 절점 변위), Moving Reference Frame(움직이는 좌표계), Topology Analysis (위상 해석), Finite Element Method(유한 요소법), Large Deformation(대 변형), Truss Structure(트러스 구조물)

#### Abstract

Nodal displacements are referred to the initial configuration in the total Lagrangian formulation and to the last converged configuration in the updated Lagrangian formulation. This research proposes a relative nodal displacement method to represent the position and orientation for a node in truss structures. Since the proposed method measures the relative nodal displacements relative to its adjacent nodal reference frame, they are still small for a truss structure undergoing large deformations for the small size elements. As a consequence, element formulations developed under the small deformation assumption are still valid for structures undergoing large deformations, which significantly simplifies the equations of equilibrium. A structural system is represented by a graph to systematically develop the governing equations of equilibrium for general systems. A node and an element are represented by a node and an edge in graph representation, respectively. Closed loops are opened to form a spanning tree by cutting edges. Two computational sequences are defined in the graph representation. One is the forward path sequence that is used to recover the Cartesian nodal displacements from relative nodal displacement and traverses a graph from the base node towards the terminal nodes. The other is the backward path sequence that is used to recover the nodal forces in the relative coordinate system from the known nodal forces in the absolute coordinate system and traverses from the terminal nodes towards the base node. One open loop and one closed loop structure undergoing large deformations are analyzed to demonstrate the efficiency and validity of the proposed method.

#### 1. 서론

기하학적 비선형 해석은 많은 연구자들에 의해서 연구 되어왔다.<sup>(1~4)</sup> 그들이 제시한 평형 방정식은 Total Lagrangian 방법이나 Updated Lagrangian 방법에 바탕을 두고 있다.

Total Lagrangian 방법에서는 절점의 변형이 초기 상태를 기준으로 측정되기 때문에 평형 방정식은 비교적 간단하다. 그러나 구조물이 크게 변형된다면 회전과 관련된 비선형성 때문에 여러 가지 어려움에 직면하게 된다. Updated Lagrangian 방법에서는 절점변위가 마지막 수렴상태에서 측정되고, 회전 비선형성은 절점에 가해지는 하중을 세분화 함으로서 극복하고 있다. 그러나 하중의 변화가 큰 경우에는 두 가지 방법 모두 다 어려움에 직면하게 된다.

† 책임저자, 회원, 한양대학교, 기계공학과  
Email : dsbae@hanyang.ac.kr  
TEL : 031-400-5250

\* 평선배이주

Avello 는 초기상태에서 변형을 측정하였으나 Strain 은 움직이는 좌표계에서 표현하였다.<sup>(5)</sup> 따라서 그 변형률은 강제 운동에 대해 변하지 않는다. Shabana 는 유연 다물체 동역학에서 절대 좌표계 공식을 제안하였고,<sup>(6-8)</sup> Shimizu 는 절대 좌표방법에 회전 관성의 영향을 고려하였다.<sup>(9)</sup> 이러한 절대 좌표방법은 각 요소(Element)의 강성 행렬이 강제 운동을 포함하고 있기 때문에 비선형이 강한 대 변형 문제를 표현 하기에는 어려움이 있었다.

이러한 문제를 극복하기 위해 본 논문에서는 상대 절점 변위 방법과 Bae 에 의해 제시된 순환 가상변위 방정식을 이용하였다.<sup>(12-17)</sup>

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2 장에서는 상대 절점 변위의 그래픽적인 표현과 그를 이용한 기구학적 상관관계에 대해 기술하였고, 이를 바탕으로 3 장에서는 변형 에너지와 외력 등으로 구성된 운동방정식을 제시하였고 4 장에서는 실제 사용되고 있는 상용프로그램과 결과를 비교하였다.

## 2. 상대 절점변위의 기구학

절점의 변위를 표현하기 위해서 여러 가지 방법이 사용되고 있으나 본 논문에서는 요소간의 연결 상태를 통해 상대적으로 표현 하였다. 이를 설명하기 위해 그래픽적인 표현과 그로부터 유도되는 기구학적인 상관관계에 대해 정의 하여야 한다.

### 2.1 그래프 이론적 표현

본 논문은 평형 방정식 유도에 있어서 상대 절점 변위 방법을 제안한다. 경로에 따른 상대 절점 변위의 합성에 의해 절대 절점 변위가 얻어지기 때문에 요소간의 연결 상태가 구조물의 평형방정식의 구성에 앞서 표현되어야 한다. 따라서 위상해석(Topology analysis)이 유한 요소로 이산화 된 구조 시스템에 대해서 행해져야 한다. 이 이산화 된 시스템은 그래프로 표현 될 수 있다. 절점(Node) 과 요소(Element)는 그래프의 절점과 변으로 상용하게 표현 될 수 있다.

### 2.2 기구학적 정의

Fig. 1(a)와 Fig. 1(b)에서와 같이 두 개의 빔 요소로 구성된 시스템을 살펴보자. Fig. 1(a)에서 절점  $i-1$ 과  $i$  는 그래프 내에서 각각  $i$  와  $i+1$  의 내부 절점(inboard node)으로 가정된다.

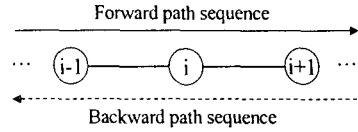


Fig. 1(a) Graphic theoretic representation for the beam elements

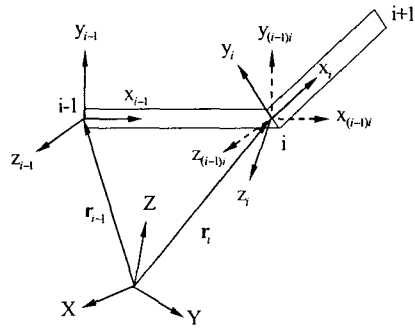


Fig. 1(b) Two finite beam elements

$X-Y-Z$  는 관성 좌표계 이고  $x_k - y_k - z_k$  ( $k = i-1, i$ ) 는 절점  $k$  에서 정의되는 절점 좌표계이다. 그리고  $r_k$  는 절점의 위치 벡터이다.

$x_{(i-1)i} - y_{(i-1)i} - z_{(i-1)i}$  는 절점  $i$  가 정의되는 좌표계이며 첫 번째 첨자  $i-1$  은 두 번째 첨자  $i$  의 내부 절점 번호이다.

기존의 유한 요소 해석 방법에서 절점 변위는 고정된 좌표계에서 정의된다. 본 연구에서는 내부 절점 좌표계(inboard nodal reference frame)에서 측정된 상대 절점 변위가 일반좌표로 정의된다. 상대 절점 변위의 위치와 자세는 각각  $u'_{(i-1)i}$  와  $\Theta'_{(i-1)i}$  로 정의된다. 관성 좌표계에서 절점  $i$  의 위치와 자세는 절점  $i-1$  의 좌표계에서 다음과 같이 표현 될 수 있다.

$$r_i = r_{(i-1)} + A_{(i-1)}(s'_{(i-1)i0} + u'_{(i-1)i}) \quad (1)$$

$$A_i = A_{i-1} D_{(i-1)i} (\Theta'_{(i-1)i}) C_{(i-1)i} \quad (2)$$

여기서

$$\Theta'_{(i-1)i} = [\theta'_{(i-1)i1} \quad \theta'_{(i-1)i2} \quad \theta'_{(i-1)i3}]^T \quad (3)$$

식 (1)과 (2)에서  $\mathbf{A}_k$  ( $k=i-1, i$ )는 절점 좌표계  $k$ 의 변환 행렬이고  $\mathbf{C}_{(i-1)i}$ 는  $x_i - y_i - z_i$ 와  $x_{(i-1)i} - y_{(i-1)i} - z_{(i-1)i}$  사이의 변환 행렬이다.

$\mathbf{s}_{(i-1)i0}$ 는 변형이 없는 상태에서의  $x_{(i-1)i} - y_{(i-1)i} - z_{(i-1)i}$ 에서 구해진 절점  $i$ 의 위치 벡터이고  $\mathbf{u}_{(i-1)i}$ 는 변형량을 의미한다.  $\mathbf{D}_{(i-1)i}$ 는 절점 좌표계  $i-1$ 에서의  $x_{(i-1)i} - y_{(i-1)i} - z_{(i-1)i}$ 의 회전 변환 행렬이며 1-2-3 오일러(Euler angle)에 의해서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{D}_{(i-1)i} = \mathbf{D}_1(\theta'_{(i-1)i1})\mathbf{D}_2(\theta'_{(i-1)i2})\mathbf{D}_3(\theta'_{(i-1)i3}) \quad (4)$$

여기서

$$\mathbf{D}_1(\theta_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ 0 & \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_2(\theta_2) = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & 0 & \sin \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\mathbf{D}_3(\theta_3) = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

식 (1)에 변분을 취하면 다음과 같다.

$$\delta \mathbf{r}'_i = \mathbf{A}_{(i-1)i}^T \delta \mathbf{r}'_{(i-1)i} - \mathbf{A}_{(i-1)i}^T (\tilde{\mathbf{s}}'_{(i-1)i0} + \tilde{\mathbf{u}}'_{(i-1)i}) \delta \boldsymbol{\pi}'_{(i-1)i} + \mathbf{A}_{(i-1)i}^T \delta \mathbf{u}'_{(i-1)i} \quad (6)$$

여기서  $\delta \mathbf{r}'$ ,  $\delta \boldsymbol{\pi}'$ 는 가상 변위(Virtual Displacement) 벡터를 의미하고 기호 틸드( $\sim$ )는 벡터의 원소로 구성되는 반 대칭(skew symmetric) 행렬이며  $\mathbf{A}_{(i-1)i}$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{A}_{(i-1)i} = \mathbf{A}_{(i-1)}^T \mathbf{A}_i \quad (7)$$

절점  $i$ 와  $i-1$  사이의 가상 회전 관계는 아래와 같다.

$$\delta \boldsymbol{\pi}'_i = \mathbf{A}_{(i-1)}^T \delta \boldsymbol{\pi}'_{(i-1)} + \mathbf{A}_{(i-1)}^T \mathbf{H}_{(i-1)} \delta \boldsymbol{\Theta}'_{(i-1)} \quad (8)$$

여기서  $\mathbf{H}$ 는

$$\mathbf{H}_{(i-1)i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sin(\theta'_{(i-1)i2}) \\ 0 & \cos(\theta'_{(i-1)i1}) & -\sin(\theta'_{(i-1)i1})\cos(\theta'_{(i-1)i2}) \\ 0 & \sin(\theta'_{(i-1)i1}) & \cos(\theta'_{(i-1)i1})\cos(\theta'_{(i-1)i2}) \end{bmatrix} \quad (9)$$

식 (6)과 (8)에 의해서 한 쌍의 인접한 요소에 대해서 순환 가상 변위 방정식(Recursive Virtual Displacement Equation)이 만들어진다.

$$\delta \mathbf{Z}_i = \mathbf{B}_{(i-1)i1} \delta \mathbf{Z}_{(i-1)} + \mathbf{B}_{(i-1)i2} \delta \mathbf{q}_{(i-1)i} \quad (10)$$

여기서

$$\delta \mathbf{Z}_k = [\delta \mathbf{r}'_k^T \quad \delta \boldsymbol{\pi}'_k^T]^T \quad (k=i-1, i) \quad (11)$$

$$\delta \mathbf{q}_{(i-1)i} = [\delta \mathbf{u}'_{(i-1)i}^T \quad \delta \boldsymbol{\Theta}'_{(i-1)i}^T]^T \quad (12)$$

$$\mathbf{B}_{(i-1)i1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{(i-1)i}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{(i-1)i}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -(\tilde{\mathbf{s}}'_{(i-1)i0} + \tilde{\mathbf{u}}'_{(i-1)i}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{(i-1)i2} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{(i-1)i}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{(i-1)i}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{H}_{(i-1)i} \end{bmatrix} \quad (13)$$

여기서 주목해야 할 것은  $\mathbf{B}_{(i-1)i1}$ 와  $\mathbf{B}_{(i-1)i2}$ 는 오직 절점  $i$ 와  $i-1$ 사이의 상대 절점 변위  $\mathbf{q}_{(i-1)i}$ 만의 함수라는 것이다.

### 3. 지배 방정식

위에서 기술된 기구학적 상관 관계를 통해 선형과 비선형 요소로 이루어진 요소의 강성 행렬을 정의할 수 있다. 또 외력과 기구학적 구속 조건을 추가하여 정적 해석을 위한 운동 방정식을 완성할 수 있다.

#### 3.1 변형 에너지

여러 절점을 갖는 유한 요소에서 변형 에너지는 오직 내부 좌표계에 상대적인 상대 절점 변위의 영향을 받고 강체의 운동과는 무관하다. 때문에 시스템에 대한 변형 에너지의 변분식은 다음과 같이 얻어진다.

$$\delta W = \sum_{k=1}^n \delta \mathbf{q}_{(k-1)k}^T \mathbf{K}_{(k-1)k} \mathbf{q}_{(k-1)k} = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} \quad (14)$$

여기서  $\delta \mathbf{q}$ 는 기구학적으로 모든 경계조건을 만

족한다. 또한 요소의 강성행렬(Stiffness matrix)은 절점 좌표계에서 생성되기 때문에 강제 운동에 의한 변형 에너지는 식 (14)에서 나타나지 않는다. 강성행렬  $\mathbf{K}_{(k-1)k}$  는 아래와 같이 선형 및 비선형 항으로 구성된다.<sup>(4)</sup>

$$\mathbf{K}_{(k-1)k} = \mathbf{K}_{(k-1)k}^L + \mathbf{K}_{(k-1)k}^{NL} \quad (15)$$

여기서

$$\mathbf{K}_{(k-1)k}^L = \int_0^{l_{(k-1)k}} \Gamma_{(k-1)k}^{*T} \Xi_{(k-1)k}^L \Gamma_{(k-1)k}^* dx \quad (16)$$

$$\mathbf{K}_{(k-1)k}^{NL} = \int_0^{l_{(k-1)k}} \Gamma_{(k-1)k}^{*T} \Xi_{(k-1)k}^{NL}(\mathbf{q}_{(k-1)k}) \Gamma_{(k-1)k}^* dx \quad (17)$$

식 (16)과 (17)에서  $\mathbf{K}_{(k-1)k}^L$  는 선형 강성행렬,  $\mathbf{K}_{(k-1)k}^{NL}$  는 비선형 강성 행렬이며,  $l_{(k-1)k}$  는 절점  $k-1$  와  $k$  사이에서의 변형되기 이전 요소의 길이로 정의 된다.  $\mathbf{K}_{(k-1)k}^{NL}$  의 크기는  $\mathbf{q}_{(k-1)k}$  가 작을 때 무시될 수 있다.

### 3.2 외력

절대 좌표계에서 정의되는 절점력  $\mathbf{Q}$  와 상대 절점 좌표계에서 표현되는  $\mathbf{R}$  에 의한 가상일은 다음과 같이 표현된다.

$$\delta W = \delta \mathbf{Z}^T \mathbf{Q} + \delta \mathbf{q}^T \mathbf{R} \quad (18)$$

$\delta \mathbf{Z} = \mathbf{B} \delta \mathbf{q}$  관계를 식 (18)에 넣어 정리 하면

$$\delta W = \delta \mathbf{q}^T (\mathbf{B}^T \mathbf{Q} + \mathbf{R}) = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{Q}^* \quad (19)$$

여기서

$$\mathbf{Q}^* = \mathbf{B}^T \mathbf{Q} + \mathbf{R} \quad (20)$$

### 3.3 경계 조건

상대 절점 변위는 오직 트리 토폴로지(Tree Topology)를 가지는 구조에서 정의된다. 따라서 시스템이 폐 루프(closed loop)라면 그 시스템은 트리 토폴로지(Tree Topology)를 형성하여야 한다. 절단 조인트 방법(The cut joint method)<sup>(12,13)</sup>은 폐 루프로부터 절점을 제거하여 트리 토폴로지를 만든다. 그리고 트리 토폴로지를 만들 때 한 절점을 절단하고 절단된 절점을 복원하는 다음의 구속 조건식을 지배 방정식에 첨가 한다.

$$\Phi(\mathbf{q}) = 0 \quad (21)$$

### 3.4 평형 방정식

폐 루프 시스템에서 상대 절점변위  $\mathbf{q}$  는 독립적이지 않기 때문에,  $\mathbf{q}$  는 식 (21)의 경계 조건을 반드시 만족시켜야 한다. 식 (21)에 변분을 취하면 식 (22)가 얻어진다.

$$\delta \Phi = \Phi_{,q} \delta \mathbf{q} = 0 \quad (22)$$

구속된 계에서 평형 방정식을 얻기 위해 라그랑지 승수 정리(Lagrange multiplier theorem)를 적용하여 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\delta \mathbf{q}^T (\mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{Q}^* + \Phi_{,q}^T \boldsymbol{\lambda}) = 0 \quad (23)$$

여기서  $\delta \mathbf{q}$  는 임의적(arbitrary)이다. 따라서  $\delta \mathbf{q}$  의 계수는 0 이 되어야 하므로 다음 식이 얻어진다.

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{K} \mathbf{q} + \Phi_{,q}^T \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{Q}^* \quad (24)$$

위의 식 (24)에서 식들의 수가 변수들의 수보다 적기 때문에 위의 식을 풀 수가 없다. 그래서 식 (21)에 주어진 경계조건식 들이  $\mathbf{q}$  와  $\boldsymbol{\lambda}$  의 값을 찾기 위해 추가 된다. 상대 절점변위  $\mathbf{q}$  는 식 (21)과 (24)를 동시에 품으로써 구할 수 있다.

위의 식에서  $\Phi$ ,  $\Phi_{,q}$  와  $\mathbf{Q}^*$  는  $\mathbf{q}$  의 비선형 함수이기 때문에 Newton-Raphson 법에 의해 풀 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{,q} & \Phi_{,q}^T \\ \Phi_{,q} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{q} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \Phi \end{bmatrix} \quad (25)$$

여기서

$$\mathbf{F}_{,q} = \mathbf{K} + (\Phi_{,q}^T \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{Q}^*)_{,q} \quad (26)$$

식 (26)을 풀어서 다음 연산을 위한 개선된  $\mathbf{q}$  값은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\mathbf{q} = \mathbf{q} + \Delta \mathbf{q} \quad (27)$$

식 (25)과 (27)을 이용하여 허용 오차 이내에 있는 값을 얻을 때까지 반복하게 된다.

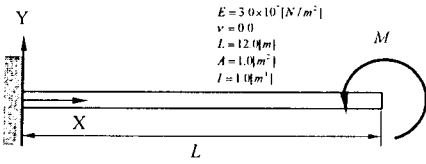


Fig. 2 A cantilever beam subjected to and end moment

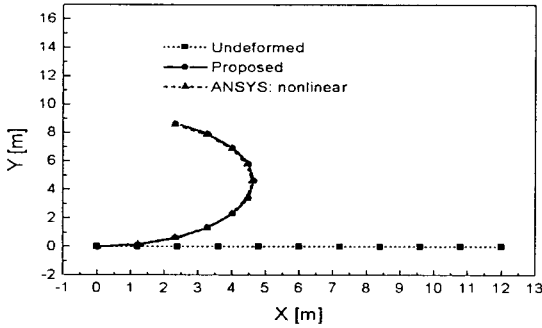


Fig. 3 Deformed shape of the beam

#### 4. 수치 예제

외팔보의 정적 해석에서 Fig. 2 와 같이 외팔보의 끝부분에 모멘트  $M$  이 주어지고 있다. 그림에서  $E$ ,  $\nu$ ,  $L$ ,  $A$  그리고  $I$  는 각각 Young's modulus, Poisson ratio, 외팔보의 길이, 넓이, 그리고 2 차 면적 관성 모멘트를 나타낸다.

모멘트  $M = 6.545106[N \cdot m]$  이 끝부분 절점에 주어지고 있다. Fig. 3 에서 제안된 방법과 상용 프로그램인 ANSYS 로 해석하여 얻어진 변형된 외팔보의 형상을 보여주고 있다. 이 그림을 통해 제안된 방법과 ANSYS 를 통해 얻은 결과가 거의 일치함을 알 수 있다.

Fig. 4 에서 끝부분 절점의 축 방향 변형의 수렴을 보여 주고 있다. 정적 해석에서 요소의 개수가 적을 경우에는 ANSYS 의 수치 결과가 제안된 방법의 결과보다 더 정확함을 보여주지만 적용된 요소의 개수가 증가 할수록 제안된 방법으로 얻어진 변형은 빠르게 ANSYS 의 수치 결과로 수렴하는 모습을 보여주고 있다. 그림의 두 방법(제안된 방법과 ANSYS)에서 요소 개수가 6 개 이상에서는 거의 동일한 결과를 보여주고 있다.

해석 결과로부터 비선형 강성행렬의 영향은 요소의 개수가 증가 할 수록 급속하게 줄어드는 것을

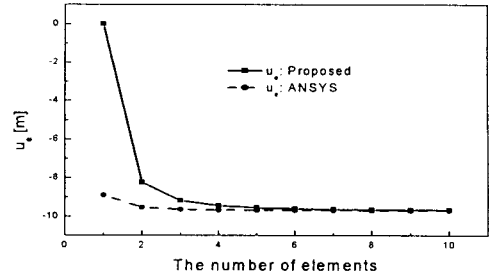


Fig. 4 Convergence of axial deformation at the end node vs. the number of element

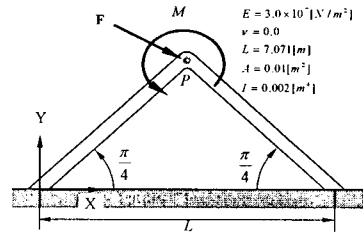


Fig. 5 A closed loop system subjected to a concentrated force and moment

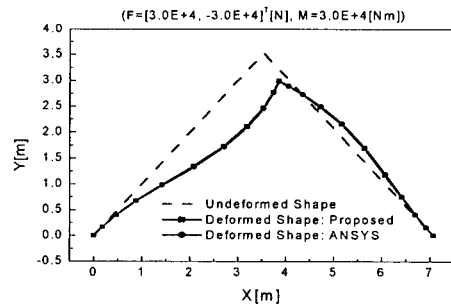


Fig. 6 Comparison of deformed shapes of the closed System

알 수 있다. 한편 ANSYS 는 두 번의 연산을 하는 동안 제안된 방법은 단지 한번의 연산 후 수렴한다. 이는 비선형 강성행렬의 영향이 급격히 줄어들었기 때문이다. 이는 비선형 강성행렬이 구조체에 어떤 영향을 주는지를 의미하며 제안된 방법이 이 강성행렬의 영향을 줄여 수렴성을 더 좋게 한 것을 의미한다. Fig. 5 는 폐 루프 시스템의 한 점 P 에 집중 하중  $F$  와 모멘트  $M$  이 가해지는 시스템을 보여 주고 있다.  $F = [3 \times 10^4 \quad -3 \times 10^4]^T [N]$  와  $M = 3.0 \times 10^4 [N \cdot m]$  가 점 P 에 가해질 때, 그 시스템의 변형은 Fig. 6 에서 보여 주고 있다. 이 수치 예

제에서는 20 개의 요소를 사용 하였고 제안한 방법으로 얻은 결과와 상용 프로그램인 ANSYS 의 수치적인 결과가 거의 일치함을 알 수 있다. 또한 제안한 방법은 일곱 번의 연산 후에 수렴하였지만 ANSYS 는 12 번의 연산 후 수렴하는 것을 보였다.

## 5. 결론

대 변형이 일어나는 구조물을 해석하기 위한 기하학적 비선형 방법을 본 연구에서 다루었고 해를 구하기 위한 알고리즘을 개발하였다. 또한 제안된 방법의 효율성과 타당성을 증명하기 위해 두 종류의 대 변형이 일어나는 구조물에 대해 비선형 정적 해석이 이루어졌다. 기존의 선형 요소 강성행렬은 평형 방정식을 구성하기 위해 사용하였다.

그 수치 결과에서 보여 주듯이 제안된 방법이 동일한 대 변형 효과를 가지면서도 수렴성이 기존의 방법보다 더 좋음을 알 수 있다. 본 연구에서는 제안된 방법을 트러스 구조물에 적용하였고 평판뿐만 아니라 입체 요소로 구성된 구조에 대해서도 연구되고 있다. 또한 본 연구를 바탕으로 동적 해석 분야까지 확장하기 위한 연구가 진행되고 있다. 이를 위해 필수적인 질량 관성행렬(Mass matrix)과 감쇠계수(Damping coefficient)에 대한 연구가 진행되고 있으며 이 연구의 결과를 바탕으로 상대 절점 변위를 이용한 유한요소의 동적 응답도 얻어 낼 수 있을 것이다.

## 참고문헌

- (1) El Damatty, A. A., Korol, R. M. and Mirza, F. A., 1997, "Large Displacement Extension of Consistent Shell Element for Static and Dynamic Analysis," *Computers & Structures*, Vol. 62, No. 6, pp. 943~960.
- (2) Mayo, J. and Dominquez, J., 1997, "A Finite Element Geometrically Nonlinear Dynamic Formulation of Flexible Multibody Systems using a New Displacements Representation," *J. Vibration and Acoustics*, Vol. 119, pp. 573~580.
- (3) Dhatt, G. and Touzot, G., 1984, *The Finite Element Method Displayed*, John Wiley & Sons.
- (4) Bathe, K. J., 1996, *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall.
- (5) Avello, A., García De Jolón J. and Bayo, E., 1991, "Dynamics of Flexible Multibody Systems using Cartesian Co-ordinates and Large Displacement Theory," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 32, No. 8, pp. 1543~1564.
- (6) Shabana, A. A., 1996, "An Absolute Nodal Coordinate Formulation for the Large Rotation and Deformation Analysis of Flexible Bodies," Technical Report MBS 96-1-UIC, Department of Mechanical Engineering, University of Illinois at Chicago.
- (7) Shabana, A. A. and Christensen, A., 1997, "Three Dimensional Absolute Nodal Coordinate Formulation: Plate Problem," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 40, No. 15, pp. 2275~2790.
- (8) Shabana, A. A., 1998, *Dynamics of Multibody Systems*, 2nd edition, Cambridge University Press.
- (9) Takahashi, Y. and Shimizu, N., 1999, "Study on Elastic Forces of the Absolute Nodal Coordinate Formulation for Deformable Beams," *Proceedings of the ASME Design Engineering Technical Conferences*.
- (10) Kim, K. S., Kim, K. S. and Yoo, W. S., 2000, "Analysis of Large Deformation in Elastic Multibody Systems Using Absolute Nodal Coordinates" *KSAE Autumn Conference*, pp. 80~86.
- (11) Featherstone, R., 1983, "The Calculation of Robot Dynamics Using Articulated-Body Inertias," *Int. J. Robotics Res.*, Vol. 2, pp. 13~30.
- (12) Bae, D. S. and Haug, E. J., 1987, "A Recursive Formulation for Constrained Mechanical System Dynamics: Part I. Open Loop Systems," *Mech. Struct. and Machines*, Vol. 15, No. 3, pp. 359~382.
- (13) Bae, D. S. and Haug, E. J., 1987, "A Recursive Formulation for Constrained Mechanical System Dynamics: Part II. Closed Loop Systems," *Mech. Struct. and Machines*, Vol. 15, No. 4, pp. 481~506.
- (14) Lin, T. C. and Yae, K. H., 1994, "Recursive Linearization of Multibody Dynamics and Application to Control Design," *J. of mechanical design*, Vol. 116, pp. 445~451.
- (15) Bae, D. S., Han, J. M., Choi, J. H. and Yang, S. M., 2001, "A Generalized Recursive Formulation for Constrained Flexible Multibody Dynamics," *Int. J. Numer. Meth. Engng*, Vol. 50, pp. 1841~1859.
- (16) Ryu, H. S., Bae, D. S., Choi, J. H. and Shabana, A. A., 2001, "A Compliant Track Link Model for High-Speed High-Mobility Tracked Vehicles," *Int. J. Numer. Meth. Engng*, Vol. 50, pp. 1841~1859.
- (17) Bae, D. S., Cho, H. J., Lee, S. H. and Moon, W. K., 2001, "Recursive Formulas for Design Sensitivity Analysis of Mechanical Systems," *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol. 190, pp. 3865~3879.
- (18) Haug, E. J., 1989, *Computer-Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems: Volume I. Basic Methods*, Allyn and Bacon.
- (19) Crisfield, M. A., 1997, *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, Wiley.