

# 근사화 오차 유계 추정을 이용한 비선형 시스템의 적응 퍼지 슬라이딩 모드 제어

## Adaptive Fuzzy Sliding Mode Control for Nonlinear Systems Using Estimation of Bounds for Approximation Errors

서삼준  
Sam-Jun Seo

안양대학교 전기전자공학과

### 요 약

본 논문에서 불확실한 근사화 오차 유계 추정을 이용한 불확실한 비선형 계통에 대한 적응 퍼지 슬라이딩 모드 제어를 제안하였다. 계통 출력이 기준 출력을 추종하기 위해 시스템의 불확실성은 결론부 파라미터의 적응 알고리즘에 의해 온라인으로 조정되는 IF-THEN 규칙을 가지는 퍼지 시스템에 의해 근사화하였다. 또한 근사화 오차가 미지의 상수에 의해 유계된다는 가정 하에 리아프노프 합성법으로 근사화 오차 유계 추정 알고리즘을 제안하였다. 전체 제어 시스템은 제어기내의 모든 신호가 균등 유계이고 추종오차가 점근 안정함을 보장한다. 제안한 적응 퍼지 슬라이딩 모드 제어기의 성능을 독립자 계통에 대한 컴퓨터 모의실험을 통해 입증하였다.

### Abstract

In this paper, we proposed an adaptive fuzzy sliding control for unknown nonlinear systems using estimation of bounds for approximation errors. Unknown nonlinearity of a system is approximated by the fuzzy logic system with a set of IF-THEN rules whose consequence parameters are adjusted on-line according to adaptive algorithms for the purpose of controlling the output of the nonlinear system to track a desired output. Also, using assumption that the approximation errors satisfy certain bounding conditions, we proposed the estimation algorithms of approximation errors by Lyapunov synthesis methods. The overall control system guarantees that the tracking error asymptotically converges to zero and that all signals involved in controller are uniformly bounded. The good performance of the proposed adaptive fuzzy sliding mode controller is verified through computer simulations on an inverted pendulum system.

**Key Words** : fuzzy logic system, approximation error, adaptive fuzzy sliding mode control

### 1. 서 론

1965년 L. A. Zadeh에 의해 퍼지 집합 이론이 처음 소개된 후 활발히 연구되어 온 퍼지 논리 제어기는 전문가의 경험과 지식에 대한 언어적 제어 규칙을 기반으로 계통에 대한 적절한 제어 규칙을 수립하여 사용하면 인간 조작자에 의한 제어 성능보다 우수한 성능을 얻을 수 있으며, 수학적 모델에 근거한 해석적 제어기에 비하여도 그 성능이 뒤지지 않을 뿐 아니라 파라미터 변화 및 외란에 대하여도 강인성이 뛰어나다는 장점을 가지고 있기 때문에 최근에는 모델링이 불가능한 계통에는 물론 수학적 모델이 가능한 계통에 대하여도 많은 적용 사례가 발표되고 있다[1][2].

그러나, 적절한 퍼지 제어 규칙을 설계자의 경험과 시행착오, 운전자의 조작 방법에 의존하고 있어 체계적인 설계 방법이 없고 입출력 퍼지 집합의 소속함수를 구하기 어려우며

안정도를 보장하지 못한다는 단점을 가지고 있다.

최근에 이러한 단점들을 보완하기 위하여 잘 정의되지 않은 복잡한 시스템에 적합한 퍼지 논리 제어기와 적절한 스위칭 평면을 선정하여 스위칭 평면의 동특성에 따라 불연속 입력을 인가하여 계통의 복잡성이나 비선형성 등으로 인하여 수학적 정보가 부족하거나 특히, 불확실성을 포함하는 계통에 대한 강인성을 보장하는 가변 구조 제어 기법[3][4]을 결합한 퍼지 슬라이딩 모드 제어기의 연구가 활발히 진행되고 있다.

Palm[5], Hwang 등[6] 그리고 Kim 등[7]은 퍼지 슬라이딩 모드의 안정도를 고려하여 등가 제어 입력이 이미 존재한다는 가정 하에 퍼지규칙을 이용하여 도달 모드 제어 입력을 구하였다. 그러나, 이러한 방법들은 시스템의 수학적 모델이 미지인 경우에 적절한 등가 입력을 얻을 수 없다는 단점이 있다. 한편, Wang[8], Yoo 등[9] 그리고 Chen[10]은 적응제어를 통해 퍼지규칙을 조정하는 방법과 미지 시스템의 퍼지 슬라이딩 모드 제어에 적응 알고리즘을 적용, 미지 시스템을 근사화하여 등가 제어 입력을 구하고 도달 모드 제어 입력에 퍼지 소속 함수를 적용하는 방법을 제시하였다. 그러나, 이

접수일자 : 2005년 4월 22일

완료일자 : 2005년 8월 17일

경우 도달 모드 제어 입력을 구하는 조건에 있어서 미지 시스템의 상한과 하한의 유계에 대한 조건이 필요하다는 가정이 필요하고 시스템의 차수가 고차인 경우에는 많은 제어규칙이 필요하다는 단점이 있다.

본 논문에서는 이러한 단점을 보완하기 위해 퍼지 슬라이딩 모드 제어에 적응 알고리즘을 적용, 미지의 시스템을 근사화하여 등가 제어 입력을 구하고 도달 모드 제어 입력에 스위칭 이득을 추정하는 적응 퍼지 슬라이딩 모드 제어를 제안한다. 슬라이딩 모드 제어 기법을 적용하여 모델링 오차에 대한 강인성을 개선하였고 Lyapunov 안정도 기법에 근거하여 퍼지 시스템의 결론부 파라미터의 적응 알고리즘과 근사화 오차를 추정하는 적응 알고리즘을 제안하여 제어기 내의 모든 신호가 유계가 되고 계통의 출력이 기준 출력을 정확히 추종하여 점근 안정함을 보였다.

## 2. 슬라이딩 모드 제어

다음과 같은 단일 입력 단일 출력(SISO) 비선형 시스템을 고려하자.

$$\dot{x}^{(n)} = f(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}) + g(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})u \quad (1)$$

여기서,  $f(\cdot)$ 와  $g(\cdot)$ 는 미지의 비선형 연속 함수이며  $u \in R$ ,  $y \in R$ 은 각각 계통의 입력과 출력이고,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T = (x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})^T \in R^n$ 는 측정 가능한 상태 벡터이고  $x^{(i)}$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ 은  $x$ 의  $i$ 번째 시간 도함수이다. 식(1)의 계통이 제어 가능하기 위하여  $U_c = R^n$ 인 가제어 공간 내의 모든  $\mathbf{x}$ 에 대하여  $g(\mathbf{x})$ 의 부호를 알고 있어야 한다. 즉,  $\mathbf{x} \in U_c$ 에 대해  $g(\mathbf{x}) > 0$ 로 가정한다.

슬라이딩 모드 제어 목적은 상태 벡터  $\mathbf{x}$ 가 원하는 상태 벡터  $\mathbf{x}_d$ 를 추종하는 것이다. 추종 오차를 다음과 같이 정의하자.

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_d = (e, \dot{e}, \dots, e^{(n-1)})^T \quad (2)$$

슬라이딩 모드 제어기는 다음과 같은 두 단계에 의해 설계된다.

1] 원하는 특성을 가지는 슬라이딩 평면 설계

$$S = \{ \mathbf{e} \in R^n | s(\mathbf{e}) = 0 \} \quad (3)$$

2] 시스템의 상태들을 슬라이딩 평면상에 머무르도록 하는 제어 입력 구성

$$u = \begin{cases} u^+ & \text{when } s > 0 \\ u^- & \text{when } s < 0 \end{cases} \quad (4)$$

가변 구조 제어 시스템의 동특성은 도달 모드와 슬라이딩 모드로 이루어지는데 원하는 슬라이딩 모드 동특성은 적절한 스위칭 함수를 설계함으로써 결정된다. 슬라이딩 모드 제어 설계 시 가장 중요한 부분이 도달 조건이 만족되는 제어 입력을 선정하는 것이다. 즉, 도달 모드 설계시 원하는 시스템 동특성 뿐만 아니라 슬라이딩 모드를 얻을 수 있는 제어 입력을 결정하여야 한다. 이러한 방법 중의 하나가 다음과 같은 도달 법칙을 사용하는 것이다.

$$\dot{s} = -K \text{sgn}(s), \quad K > 0 \quad (5)$$

식(5)의 도달 법칙을 만족하는 제어 입력은 다음과 같은 슬라이딩 모드 조건을 만족한다.

$$s \dot{s} = -K |s| < 0 \quad (6)$$

식(6)의 슬라이딩 모드 존재 조건을 만족하게 되면 스위칭 함수  $s$ 는 0이 되고 원하는 시스템의 동특성을 얻을 수 있다.

입출력 관계에 존재하는 불확실성과 추정 과정의 오차를 보상하는 슬라이딩 모드 형태의 제어 입력을 구성하기 위하여 다음과 같은 스위칭 평면을 정의하자.

$$s = e^{(n-1)} + k_{n-1}e^{(n-2)} + \dots + k_1e + k_0 \int edt = 0 \quad (7)$$

여기서, 스위칭 평면의 마지막 항에 적분항을 포함한 것은 계통 파라미터의 불확실성에 대하여 강인한 것으로 알려져 있기 때문이다[11]. 스위칭 평면의 계수는 다음의 다항식이 Hurwitz가 되도록 선정한다.

$$h(\lambda) = \lambda^n + k_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + k_1\lambda + k_0 = 0 \quad (8)$$

스위칭 평면의 도함수  $\dot{s}$ 를 구하기 위하여 식(7)을 미분하고 식(1)을 대입하면 다음과 같이 된다.

$$\dot{s} = \sum_{i=0}^{n-1} k_i e^{(i)} + f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u - x_d^{(n)} \quad (9)$$

식(5)의 도달법칙을 이용하여 비선형 계통의 출력 오차가 점근적으로 0으로 수렴하도록 하고 슬라이딩 모드를 발생하도록 제어 입력을 구성하면 다음과 같다.

$$u^* = g^{-1}(\mathbf{x}) \left\{ - \sum_{i=0}^{n-1} k_i e^{(i)} - f(\mathbf{x}) + x_d^{(n)} - K \text{sgn}(s) \right\} = u_{eq} + u_s \quad (10)$$

$$u_{eq} = g^{-1}(\mathbf{x}) \left\{ - \sum_{i=0}^{n-1} k_i e^{(i)} - f(\mathbf{x}) + x_d^{(n)} \right\} \quad (11)$$

$$u_s = -g^{-1}(\mathbf{x}) K \text{sgn}(s) \quad (12)$$

여기서,  $u_{eq}$ 는 등가 제어 입력이고,  $u_s$ 는 스위칭 제어 입력이며 스위칭 제어 이득  $K > 0$ 이다.

$f(\mathbf{x})$ 와  $g(\mathbf{x})$ 를 정확히 알고 있을 경우 식(10)의 슬라이딩 모드 제어 입력을 계통 식(1)에 대입하면 슬라이딩 모드 존재 조건을 만족하여 계통의 출력 오차가 점근적으로 0으로 수렴하게 된다. 그러나  $f(\mathbf{x})$ 와  $g(\mathbf{x})$ 를 정확하게 알지 못할 경우에는 추정된  $\hat{f}(\mathbf{x})$ 와  $\hat{g}(\mathbf{x})$ 로 대치하여야 한다.

추정한  $\hat{f}(\mathbf{x})$ 와  $\hat{g}(\mathbf{x})$ 를 이용하면 전체 제어 입력은 다음과 같이 바뀌게 된다.

$$u = \hat{u}_{eq} + \hat{u}_s \quad (13)$$

$$\hat{u}_{eq} = \hat{g}(\mathbf{x})^{-1} \left\{ - \sum_{i=0}^{n-1} k_i e^{(i)} - \hat{f}(\mathbf{x}) + x_d^{(n)} \right\} \quad (14)$$

$$\hat{u}_s = -\hat{g}(\mathbf{x})^{-1} \phi \text{sgn}(s) \quad (15)$$

여기서,  $\phi$ 는 스위칭 입력  $K$ 의 추정치이다.

### 3. 적응 퍼지 슬라이딩 모드 제어

Wang은 계통의 수학적 모델에 대한 정보를 충분히 알 수 없는 비선형 계통에 대해서 퍼지 모델링 기법을 이용하여 퍼지 전진부 구조를 식별하여 비선형 함수  $f(\mathbf{x})$ ,  $g(\mathbf{x})$ 를 추정하여 제한 입력력 선형화 제어 입력을 구하는 적응 퍼지 제어를 제안하였다[12]. 그러나, 이 경우 미지 시스템의 상한과 하한의 유계에 대한 조건이 필요하다는 가정이 필요하고 근사화 오차를 정확히 알 수 없어 계통의 출력 오차가 0으로 수렴하지 않는다는 단점을 가지고 있다.

본 논문에서는 이러한 단점을 보완하기 위해 퍼지 슬라이딩 모드 제어에 적응 알고리즘을 적용, 미지의 시스템을 근사화하여 등가 제어 입력을 구하고 도달 모드 제어 입력에 스위칭 이득을 추정하는 적응 퍼지 슬라이딩 모드 제어를 제안한다. 슬라이딩 모드 제어 기법을 적용하여 모델링 오차에 대한 강인성을 개선하였고 Lyapunov 안정도 기법에 근거하여 퍼지 시스템의 결론부 파라미터의 적응 알고리즘과 근사화 오차를 추정하는 적응 알고리즘을 제안하여 제어기 내의 모든 신호가 유계가 되고 계통의 출력이 기준 출력을 정확히 추종하여 점근 안정함을 보인다.

먼저 퍼지 모델의 형태는 If~ then~의 언어 규칙 형태로 가정하고 각 언어규칙의 후진부는 퍼지 기저 함수의 선형 결합으로 가정한다. 즉,  $f(\mathbf{x})$ ,  $g(\mathbf{x})$ 를  $j$ 번째 규칙이 다음과 같이 표현되는  $N$  개의 퍼지 규칙들에 의해 표현된다고 가정한다.

$$\begin{aligned} R_f^j: & \text{If } x_1 = F_1^j x_2 = F_2^j \dots x_n = F_n^j \\ & \text{then } \mathcal{F}(\mathbf{x}, \theta_f) = \theta_f^T \xi_f(\mathbf{x}) \\ R_g^j: & \text{If } x_1 = G_1^j x_2 = G_2^j \dots x_n = G_n^j \\ & \text{then } \mathcal{G}(\mathbf{x}, \theta_g) = \theta_g^T \xi_g(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (16)$$

여기서,  $\theta_f = [\theta_f^1, \theta_f^2, \dots, \theta_f^N]^T$ 와  $\theta_g = [\theta_g^1, \theta_g^2, \dots, \theta_g^N]^T$ 는 각각  $f$ ,  $g$ 의 파라미터 벡터이고  $F_i^j$ 와  $G_i^j$ 는  $j$ 번째 퍼지 규칙에서 퍼지 변수  $x_i$ 의 언어 값이다.

$$\begin{aligned} \xi_f(\mathbf{x}) &= [\xi_f^1(\mathbf{x}), \xi_f^2(\mathbf{x}), \dots, \xi_f^N(\mathbf{x})]^T \\ \xi_g(\mathbf{x}) &= [\xi_g^1(\mathbf{x}), \xi_g^2(\mathbf{x}), \dots, \xi_g^N(\mathbf{x})]^T \end{aligned} \quad (17)$$

$\xi_f$ 와  $\xi_g$ 는 퍼지 기저 함수 벡터로서 각 요소에 대한 정의는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \xi_f^j(\mathbf{x}) &= \frac{\prod_{i=1}^n \mu_{F_i^j}(x_i)}{\sum_{j=1}^N \prod_{i=1}^n \mu_{F_i^j}(x_i)} \\ \xi_g^j(\mathbf{x}) &= \frac{\prod_{i=1}^n \mu_{G_i^j}(x_i)}{\sum_{j=1}^N \prod_{i=1}^n \mu_{G_i^j}(x_i)} \end{aligned} \quad (18)$$

Crisp 퍼지화기, max-product, 추론, 무게중심 비퍼지화기를 이용하면 (16)의 퍼지 규칙들의 집합으로부터 비선형 함수의 추정치  $\mathcal{F}(\mathbf{x}, \theta_f)$ ,  $\mathcal{G}(\mathbf{x}, \theta_g)$ 는 다음과 같다.

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}, \theta_f) = \frac{\sum_{j=1}^N \theta_f^j \mu_{R_f^j}(\mathbf{x})}{\sum_{j=1}^N \mu_{R_f^j}(\mathbf{x})} = \theta_f^T \xi_f(\mathbf{x}) \quad (19)$$

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}, \theta_g) = \frac{\sum_{j=1}^N \theta_g^j \mu_{R_g^j}(\mathbf{x})}{\sum_{j=1}^N \mu_{R_g^j}(\mathbf{x})} = \theta_g^T \xi_g(\mathbf{x}) \quad (20)$$

비선형 함수  $f(\mathbf{x})$ ,  $g(\mathbf{x})$ 가 퍼지 시스템에 의해 잘 추정된다고 가정할 경우 제어기와 적응 법칙은 다음과 같은 제어 목적을 달성하도록 구성한다.

- 1) 페루프 계통이 모든 변수를  $\mathbf{x}$ ,  $\theta$ ,  $u = u(\mathbf{x}, \theta)$ 가 균등 유계되도록 하는 의미에서 전역 안정(globally stable)해야 한다. 즉,  $t \geq 0$ 인 모든  $t$ 에 대해  $\|\mathbf{x}(t)\| \leq M_x < \infty$ ,  $\|\theta(t)\| \leq M_\theta < \infty$ ,  $\|\phi(t)\| \leq M_\phi < \infty$ ,  $\|u(\mathbf{x}, \theta)\| \leq M_u < \infty$ 이 만족되도록 한다. 여기서,  $M_x$ ,  $M_\theta$ ,  $M_u$ 는 설계자에 의하여 결정되는 설계인자이다.
- 2) 위의 1)조건하에 추적오차  $e = y - y_d$ 가 0으로 수렴하도록 한다.

퍼지 시스템  $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ ,  $\mathcal{G}(\mathbf{x})$ 의 파라미터 벡터  $\theta_f$ ,  $\theta_g$ 에 대한 적응 규칙을 구하기 위하여 다음과 같은 최소 근사 오차  $w$ (minimum approximation error)를 정의하자.

$$w(\mathbf{x}, u) = f(\mathbf{x}) - \mathcal{F}(\mathbf{x}, \theta_f^*) + (g(\mathbf{x}) - \mathcal{G}(\mathbf{x}, \theta_g^*))u \quad (21)$$

여기서  $\mathcal{F}(\mathbf{x}, \theta_f^*) = \theta_f^{*T} \xi_f(\mathbf{x})$ ,  $\mathcal{G}(\mathbf{x}, \theta_g^*) = \theta_g^{*T} \xi_g(\mathbf{x})$ 이다.  $\theta_f^*$ ,  $\theta_g^*$ 는 각각 다음 식을 만족하는 미지의 상수로 정의된다.

$$\begin{aligned} \theta_f^* &= \arg \min_{\theta_f} \left[ \sup_{\mathbf{x} \in \Omega_x, u \in \Omega_u} |f(\mathbf{x}) - \mathcal{F}(\mathbf{x}, \theta_f)| \right] \\ \theta_g^* &= \arg \min_{\theta_g} \left[ \sup_{\mathbf{x} \in \Omega_x, u \in \Omega_u} |g(\mathbf{x}) - \mathcal{G}(\mathbf{x}, \theta_g)| \right] \end{aligned} \quad (22)$$

퍼지 시스템에 대한 범용 근사화기 이론에 의하면 모든  $\mathbf{x} \in \Omega_x, u \in \Omega_u$ 에 대해 다음을 만족하는 미지의 상수  $\phi^*$ 가 존재한다[13].

$$|w(\mathbf{x}, u)| \leq \phi^* \quad (23)$$

$\Omega_f, \Omega_g$ 는 상수  $M_f, M_g$ 에 대하여 설계자에 의하여 다음 식과 같이 정해지는 파라미터 집합이다.

$$\Omega_f = \{\theta_f \mid \|\theta_f\| \leq M_f\}, \Omega_g = \{\theta_g \mid \|\theta_g\| \leq M_g\} \quad (24)$$

스위칭 함수의 도함수를 구하기 위하여 식(14)를 식(9)에 대입하면  $\dot{s}$ 는 다음과 같다.

$$\dot{s} = f(\mathbf{x}) - \mathcal{F}(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u - \mathcal{G}(\mathbf{x})\hat{u}_{eq} \quad (25)$$

식(21)의 최소 근사 오차를 이용하면 다음과 같이 다시 정리된다.

$$\dot{s} = f(\mathbf{x}, \theta_f^*) - \mathcal{F}(\mathbf{x}, \theta_f) + (g(\mathbf{x}, \theta_g^*) - \mathcal{G}(\mathbf{x}, \theta_g))\hat{u}_{eq} + \mathcal{G}(\mathbf{x})\hat{u}_s + w \quad (26)$$

$\mathcal{F}(\mathbf{x}, \theta_f)$ 와  $\mathcal{G}(\mathbf{x}, \theta_g)$ 는 식(19), 식(20)으로 주어지는 퍼지 시스템의 출력이므로 식(26)은 다음의 식으로 표현된다.

$$\dot{s} = \mathcal{V}_f^T \xi_f(\mathbf{x}) + \mathcal{V}_g^T \xi_g(\mathbf{x})\hat{u} + \mathcal{G}(\mathbf{x})\hat{u}_s + w \quad (27)$$

여기서,  $\mathcal{V}_f = \theta_f^* - \theta_f$ ,  $\mathcal{V}_g = \theta_g^* - \theta_g$  결론부 파라미터의 오차 벡터이고  $\xi_f(\mathbf{x})$ ,  $\xi_g(\mathbf{x})$ 는 각각 퍼지 기저 함수 벡터이다.

퍼지 시스템의 결론부 파라미터의 적응 알고리즘과 근사화 오차의 유계를 추정하기 위하여 다음과 같은 Lyapunov 함수를 정의하자.

$$V = \frac{1}{2} \left\{ s^2 + \frac{1}{\gamma_f} \theta_f^T \theta_f + \frac{1}{\gamma_g} \theta_g^T \theta_g + \frac{1}{\gamma_\phi} \bar{\phi}^2 \right\} \quad (28)$$

여기서,  $\bar{\phi} = \phi^* - \phi$ 로 나타나는 근사화 오차 추정 오차이다.

점근적으로 안정한 조건을 구하기 위하여 식(28)을 시간에 대하여 미분하고 식(27)을 대입하면 Lyapunov 함수의 시간 도함수를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s\dot{s} - \frac{1}{\gamma_f} \theta_f^T \dot{\theta}_f - \frac{1}{\gamma_g} \theta_g^T \dot{\theta}_g - \frac{1}{\gamma_\phi} \bar{\phi} \dot{\phi} \\ &= s \{ \theta_f^T \xi_f(\mathbf{x}) + \theta_g^T \xi_g(\mathbf{x})u + \widehat{g}(\mathbf{x})u_s + w \} \\ &\quad - \frac{1}{\gamma_f} \theta_f^T \dot{\theta}_f - \frac{1}{\gamma_g} \theta_g^T \dot{\theta}_g - \frac{1}{\gamma_\phi} \bar{\phi} \dot{\phi} \\ &= s \{ \widehat{g}(\mathbf{x})u_s + w \} + \frac{1}{\gamma_f} \theta_f^T [ -\dot{\theta}_f + \gamma_f s \xi_f(\mathbf{x}) ] \\ &\quad + \frac{1}{\gamma_g} \theta_g^T [ -\dot{\theta}_g + \gamma_g s \xi_g(\mathbf{x}) ] - \frac{1}{\gamma_\phi} \bar{\phi} \dot{\phi} \end{aligned} \quad (29)$$

여기서,  $\theta_f^*$ ,  $\theta_g^*$ 는 미지의 상수이므로 다음과 같은 퍼지 시스템의 결론부 파라미터의 적응법칙을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_f &= \gamma_f s \xi_f(\mathbf{x}) \\ \dot{\theta}_g &= \gamma_g s \xi_g(\mathbf{x})u \end{aligned} \quad (30)$$

식(30)을 식(29)에 대입하면 Lyapunov 함수의 시간 도함수는 다음과 같이 정리된다.

$$\dot{V} = s \widehat{g}(\mathbf{x})u_s + sw - \frac{1}{\gamma_\phi} \bar{\phi} \dot{\phi} \quad (31)$$

다시 식(15)를 대입하면 다음과 같다.

$$\dot{V} = -|s| \phi + sw - \frac{1}{\gamma_\phi} \bar{\phi} \dot{\phi} \quad (32)$$

근사화 오차의 추정 알고리즘을 다음과 같이 선정하면

$$\dot{\phi} = \gamma_\phi |s| \quad (33)$$

Lyapunov 함수의 시간 도함수는 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -|s| \phi + sw - (\phi^* - \phi)|s| \\ &= sw - \phi^* |s| \leq |s| |w| - \phi^* |s| \\ &= -(\phi^* - |w|) |s| \leq 0 \end{aligned} \quad (34)$$

$V \leq 0$ 가 만족되면  $V(t) \leq V(0)$ 가 되어 제어기 내의 모든 신호  $s$ ,  $\theta_f$ ,  $\theta_g$ ,  $\phi$ 가 유계임을 알 수 있다.

식(34)로부터  $W \equiv (\phi^* - |w|) |s| \leq -V(s, \bar{\phi})$ 를 정의하고 시간에 대해서 미분하면 다음과 같다.

$$\int_0^t W(\tau) d\tau \leq V(s(0), \bar{\phi}(0)) - V(s(t), \bar{\phi}(t)) \quad (35)$$

$V(s(0), \bar{\phi}(0))$ 가 유계이고  $V(s(t), \bar{\phi}(t))$ 가 단조감소 함수이고 유계이므로 다음의 결과를 얻을 수 있다.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t W(\tau) d\tau < 0 \quad (36)$$

또한,  $W$ 가 유계이므로 Barbalat의 정리[11]에 의해

$\lim_{t \rightarrow \infty} W = 0$ 이다. 따라서,  $t \rightarrow \infty$ 일 때  $s \rightarrow 0$ 가 되어 제안한 제어기는 점근 안정(asymptotically stable)하다.

### 4. 컴퓨터 모의 실험

제안한 적응 퍼지 슬라이딩 모드 제어기의 유용성을 입증하기 위하여 다음과 같은 도립진자 계통을 고려해 보자.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{gsx_1 - \frac{mlx_2^2 cx_1 sx_1}{m_c + m}}{l \left( \frac{4}{3} - \frac{m \cos^2 x_1}{m_c + m} \right)} + \frac{cx_1}{m_c + m} u \end{aligned} \quad (37)$$

여기서, 상태  $x_1$ 과  $x_2$ 는 그림 1과 같이  $x_1 = \theta$ ,  $x_2 = \dot{\theta}$ 를 나타낸다. 또한 도립진자의 각 파라미터는 표 1과 같다.

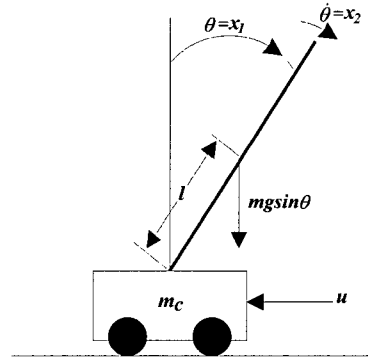


그림 1. 도립진자 계통  
Fig. 1. The inverted pendulum system

표 1. 도립진자 계통의 매개변수들  
Table 1. Parameters of inverted pendulum system

	Symbol	Value
Acceleration of gravity	$g$	9.8 m/s <sup>2</sup>
Mass of cart	$m_c$	1 Kg
Mass of pole	$m$	0.1 Kg
Length of pole	$l$	0.5 m

컴퓨터 모의실험에 사용한 퍼지 기저 함수는 다음과 같은 Gaussian 소속 함수를 사용하였고 그림 2에 나타내었다.

$$\begin{aligned} \mu_{F_1^1} &= \exp \left[ - \left( \frac{x_i + \pi/6}{\pi/24} \right)^2 \right] \\ \mu_{F_1^2} &= \exp \left[ - \left( \frac{x_i + \pi/12}{\pi/24} \right)^2 \right] \\ \mu_{F_1^3} &= \exp \left[ - \left( \frac{x_i}{\pi/24} \right)^2 \right] \\ \mu_{F_1^4} &= \exp \left[ - \left( \frac{x_i - \pi/12}{\pi/24} \right)^2 \right] \\ \mu_{F_1^5} &= \exp \left[ - \left( \frac{x_i - \pi/6}{\pi/24} \right)^2 \right] \quad i=1, 2 \end{aligned} \quad (38)$$

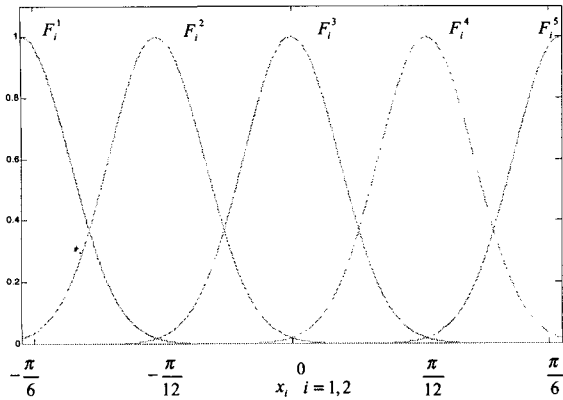


그림 2. 퍼지 기저 함수  
Fig. 2. Fuzzy basis function

제어 목적은 기준 신호  $y_d = \frac{\pi}{30} \sin(t)$ 를 추종하는 것으로 하고 초기치는  $x(0) = [0.2, 0]^T$ , 샘플링 시간은 0.001sec로  $\gamma_f = \gamma_g = \gamma_\phi = 1$ 로 스위칭 평면은  $s = \dot{e} + 2e + \int e dt$ 로 선정하여 컴퓨터 모의실험을 수행하였다.

그림 4에 제안한 제어기의 응답을 나타내었고 그림 5에는 제어 입력을 표시하였다.

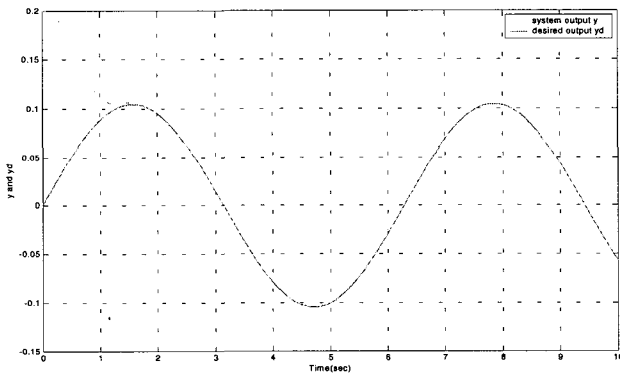


그림 4. 제안한 제어기의 응답  
Fig. 4. Response of the proposed controller

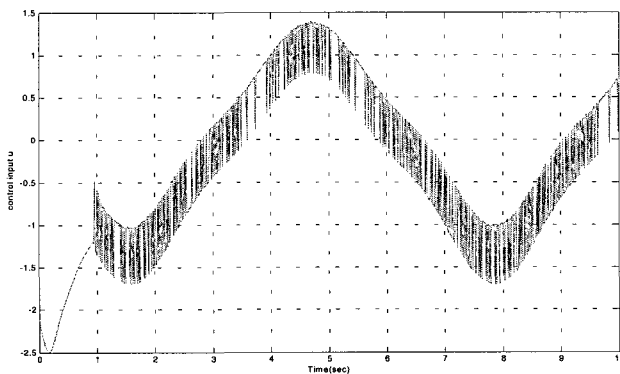


그림 5. 제어 입력  
Fig. 5. Control input

그림 6에는 퍼지 시스템의 결론부 파라미터 벡터  $\theta_f$ 와  $\theta_g$ 의 노름(norm) 궤적을 나타내었고 그림 7에는 근사화 오

차 유계 추정치  $\phi$ 를 나타내었다.

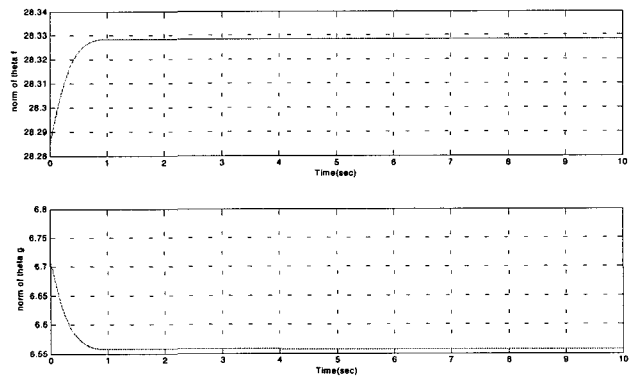


그림 6.  $\theta_f$ 와  $\theta_g$ 의 노름(norm) 궤적  
Fig. 6. Norm trajectory  $\theta_f$ 와  $\theta_g$

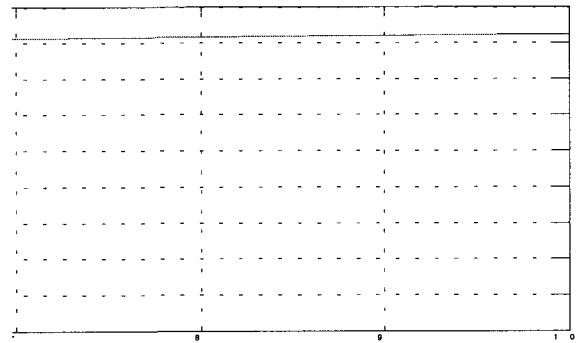


그림 7. 근사화 오차 유계 추정치  $\phi$   
Fig. 7. Estimation bounds of approximation error  $\phi$

컴퓨터 모의실험 결과 제안한 적응 퍼지 제어기는 제어기 내의 모든 신호가 유계되고 출력 오차가 점근 안정함을 알 수 있었다.

## 5. 결론

본 논문에서는 근사화 오차 유계 추정을 이용한 비선형 시스템의 적응 퍼지 슬라이딩 모드 제어기를 제안하였다. 근사화 오차에 의해 발생하는 불확실성의 보상을 위하여 슬라이딩 모드 존재 조건으로부터 구해진 스위칭 입력을 도입함으로써 계통에 대한 약간의 정보만 주어진다면 퍼지 기법에 의하여 파라미터를 추정할 수 있어 정확한 수학적 모델이 필요하지 않고 슬라이딩 모드에서 파라미터 변화, 모델의 불확정성 및 외란에 대해 강인하다는 가변 구조 제어계의 특성을 가지고 있다.

또한, Lyapunov 안정도 기법에 근거하여 퍼지 시스템의 결론부 파라미터의 적응 알고리즘과 근사화 오차를 추정하는 적응 알고리즘을 제안하여 제어기 내의 모든 신호가 유계가 되고 계통의 출력이 기준 출력을 정확히 추종하여 점근 안정함을 보였다.

### 참 고 문 헌

- [1] C. C. Lee, "Fuzzy logic control systems : Fuzzy logic controller-part I, II," *IEEE Trans. Systems, man and cybernetics*, Vol. 20, No. 2, pp. 419-428, 1990.
- [2] H. J. Zimmermann, *Fuzzy set theory and its application*, 2nd ed., Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [3] DeCarlo, R. A. et al., "Variable structure control of nonlinear multivariable systems : a tutorial," *Proceedings of the IEEE*, vol. 76, no. 3, pp. 212-232, 1988.
- [4] J. Y. Hung, W. Gao, and J. C. Hung, "Variable structure control: a survey," *IEEE Trans. Industrial Electronics*, vol. 40, no. 1, pp. 2-17, 1993.
- [5] R. Palm, "Robust control by fuzzy sliding mode," *Automatica*, vol. 30, no. 9, pp. 1429-1437, 1994.
- [6] G. C. Hwang and S. C. Lin, "A stability approach to fuzzy control design for nonlinear systems," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 48, pp. 279-287, 1992.
- [7] S. W. Kim and J. J. Lee, "Design of a fuzzy controller with fuzzy sliding surface," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 71, pp. 359-367, 1995.
- [8] L. X. Wang, "Stable adaptive fuzzy control of nonlinear systems," *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, Vol. 1, pp. 146-155, 1993.
- [9] B. Yoo and W. Ham, "Adaptive fuzzy sliding mode control of nonlinear system," *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, Vol. 6, No. 2, pp. 146-155, 1998.
- [10] J. Y. C., "Fuzzy sliding mode controller design: in direct adaptive approach," *Cybernetics and Systems : An International Journal*, No. 30, pp. 9-27, 1999.
- [11] J. J. E. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Prentice-Hall, 1991.
- [12] L. X. Wang, *Adaptive Fuzzy Systems and Control-Design and Stability Analysis*, Prentice-Hall, 1994.
- [13] L.X. Wang, "Stable adaptive fuzzy control of nonlinear system," *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, vol. 6, no. 2, pp. 146-155, 1993.

### 저 자 소 개



서삼준(Sam-Jun Seo)

1997년~현재 안양대학교 전기전자공학과 부교수

관심분야 : 퍼지이론, 신경망 이론, 유전자 알고리즘, 퍼지 슬라이딩 모드 제어, 지능 로봇, 원격 조종 시스템, 자동화 시스템

Phone : 031-467-0874  
Fax : 031-467-0800  
E-mail : ssj@anyang.ac.kr