신뢰도와 신뢰수준을 고려한 기대수명 공차구간 설정에 관한 연구

- Tolerance Intervals for Expected Time at the Given Reliability and Confidence Level -

최 성 운 *
Choi Sung woon

Abstract

This paper is to propose tolerance intervals for expected time at the given reliability and confidence level for continuous and discrete reliability model. We consider guaranteed - coverage tolerance intervals, that is, reliability - confidence level tolerance intervals. These proposed methodologies can be applied to any industrial application where the customer's operating specification require a high level of reliability.

Keyword : Tolerance Intervals, Expected Time, Reliability, Confidence Level

1. 서 론

우주, 항공, 군사무기, 고속철도와 같은 고도의 정밀성이 요구되는 첨단산업분야에서는 높은 신뢰도와 낮은 PPM 또는 PPB불량이 요구된다. 이 경우 퍼센트 품질 보증용 AQL 계수·계량 조정형 샘플링 검사는 적용이 불가능하며 식스시그마에서 사용되는 공정능력지수 또한 샘플링변동성, 샘플크기, 분산성분, 비정규성 분포의 요인에 따라 가변성의 위험정도가 증가한다. [3, 6] 이 경우 개발·설계단계, 제조단계에서 제품의 신뢰도를 통계적인 신뢰구간과 동시에 고려하여 효율적이고 효과적으로 피드백할 수 있는 새로운 신뢰성 보증기법인 공차구간 수정기법이 요구된다.

* 경원대학교 산업공학과

2005년 2월 접수; 2005년 3월 수정본 접수; 2005년 3월 게재 확정

신뢰구간(Confidence Interval)은 모평균 같은 모집단의 모수를 포함하는 구간(Coverage, 1- α)으로 샘플크기가 증가함에 따라 구간의 폭은 좁아진다. 공차구간(Tolerance Interval)은 신뢰도(R)와 신뢰수준(1- α)을 동시에 고려하는 통계적 공차한계 설정방법이다. 고객과 계약된 공차구간과 실제 생산된 제품의 공차구간의 비교에 의한 신뢰성 및 품질 판정에 적용될 수 있다. 기술공차(Engineering Tolerance)는 실제 측정된 공차구간과 달리 설계자에 의해 제시된 허용 한계이며 예측구간(Prediction Interval)은 k개 앞의 데이터를 예측하기 위한 구간이다.

따라서 본 연구에서는 고도의 신뢰성과 극소의 PPM 또는 PPB 불량률을 신뢰수준과 함께 효율적이고 효과적으로 보증할 수 있는 4가지 연속형 공차설정기법과 2가지 이산형 공차설정 기법을 제안한다.

2장에서는 하한규격, 상한규격, 양쪽규격일 경우 기대수명의 공차구간을 설정할 수 있는 4가지 모형과 6가지 공차계수를 제안하였다. 3장에서는 이산형 공차 구간 설정 모형으로 신뢰도 신뢰구간 및 베타 분포를 이용한 신뢰도와 신뢰수준의 관계모형을 제시하였으며 4장에서 연구결과를 요약하였다.

2. 연속형 기대수명 공차 설정기법

Weibull분포는 적은 샘플크기로도 유연성 있고 광범위하게 사용되는 (DFR, CFR, IFR) 분포이다. 즉, 메탈 피로 강도, 자동차타이어 고장수명, 전자부품의 고장수명, 계획보전시간 등에 적용되며 β=1 : 지수분포, β=2 : Rayleigh분포, β=2.5 : Lognormal 분포, β=3.6 : 정규분포 등을 만족하며 또한 극한값 분포(Extreme Value Distribution)의 성질도 가지고 있다.

정규분포는 전기전자신뢰성인 경우 포물선으로 증가하는(아래로 볼록 : Concave up, Open up) IFR, 구조신뢰성인 경우 스트레스 - 강도 분포에 응용되며 특히 공차설계에 적용되는 특징을 가지고 있다.

Lognormal 분포는 고도의 왜곡된(High Skewed) 분포로 전기전자 신뢰성인 경우 초기에 증가했다가 점점 감소하는 특이한 IFR 성질을 가지고 있으며 부품수명의 효과가 곱셈(Multiplication)효과를 가지고 있을 때 적용한다.

지수분포는 무기억(Lack of Memory, Memoryless) 고장 구간인 CFR에 적용되고 첫 번째 고장 날 때까지의 수명에 관련된 모델에 적용되며 모수의 역수는 포아송 분포가 된다.

Gamma분포는 지수 분포의 합으로 표시되며 n번째까지의 수명에 관련된 대기모델에 적용되며 n=1 : 지수분포, n=2 : χ^2 분포, n=양의 정수 : Erlang분포로서 대기행렬 모델에 적용되고 한 방향으로 구간화되고 위로 볼록(Concave down, Open down)인 IFR성질을 가지고 있다.

Rayleigh분포는 직선형태인 IFR의 신뢰성 모형에 적용되며 샘플링 분포인 t분포, F

분포, χ^2분포는 신뢰구간의 추정에 사용되며 특히 χ^2분포는 중도시험(Censored, Truncaret Test)의 MTBF 구간추정에 적용된다.

Gamma 분포, 정규분포, 이항분포, 포아송분포는 확률변수 수명의 합도 역시 자신의 분포로 재생성(Reproduction)되는 유용한 분포의 성질을 가지고 있다.

신뢰수준을 나타내는 분포는 수평분포(가상적인 분포), 일양분포, 삼각분포, 사다리꼴 분포, 정규분포, 수직분포(가상적인 분포) 등이 있고 불확실성(Uncertainty)정도는 순서대로 감소하여 진다.

2.1 정규분포, 모표준편차를 알고 있는 경우 기대 수명 공차 구간 설정 기법

<u>용어(Notations)</u>

- $R, R(t)$: 정적(Static), 동적(Dynamic) 목표 신뢰도
- $1-\alpha$: 목표신뢰수준
- σ : 수명의 모 표준편차
- n : 샘플크기
- $\overline{T}$: 수명의 샘플 평균
- $\overline{T}_{1-\alpha}$: 신뢰수준 $1-\alpha$인 $\overline{T}$의 신뢰구간
- $\widehat{T}_{1-\alpha,\ k}$: k-ahead 예측구간
- Z : 표준 정규 분포
- T_R : 신뢰도 R인 기대수명 공차 구간
- K, a, b: 목표신뢰도R과 목표신뢰수준 $1-\alpha$가 동시에 고려된 공차설정계수
- PPM : Parts per Million
- PPB : Parts per Billion
- s : 수명의 샘플표준편차
- χ^2 : 카이제곱분포
- AQL : Acceptable Quality Level
- t : t분포
- r : 고장갯수
- F : F분포
- R_l : 최저 신뢰도(Lower Limit on Reliability)
- DFR : Decreasing Failure Rate
- CFR : Constant Failure Rate
- IFR : Increasing Failure Rate

· β : Weibull 분포의 형상모수
· n : Gamma 분포의 형상모수

· <u>고객과의 계약조건</u>
목표 신뢰도(R, R(t)) 또는 목표 불량률 (PPM, PPB), 모 표준편차(σ),
샘플크기(n), 샘플평균($\overline{T}$)

· <u>기대수명 공차구간 설정방법</u>
1)하한규격일 경우 기대수명 공차구간(T_R)

$$\overline{T}_{1-\alpha} = \overline{T} - Z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{- (1)}$$

$$T_R = \overline{T}_{1-\alpha} - Z_{1-R}\,\sigma \quad \text{- (2)}$$

(1)식의 $\overline{T}_{1-\alpha}$를(2)식에 대입하면

$$T_R = \overline{T} - \left(\frac{Z_\alpha}{\sqrt{n}} + Z_{1-R}\right)\sigma$$

$$\therefore \quad T_R = \overline{T} - K_1\sigma \quad \text{- (3)}$$

2)상한규격일 경우 기대수명 공차 구간(T_R)

$$T_R = \overline{T} + K_1\sigma \quad \text{- (4)}$$

3)양쪽규격일 경우 기대수명 공차구간(T_R)

$$\overline{T}_{1-\alpha} = \overline{T} - Z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{- (5)}$$

$$T_R = \overline{T}_{1-\alpha} - Z_{\frac{1-R}{2}}\,\sigma \quad \text{- (6)}$$

(5)식의 $\overline{T}_{1-\alpha}$를(6)식에 대입하면

$$T_R = \overline{T} - \left(\frac{Z_\alpha}{\sqrt{n}} + Z_{\frac{1-R}{2}}\right)\sigma$$

$$\therefore \quad T_R = \overline{T} - K_2\sigma \quad \text{- (7)}$$

· <u>공차구간 설정 응용 방법</u>
동적인 신뢰성 척도인 목표 신뢰도(R, R(t)) 대신 정적인 품질 척도인 목표 불량률 (PPM, PPB)을 고려할 경우에는 T_R, T_{1-R}, $T_{\frac{1-R}{2}}$ 대신 T_{1-PPM}, T_{PPM}, $T_{\frac{PPM}{2}}$ 으로 (3), (4), (7)식을 치환하면 된다.

· <u>공차구간 테이블설정 및 사용방법</u>

Z_{α}, $Z_{1-\alpha}$은 표준 정규분포 표에서 구하는 값으로 α 와 1-R, $\frac{1-R}{2}$의 대표적인 Z 값과 K_1, K_2의 테이블 구조는 표1과 같으며 사용자의 편의를 위해 다양한 α, $1-R$, $\frac{1-R}{2}$,값들에 의한 K_1, K_2를 테이블로 미리 계산해서 제시해주면 효율적인 이용이 가능하다.

< 표1 > 대표적인 Z값과 K_1, K_2 테이블 구조

(a) Z값

	5%	1%	10%
양쪽면적	1.960	2.576	-
한쪽면적	1.645	2.326	1.282

(b) K_1 테이블

	α
	1-R
n	K_1

(c) K_2 테이블

	α
	$\frac{1-R}{2}$
n	K_2

· <u>적용 예</u> : 하한규격일 경우 기대수명 공차구간 (T_R)

· <u>고객과의 계약조건</u>

R=95%, 1- α=90%, σ=5hrs,

n=25. $\overline{T}$ =100hrs

· <u>기대수명 공차구간 설정방법</u>

$T_R = \overline{T} - K_1 \sigma$

$T_{0.95} = 100 - 1.9014(5)$

$= 90.493$hrs

· <u>공차구간 테이블설정 및 사용방법</u>

	α =0.10
	1-R=0.05
n=25	K_1=1.9014

여기서 $K_1 = \dfrac{Z_\alpha}{\sqrt{n}} + Z_{1-R}$

$= \dfrac{Z_{0.10}}{\sqrt{25}} + Z_{0.05}$

$= \dfrac{1.282}{5} + 1.645$

$= 1.9014$

2.2 정규분포, 모 표준편차를 모르는 경우 기대 수명 공차 구간 설정 기법

· <u>고객과의 계약조건</u>

목표 신뢰도 (R, R(t)) 또는 목표 불량률 (PPM, PPB)

샘플크기(n), 샘플평균($\overline{T}$), 샘플 표준편차(s)

· <u>기대수명 공차구간 설정방법</u>

1) 하한규격일 경우 기대수명 공차 구간(T_R) [5]

$T_R = \overline{T} - K_3 s$

단, $K_3 = \dfrac{Z_R + \sqrt{Z_R^2 - ab}}{a}$ - (8)

$a = 1 - \dfrac{Z_\alpha^2}{2(n-1)}$; $b = Z_R^2 - \dfrac{Z_\alpha^2}{n}$ - (9)

2) 상한규격일 경우 기대 수명 공차 구간(T_R) [5]

$T_R = \overline{T} + K_3 s$

3) 양쪽규격일 경우 기대 수명 공차 구간(T_R) [4]

$$T_R = \overline{T} \pm K_4 s$$

$$\text{단, } K_4 = \sqrt{\frac{(n-1)(1+\frac{1}{n})Z^2_{\frac{1-R}{2}}}{\chi^2_{1-\alpha, n-1}}} \quad -(10)$$

· **공차구간 테이블설정 및 사용방법**

목표신뢰도(R)를 고려할 경우는 1- α, R, $\frac{1-R}{2}$, n 에 따른 K_3, K_4 값을 공식 (8), (9), (10)에 따라 미리 계산하여 테이블로 제시할 경우 사용자의 편의 및 효율성을 제공할 수 있다.

목표불량률(PPM, PPB) 을 고려할 경우는 1- α, PPM(PPB), n에 따른 K_3, K_4값을 공식 (8), (9), (10)에 따라 미리 계산하여 테이블로 제시[6] 할 경우 $10^{-6}(PPM)$, $10^{-9}(PPB)$까지의 목표불량률에 따른 제품특성의 공차구간 설정이 가능하여 기존의 10^{-2}~ 10^{-3}(%) 수준의 AQL 샘플링 검사 및 공정특성에 따라 가변적인 공정능력지수를 대체할 수 있게 되어 식스시그마 품질달성 여부를 효율적이고 효과적으로 판단할 수 있다.

· **적용 예** : 양쪽규격일 경우 기대수명 공차 구간(T_R)

· **고객과의 계약조건**

R= 90%, 1- α = 99%

n=4, $\overline{T}$ =80hrs, s=1.15hrs

· **기대수명 공차구간 설정방법**

$$T_R = \overline{T} \pm K_4 s$$

$$= 80 \pm K_4(1.15)$$
$$= 80 \pm 9.394(1.15)$$
$$= 80 \pm 10.8$$
$$= 69.2 \sim 90.8\text{hrs}$$

· **공차구간 테이블설정 및 사용방법**

	1- α=0.99
	R=0.90
n=4	K_4=9.394

여기서 $K_4 = \sqrt{\dfrac{(n-1)(1+\frac{1}{n})Z^2_{\frac{1-R}{2}}}{\chi^2_{1-\alpha,\, n-1}}}$

$= \sqrt{\dfrac{(4-1)(1+\frac{1}{4})Z^2_{0.05}}{\chi^2_{0.99,3}}}$

$= \sqrt{\dfrac{(3.75)1.645^2}{0.115}}$

$= 9.394$

2.3 기타 기대수명 공차구간 설정 기법

2.3.1 Hadeed et al. , 1990 모형 [3]

- 신뢰구간 : $\overline{T}_{1-\alpha} = \overline{T} \pm t_{\frac{\alpha}{2},\, n-1} \dfrac{s}{\sqrt{n}}$

- k-ahead 예측구간 : $\hat{T}_{1-\alpha,\, k} = \overline{T} \pm t_{\frac{\alpha}{2k},\, n-1} \dfrac{s}{\sqrt{n}}$

- 양쪽규격 공차구간 : 단, $K_5 = Z_{\frac{1-R}{2}}(1+\frac{1}{2n})\sqrt{\dfrac{n-1}{\chi^2_{1-\alpha,\, n-1}}}$

2.3.2 Chen, 1993 모형 [1]

- 한쪽규격 공차구간 : $T_R = \overline{T} - K_{6s}$

$T_R = \overline{T} + K_{6s}$

단, $K_6 = \dfrac{t_{\alpha,\, n-1}(\sqrt{n} Z_R)}{\sqrt{n}}$

3. 이산형 신뢰도와 신뢰수준 기법

이항분포는 주어진 n개중 고장이 정확히 r개 고장 날 확률을 구하는 경우 사용되는 반면 첫 번째 고장이 날 때 까지 r번째 고장 날 확률은 기하분포를 적용한다.

베타분포는 이산형 신뢰성 모형의 공차구간 설정에 적용되며 양방향으로 구간화되어 두 모수의 변화에 따라 일양분포, 삼각분포 등의 성질을 가지며 PERT의 3점 견적법에 적용된다. 초기하 분포, 포아송 분포는 이항분포와 비교하여 계산의 정확성, 효율성 판단 기준에 따라 적용되며 모든 분포는 n이 커짐에 따라 정규분포의 성질을 갖게 된다.

3.1 최저 신뢰도(Lower Limit on Reliability) 신뢰구간[2]

- <u>고객과의 계약조건</u>

샘플크기(n), 고장갯수(r), 신뢰수준($1-\alpha$)

- <u>기대수명 공차구간 설정방법</u>

방법1 : Z분포 사용

$$\frac{2r-1+Z^2_{\frac{\alpha}{2}}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{(2r-1)(2n-2r+1)}{n}+Z^2_{\frac{\alpha}{2}}}}{2(n+Z^2_{\frac{\alpha}{2}})} \le \frac{r}{n} \le \frac{2r+1+Z^2_{\frac{\alpha}{2}}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{(2r-1)(2n-2r+1)}{n}+Z^2_{\frac{\alpha}{2}}}}{2(n+Z^2_{\frac{\alpha}{2}})}$$

방법2 : F분포 사용

$$\frac{n-r}{n-r+(r+1)F_{\frac{\alpha}{2},2(r+1),2(n-r)}} \le R_l \le \frac{(n-r+1)F_{\frac{\alpha}{2},2(n-r+1),2r}}{r+(n-r+1)F_{\frac{\alpha}{2},2(r+1),2r}}$$

3.2 베타분포를 이용한 신뢰도와 신뢰수준의 관계

- <u>고객과의 계약조건</u>

샘플크기(n), 고장갯수(r), 최저신뢰도(R_l)

- <u>기대수명 공차구간 설정방법</u>

방법1 : · $1-\alpha=1-\sum_{i=0}^{n-r}\frac{(n+1)!}{i!(n+1-i)!}R_l^{n+1-i}(1-R_l)^i$ (for $r\ge 1$)

· $1-\alpha=1-R_l^{n+1-i}$ (for $r=0$)

· $n=\frac{\ln(1-(1-\alpha))}{\ln R_l}$ [7]

방법2 : · $\alpha=\sum_{i=0}^{r}\frac{\prod_{n+2-i}^{n+1}(n+2-i)}{i!}R_l^{n+1-i}(1-R_l)^i$ (for $r\ge 1$)

$$\cdot \ \alpha = \sum_{i=0}^{r} \frac{1}{i!} R_l^{n+1-i}(1-R_l)^i \qquad (\text{for} \quad r=0) \qquad [2]$$

4. 결 론

본 연구에서는 10^{6} ~ 10^{9} 자리까지의 고도의 목표 신뢰도와 10^{-6} ~ 10^{-9}까지의 극저의 목표 불량률을 목표 신뢰수준과 함께 통계적으로 보증할 수 있는 4가지 연속형 공차설정 기법과 2가지 이산형 공차 설정 기법을 제안하였다.

본 연구에서 제안하는 공차설정 기법을 이용할 경우 고객과 계약된 공차 구간과 실제 생산된 공차구간과의 신뢰성 및 품질비교 판정이 효율적이고 효과적으로 이루어지게 된다.

향후과제로는 연속형 공차 설정 모형에서 신뢰도 분포로 정규분포이외에 Weibull, Lognormal, 지수, Gamma, Rayleigh 분포 등을 이산형 공차 설정모형에서는 기하분포를 적용하는 신뢰도 모형을 개발하고 신뢰수준을 고려하는 분포로 정규분포, t, χ^2, F 분포이외에 일양분포, 삼각분포, 사다리꼴 분포 등을 적용한 불확실성 모형을 개발하는 것이다.

5. 참 고 문 헌

1. Chen, H. (1993), "Monte Carlo Estimation for Guaranteed - Coverage Nonnormal Tolerance Intervals," Proceedings of the 1993 Winter Simulation Conference, PP509-515.
2. Dodson, B. and Nolan, D. (1995), Reliability Engineering Handbook, Tucson ; Quality Publishing.
3. Hadeed, Y. T. and Lewis, K. T. (1990), "The Use of Tolerance Intervals in the Characterization of Semiconductor Devices," Proceedings of the 1990 International Test Conference, Paper 40.3, PP 924-928.
4. Howe, W. G.(1969), "Two-sided Tolerance Limits for Normal Populations - Some Improvements," Journal of the American Statistical Association, 64, PP.610-620.
5. Natrella, M. G.(1963), Experimental Statistics, NBS Handbook91, US Department of Commerce.
6. Odeh, R. E. and Owen, D. B. (1988), Parts Per Million Values for Estimating Quality Levels, New York; Marcel Dekker, Inc..
7. Wotman, D. , et al. (2002), CRE Primer, Quality Council of Indiana.

저 자 소 개

최 성 운 : 현 경원대학교 산업공학과 교수 재직 중. 한양 대학교 산업공학과에서 공학사, 공학석사, 공학박사 학위를 취득하고, 1994년 한국과학재단 지원으로 University of Minnesota에서 1년간 Post-Doc을 수행했으며, 2002년부터 1년 반동안 University of Washington에서 Visiting Professor를 역임하였음. 주요 관심분야는 자동화 생산 및 장치 산업에서의 품질관리이며, 컴퓨터 · 정보통신시스템의 신뢰성 설계 및 분석, RFID 시스템에도 관심을 가지고 있음