퍼지 및 지능시스템학회 논문지 2005, Vol. 15, No. 5, pp. 521-526

거리 측도를 이용한 퍼지 엔트로피와 유사측도의 구성

Construction of Fuzzy Entropy and Similarity Measure with Distance Measure

이상혁 · 김성신

Sang-Hyuk, LeeSungshin Kim

부산대학교 전기공학과

요 약

모호함의 측도를 위하여 퍼지 엔트로피와 거리측도 그리고 유사측도와의 관계를 이용하여 새로운 퍼지 측도를 제안하였다. 제안된 퍼지 엔트로피는 거리측도를 이용하여 구성된다. 거리측도는 일반적으로 사용되는 해밍 거리를 이용하였다. 또한 집합사이의 유사성을 측정하기 위한 유사측도를 거리 측도를 이용하여 구성하였고, 제안한 퍼지 엔트로피와 유사측도를 증명을 통하여 타당성을 확인하였다.

Abstract

The fuzzy entropy is proposed for measuring of uncertainty with the help of relation between distance measure and similarity measure. The proposed fuzzy entropy is constructed through a distance measure. In this study, Hamming distance measure is employed for a distance measure. Also a similarity measure is constructed through a distance measure for the measure of similarity between fuzzy sets or crisp sets and the proposed fuzzy entropies and similarity measures are proved.

Key Words : 퍼지 엔트로피, 거리측도, 유사측도

1. 서 론

모호함의 측정 및 계량화는 시스템의 모델링이나 모호함의 처리에 있어서 흥미로운 연구 분야 이다. 기존의 연구결과에서 퍼지 집합에 대한 엔트로피는 퍼지 집합의 모호함의 측도로 알려져 왔다[1-7]. Liu는 엔트로피와 거리측도 그리고 유사측도에 대한 공리적인 정의를 내리고 이들 세 가지의 개념들에 대하여 정리하였다. Kosko는 거리 측도로부터 퍼지 엔트로피가 유도됨을 제안 하였고 Bhandari와 Pal은 퍼지 집합과 다른 퍼지 집합과의 구분을 위한 퍼지 측도를 제공하였다. Pal과 Pal은 고전적인 Shannon 정보 엔트로피에 대하여 해석적인 결과를 제공하였다. 또한 Ghosh는 제공된 기존의 퍼지 엔트로피를 이용하여 신경망 시스템에 적용하였다.

또한 퍼지 집합 또는 일반집합 사이의 유사성을 나타내는 유사측도를 제안한다. 유사측도는 데이터간의 패턴분류를 위한 기본적인 지식을 제공하므로 데이터 클러스터링 등의 분야에 유용하게 활용될 수 있다. 우리는 본 논문에서 거리측도를 이용하여 퍼지 엔트로피를 제안한다. 제안된 퍼지 엔트로피는 기존의 결과보다 단순한 형태를 유지하고 있다. 또한 얻은 결과를 이용하여 유사한 결과를 추가로 얻었다. 제안한 퍼지 엔트로피가 퍼지 엔트로피의 정의를 만족함을 보임으로서 당위성을 확인한다. 유사측도 또한 거리측도와 퍼지 엔트로피의 결과를 이용하여 구성하였다. 제안된 유사측도의 타당성 또한 유사측도의 정의를 증명함으로서 확인하였다.

다음 장에서 우리는 퍼지 엔트로피와 거리측도 그리고 유사측도에 대한 소개를 한 후 서로의 관계와 특징에 대하여 설명한다. 3장에서는 해밍 거리 측도에 기반한 퍼지 엔트로피를 제안하고 당위성을 증명한다. 그리고 얻은 결과로부터 유사한 형태의 퍼지 엔트로피를 추가로 얻었다. 그리고 퍼지 엔트로피와 거리측도를 이용하여 유사측도를 제안하였다. 또한 증명을 통하여 타당성을 확인한다. 그리고 마지막으로 5장에서 결론을 맺는다.

용어: 본 논문에서 사용하는 용어는 다음과 같이 정의한다. $R^+=[0,\infty)$이고, $F(X)$ 와 $P(X)$는 전체집합 X에서의 각각 퍼지 집합과 일반집합이다. $\mu_A(x)$는 집합 $A\in F(X)$에서의 소속 함수이고, 퍼지 집합 A에 대하여 A^C는 보수를 나타내며 $\mu_{A^C}(x)=1-\mu_A(x)$, $\forall x\in X$ 의 관계를 갖는다. 퍼지 집합 A와 B에 대하여, $A\bigcup B$는 A와 B의 합 일 때, $\mu_{A\bigcup B}(x)=\max(\mu_A(x),\mu_B(x))$로 나타내고, $A\bigcap B$는 집합 A와 B의 교집합이며 $\mu_{A\bigcap B}(x)=\min(\mu_A(x),\mu_B(x))$ 의 관계를 갖는다. 퍼지 집합 A^*는 퍼지 집합 A의 뾰족함으로 부르며, $\mu_A(x)\geq 1/2$ 일 때 $\mu_{A^*}(x)\geq\mu_A(x)$를 만족하며, $\mu_A(x)<1/2$ 일 때 $\mu_{A^*}(x)\leq\mu_A(x)$를 만족한다. 퍼지 집합 A의 일반 집합 A_{near}와 A_{far}의 소속 함수는 다음과 같이

접수일자 : 2005년 6월 7일
완료일자 : 2005년 8월 23일
본논문은 부산대학교 컴퓨터및 정보통신연구소 지원으로 이루어졌읍니다.

정의한다.

$$\mu_{A_{near}}(x)=\begin{cases}1 & \mu_A(x)\geq\frac{1}{2}\\ 0 & \mu_A(x)<\frac{1}{2}\end{cases},\quad \mu_{A_{far}}(x)=\begin{cases}0 & \mu_A(x)\geq\frac{1}{2}\\ 1 & \mu_A(x)<\frac{1}{2}\end{cases}.$$

2. 퍼지 엔트로피

본 절에서 우리는 기존에 소개된 퍼지 엔트로피와 거리측도 그리고 유사 측도에 대한 정의를 소개하고 각각의 특징과 관계에 대하여 확인한다. Liu는 공리적인 정의를 소개 하였다[4]. 이 정의를 통하여 제안한 퍼지 엔트로피의 당위성을 증명한다.

정의 2.1 (Liu, 1992) 실함수 $e: F(X)\rightarrow R^+$ 또는 $e: P(X)\rightarrow R^+$ 가 다음의 특성을 만족하면 퍼지 집합 $F(X)$, 또는 일반집합 $P(X)$에 대하여 퍼지 엔트로피이다.

(E1) $e(D)=0,\ \forall D\in P(X)$

(E2) $e([1/2])=\max_{A\in F(X)}e(A)$

(E3) $e(A^*)\leq e(A)$, 이때 A^*는 집합 A의 뾰족함이다

(E4) $e(A)=e(A^c),\ \forall A\in F(X)$.

여기서 $[\frac{1}{2}]$는 소속 함수 값이 전부 1/2인 퍼지 집합이다.

예를 들어 $S(x)$이 $S(x)=-x\ln x-(1-x)\ln(1-x)$, $0\leq x\leq 1$를 만족할 때 퍼지 집합 A에 대하여 만족하는 하나의 엔트로피는 다음과 같이 정의할 수 있다

$$e(A)=-\sum_{i=1}^{n}(S(\mu_A(x_i)),\ \forall A\in F(X), \tag{1}$$

여기서 $X=x_1, x_2, \cdots x_n$이다. 정의된 식 (1)는 엔트로피 특성 (E1) - (E4)를 만족함을 쉽게 보일 수 있다.

정의 2.2 (Liu, 1992) 실함수 $d: F^2\rightarrow R^+$는 퍼지 집합 $F(X)$, 또는 일반집합 $P(X)$에 대하여 다음의 특성을 만족하면 거리측도 이다.

(D1) $d(A,B)=d(B,A),\ \forall A,B\in F(X)$

(D2) $d(A,A)=0,\ \forall A\in F(X)$

(D3) $d(D,D^c)=\max_{A,B\in F} d(A,B),\ \forall D\in P(X)$

(D4) $\forall A,B,C\in F(X),\ A\subset B\subset C$를 만족하면, $d(A,B)\leq d(A,C)$이고 $d(B,C)\leq d(A,C)$ 이다.

거리측도는 다양한 형태로 구성 될 수 있으며, 일반적으로 다음과 같이 퍼지 집합 A와 B에 대하여 다음과 같은 형태를 갖는다.

$$d(A,B)=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i)|^p\right)^{1/p} \tag{2}$$

여기서 $p\geq 1$를 만족하는 실수 이다.

우리는 여기서 표준 거리측도는 거리측도의 최대값의 역수 $1/\max_{C,D\in F}d(A,C)$를 곱함으로서 얻는다.

정의 2.3 (Liu, 1992) 실함수 $s: F^2\rightarrow R^+$ 또는 $P^2\rightarrow R^+$는 다음 특성을 만족할 경우 유사 측도이다

(S1) $s(A,B)=s(B,A),\ \forall A,B\in F(X)$

(S2) $s(A,A^c)=0\ \ \forall A\in F(X)$

(S3) $s(D,D)=\max_{A,B\in F}s(A,B),\ \forall A,B\in F(X)$

(S4) $\forall A,B,C\in F(X),\ A\subset B\subset C$ 이면, $s(A,B)\geq s(A,C)$ 이고 $s(B,C)\geq s(A,C)$ 이다.

Liu는 또한 이렇게 세 가지의 공리적인 정의를 소개하면서 거리측도와 유사측도사이에는 일 대 일 대응이 존재함을 소개하고, $d+s=1$의 특성을 가짐을 나타내었다. 유사측도의 표준 값도 역시 $\max_{C,D\in F}s(C,D)$를 나눔으로서 얻어진다.

그리고 유용한 경우로서, 전체집합 X를 고려하는 집합 D와 여집합 D^C으로 구분하여 퍼지 집합 A를 $A\cap D$의 모호함과 $A\cap D^C$의 모호함의 합으로 표현할 수 있고, 다음과 같은 정리로 나타냈다.

정의 2.4 (Fan and Xie, 1999) e를 퍼지 집합 $F(X)$에 대한 엔트로피라고 하면 어떤 퍼지 집합 $A\in F(X)$에 대하여,

$$e(A)=e(A\cap D)+e(A\cap D^c)$$

를 만족하면 퍼지 집합 $F(X)$에 대하여 σ-엔트로피이다.

정의 2.5 (Fan and Xie, 1999) d를 퍼지 집합 $F(X)$ 에 대한 거리 측도라고 하면 어떠한 퍼지 집합 $A,B\in F(X)$, 와 일반 집합 $D\in P(X)$에 대하여,

$$d(A,B)=d(A\cap D,B\cap D)+d(A\cap D^c,B\cap D^c)$$

는 σ-거리 측도이다.

정의 2.6 (Fan and Xie) s를 퍼지 집합 $F(X)$에 대한 유사측도 라고 하면 퍼지 집합 $A,B\in F(X)$,와 일반집합 $D\in P(X)$에 대하여,

$$s(A,B)=s(A\cap D,B\cup D^c)+s(A\cap D^c,B\cup D)$$

를 만족하면 σ-유사측도 이다.

Fan과 Xie는 정의된 엔트로피를 통하여 새로운 엔트로피를 새롭게 정의 하였다. 그 결과는 $e'=e/(2-e)$와 같고 여기서 e는 퍼지 집합 $F(X)$에 대하여 정의된 엔트로피이다. 여기서 우리는 Fan과 Xie의 결과와 유사한 형태의 결과를 다음의 정리에서 유도할 수 있다.

정리 2.1 e가 퍼지 집합 $F(X)$에 대한 엔트로피 이면, $\tilde{e}=e^k$또한 퍼지 집합 $F(X)$에 대한 엔트로피가 된다. 여기서 $k>1$를 만족하는 실수 이다.

증명. 퍼지 집합 $A\in F(X)$에 대하여 $0\leq\tilde{e}(A)\leq 1$를 만족하는 것은 자명하다. 그리고 새로운 엔트로피 $\tilde{e}$가 정의 2.1을 만족하는 것을 다음의 과정에서 확인 할 수 있다.

(E1) $\forall D\in P(X)$에 대하여 e가 영 이므로 $\tilde{e}$ 가 영 이 되는 것은 자명하다.

(E2) e의 최대값에 대하여 $\tilde{e}([\frac{1}{2}])=\max_{A\in F(X)}\tilde{e}(A)$를 만족한다.

(E3) 또한 뾰족함의 부등식 $e(A^*)\leq e(A)$를 만족하면

$\tilde{e}(A^*) \le \tilde{e}(A)$ 는 자명하다.

(E4) 마지막으로 $e(A) \le e(A^C)$이면 $\tilde{e}(A) \le \tilde{e}(A^C)$를 만족한다.

따라서 정리 2.1에서 우리는 주어진 엔트로피로부터 다른 엔트로피를 유도할 수 있음을 확인할 수 있다.

3. 퍼지 엔트로피와 유사측도의 구성

이제 우리는 거리측도를 통하여 퍼지 엔트로피를 유도 한다. 거리측도의 정의는 정의 2.2에 제시되어있다. 거리측도 중에서 일반적으로 해밍 거리가 많이 사용되며, 해밍 거리는 퍼지 집합 A와 B에 대하여 다음을 만족한다.

$$d_H(A, B) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|$$

여기서 $X = x_1, x_2, \cdots x_n$이고 $|k|$는 k의 절대값을 나타낸다. 다음의 보조정리에서 우리는 해밍 거리를 포함한 일반적인 거리 측도를 이용하여 퍼지 집합과 일반집합 사이의 관계식을 알 수 있다.

3.1 거리 측도를 이용한 퍼지 엔트로피

보조정리 3.1 (Fan and Xie, 1999). d를 퍼지 집합 $F(X)$에 대한 σ-거리 측도라고하면

(i) $d(A, A_{near}) \ge d(A^*, A_{near})$

(ii) $d(A, A_{far}) \le d(A^*, A_{far})$

를 만족한다.

Fan, Ma 그리고 Xie 는 다음의 정리에서 거리측도를 이용한 퍼지 엔트로피를 제안 하였다 [7].

정리 3.1 (Fan, Ma, and Xie, 2001) d가 퍼지 집합 $F(X)$에 대하여 σ-거리 측도이고 거리측도 d가 다음을 만족 할 경우

(i) $d(\frac{1}{2}D, [0]) = d(\frac{1}{2}D, D), \forall D \in P(X)$,

(ii) $d(A^C, B^C) = d(A, B), A, B \in F(X)$,

$$e(A) = d(A, A_{near}) + 1 - d(A, A_{far}) \tag{3}$$

는 퍼지 엔트로피이다.

이제 제안된 퍼지 엔트로피에 대한 식 (3) 대하여 해석해보자. (3) 식의 도식적인 표현은 그림 1에서 나타냈다. 그림에서 짙게 나타난 부분은 퍼지 집합의 소속 함수와 일반집합의 차이를 나타내고 있다. 퍼지 집합의 소속 함수가 좀더 뾰족해져서 일반 집합의 형태를 취할 경우 짙은 부분은 사라지게 된다. 즉 모호함이 없어지는 순간이다. 따라서 짙게 나타난 면적은 일반집합에 비교하여 퍼지 집합이 가지는 모호함이라고 할 수 있다. 이 모호함을 함수로 표현 한 것이 퍼지 엔트로피가 된다. 우리가 퍼지 엔트로피를 모호함의 측도로 활용하는데 부합된 결과를 제공한다 할 수 있다.

Fan 등의 결과를 이용하여 우리는 새롭게 퍼지 엔트로피를 제안 하였다. 어떤 결과이든 제안된 엔트로피는 그림 1의 짙은 부분을 묘사할 것이다. 식 (3)의 결과에서는 퍼지 집합 A의 근사 값으로 표현되는 일반집합 A_{near}와 A_{far}를 동시에 이용하여 구성 하였다. 이러한 문제를 회피하기 위하여 우리는 다음과 같은 형태로 새롭게 퍼지 엔트로피를 제안하였다. 다음의 정리에서 우리는 일반집합 A_{near}의 정보만을 이용하여 퍼지 엔트로피를 구성한다.

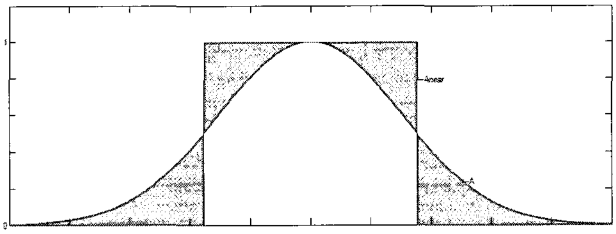

Fig 1. representation of entropy

정리 3.2 d가 퍼지 집합 $F(X)$에 대하여 σ-거리측도 일 때 d가

$$d(A^C, B^C) = d(A, B), A, B \in F(X),$$

을 만족하면

$$e(A) = 2d((A \cap A_{near}), [1]) + 2d((A \cup A_{near}), [0]) - 2 \tag{4}$$

는 퍼지 엔트로피이다.

증명. 제안한 엔트로피 (4)는 정의 2.1을 만족함으로서 퍼지 엔트로피가 됨을 확인 할 수 있다. 따라서 (E1)부터 (E4) 까지 증명을 통하여 확인한다.

(E1)에서 모든 일반집합에 대하여 소속 함수 값은 1 또는 0이므로, $\forall D \in P(X), D_{near} = D$ 이다. 따라서

$$\begin{aligned} e(D) &= 2d((D \cap D_{near}), [1]) + 2d((D \cup D_{near}), [0]) - 2 \\ &= 2d(D, [1]) + 2d(D, [0]) - 2 = 0 \end{aligned}$$

를 확인할 수 있다.

(E2) 에서는 소속 함수 값이 1/2를 취할 때 퍼지 엔트로피가 최대값을 가짐을 보인다. 퍼지 집합대신에 [1/2]를 대입하여 (4)를 구성하면,

$$\begin{aligned} e([1/2]) &= 2d(([1/2] \cap [1/2]_{near}), [1]) \\ &\quad + 2d(([1/2] \cup [1/2]_{near}), [0]) - 2 \\ &= 2d(([1/2] \cap [1]), [1]) \\ &\quad + 2d(([1/2] \cup [1]), [0]) - 2 \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 1 - 2 = 1 \end{aligned}$$

이 된다. 위 증명에서 자명하게 $[1/2]_{near} = [1]$이다.

(E3)는 뾰족한 퍼지 집합이 좀 더 적은 엔트로피 값을 갖는 다는 사실, 즉 $e(A^*)$이 $e(A)$보다 적거나 같다는 사실을 증명한다. 증명을 위하여 $A^*_{near} = A_{near}$ 임은 자명하고 이 특성을 이용한다.

$$\begin{aligned} e(A^*) &= 2d((A^* \cap A^*_{near}), [1]) + 2d((A^* \cup A^*_{near}), [0]) - 2 \\ &= 2d((A^* \cap A_{near}), [1]) + 2d((A^* \cup A_{near}), [0]) - 2 \\ &\le 2d((A \cap A_{near}), [1]) + 2d((A \cup A_{near}), [0]) - 2 \\ &= e(A) \end{aligned}$$

증명에서 부등식의 증명은 보조정리 3.1의 첫 번째 결과, $d(A, A_{near}) \ge d(A^*, A_{near})$를 이용하여 보일 수 있다. 마지막으로 (E4) 는 정리의 가정 $d(A^C, B^C) = d(A, B)$를 이용하여 보일 수 있다.

$$\begin{aligned} e(A) &= 2d((A\cap A_{near}),[1])+2d((A\cup A_{near}),[0])-2 \\ &= 2d((A\cap A_{near})^C,[1]^C) \\ &\qquad +2d((A\cup A_{near})^C,[0]^C)-2 \\ &= 2d((A^C\cup A^C_{near}),[0[) \\ &\qquad +2d((A^C\cap A^C_{near}),[1])-2 \\ &= e(A^C). \end{aligned}$$

정리 3.2 는 Fan 등의 결과인 정리 3.1과 비교하면, 퍼지 집합 A와 관련된 일반집합 A_{near}만을 사용한 결과이다. 또한 퍼지 엔트로피를 구성하기 위한 가정을 간략화 하였다. 우리는 다음 정리에서 정리 3.2와는 반대로 A_{far}만을 고려한 퍼지 엔트로피를 제안한다.

정리 3.3 d를 퍼지 집합 $F(X)$에서의 σ-거리측도라고 하고 d가

$$d(A^c, B^c)=d(A,B),\ A,B\in F(X),$$

를 만족하면

$$e(A)=2d((A\cap A_{far}),[0])+2d((A\cup A_{far}),[1]) \qquad (5)$$

는 퍼지 엔트로피가 된다.

증명. 앞선 증명과 유사하게 진행한다. 먼저 (E1) 의 경우, $\forall\ D\in P(X), D_{far}=D^C$ 이므로

$$\begin{aligned} e(D) &= 2d((D\ \cap D_{far}),\ [0])+2d((D\cup D_{far}),[1]) \\ &= 2d([0],\ [0])+2d([1],[1]) = 0 \end{aligned}$$

이다. 그리고 퍼지 집합 [1/2]에 대한 엔트로피 값은

$$\begin{aligned} e([1/2]) &= 2d(([1/2]\cap[1/2]_{far}),[0]) \\ &\qquad +2d(([1/2]\cup[1/2]_{far}),[1]) \\ &= 2d(([1/2]\cap[0]),[0])+2d(([1/2],[0]),[1]) \\ &= 0+2\cdot\frac{1}{2}=1. \end{aligned}$$

로 되어 최대 값을 갖는다. 증명에서 $[1/2]_{far}=[0]$ 의 결과가 이용되었다. 퍼지 집합과 좀더 뾰족한 퍼지 집합사이의 퍼지 엔트로피의 관계는 $A^*_{far}=A_{far}$와 보조정리 3.1의 두번째 특성 $d(A,A_{far})\le d(A^*,A_{far})$를 이용하여 다음과 같이 증명된다.

$$\begin{aligned} e(A^*) &= 2d((A^*\cap A^*_{far}),[0])+2d((A^*\cup A^*_{far}),[1]) \\ &= 2d((A^*\cap A_{far}),[0])+2d((A^*\cup A_{far}),[1]) \\ &\le 2d((A\cap A_{far}),[0])+2d((A\cup A_{far}),[1]) \\ &= e(A) \end{aligned}$$

(E4)는 정리의 가정 $d(A^C,B^C)=d(A,B)$를 이용하여 다음과 같이 증명된다.

$$\begin{aligned} e(A) &= 2d((A\cap A_{far}),[0])+2d((A\cup A_{far}),[1]) \\ &= 2d((A\cap A_{far})^C,[0]^C)+2d((A\cup A_{far})^C,[1]^C) \\ &= 2d((A^C\cap A^C_{far}),[0])+2d((A^C\cup A^C_{far}),[1]) \\ &= e(A^C). \end{aligned}$$

이상에서 우리는 제안한 퍼지 엔트로피 인 (4) 와 (5)가 Liu가 제안한 공리적 퍼지 엔트로피의 정의를 만족함을 확인하였다. 제안한 퍼지 엔트로피는 Fan 등의 결과보다 간결하며, 요구되는 가정 또한 덜 가혹한 조건에 대하여도 구성가능하다. 이전의 정의에서 언급된 σ-엔트로피의 조건 또한 만족함을 쉽게 보일 수 있다. 이제 우리는 제안된 퍼지 엔트로피 의 유용성을 다음 장의 예제에서 확인한다.

3.2 유사측도와 퍼지 엔트로피와의 관계

우리는 앞 절에서 거리측도를 이용하여 퍼지 엔트로피의 구성에 대하여 유도하였다. 보편적으로 퍼지 엔트로피는 그림 1 에서와 같이 관심 있는 일반 집합과 퍼지 소속 함수 사이의 일치되지 않은 면적으로 표현됨을 확인하였다. 즉 엔트로피는 거리측도의 함수 $e(A)=e(d(A))$가 된다. 우리의 결과에서는 엔트로피 함수 그자체가 거리측도이므로 $e(A)=d(A)$로 표현 되어 Liu의 결과에 의하여 유사함수의 구성 또한 간단히 이끌 수 있다. 즉

$$d(A)+s(A)=1 \qquad (6)$$

를 이용하여 유사측도를 유도할 수 있다. 인지적으로도 $s(A)=1-e(A)$의 값이 0 으로 근사할 경우 퍼지 집합 A와 관련된 일반집합 A_{near}은 거의 일치하여 유사성이 높음을 확인할 수 있다. 또한 소속 함수가 덜 뾰족할 경우, 유사도의 값 $s(A)=1-e(A)$가 적은 값을 나타낸다. 이제 우리는 다음 정리에서와 같이 거리측도를 이용한 유사 측도를 제안한다. 다음의 정리 3.4는 정리 3.2의 결과를 이용하여 적절한 상수를 다음과 같이 고려하여 구성한다.

정리 3.4 퍼지 집합 $F(X)$에서 $A\in F(X)$에 대하여 거리측도 d를 만족할 때

$$s(A,A_{near})=4-2d((A\cap A_{near}),[1])-2d((A\cup A_{near}),[0]) \qquad (7)$$

는 퍼지 집합 A와 관련된 일반집합 A_{near}의 유사측도이다.

증명. 제안한 유사 측도가 정의 2.3을 만족함을 보임으로서 유사측도가 만족됨을 보일 수 있다.

(S1)에서는 집합 A와 A_{near}의 가환성의 성립 여부이므로 식 (7)에서 자명하다. (S2) 에서는 $s(A,A^c)=0$를 보이면 되므로

$$\begin{aligned} s(A,A^c) &= 4-2d((A\cap A^c),[1])-2d((A\cup A^c),[0]) \\ &= 4-2d([0],[1])-2d([1],[0]) \\ &= 4-2\cdot1-2\cdot1=0 \end{aligned}$$

로서 증명된다.

(S3) 서로 다른 두 합의 엔트로피보다 같은 집합일 때 엔트로피가 가장 크다는 사실이므로

$$\begin{aligned} s(A,B) &= 4-2d((A\cap B),[1])-2d((A\cup B),[0]) \\ &\le 4-2d((D\cap D),[1])-2d((D\cup D),[0]) \end{aligned}$$

부등식의 증명은

$$d((A\cap B),[1])\ge d((D\cap D),[1])$$
$$d((A\cup B),[0])\ge d((D\cup D),[0])$$

를 통하여 자명하다.

마지막으로 (S4)는 $\forall A,B,C\in F(X),\ \ A\subset B\subset C$이면,

$$\begin{aligned} s(A,B) &= 4-2d((A\cap B),[1])-2d((A\cup B),[0]) \\ &= 4-2d(A,[1])-2d(B,[0]) \\ &\ge 4-2d(A,[1])-2d(C,[0]) \\ &= s(A,C) \end{aligned}$$

이다. 또한

$$\begin{aligned} s(B,C) &= 4-2d((B\cap C),[1])-2d((B\cup C),[0]) \\ &= 4-2d(B,[1])-2d(C,[0]) \\ &\geq 4-2d(A,[1])-2d(C,[0]) \\ &= s(A,C) \end{aligned}$$

를 만족한다. 부등호의 증명은

$$d(B,[0])\leq d(C,[0])$$
$$d(B,[1])\leq d(A,[1])$$

를 통하여 증명된다. 따라서 제안한 유사측도 (7)은 유사 측도의 정의 2.3 을 만족한다.

또한 정리 3.4와 유사하게 정리 3.4의 결과를 이용하여 유사측도를 다음의 정리에서 나타낸다.

정리 3.5 퍼지 집합 $F(X)$에서 $A\in F(X)$에 대하여 거리측도 d 를 만족할 때

$$s(A,A_{near})=2-2d((A\cap A^c_{near}),[0])-2d((A\cup A^c_{near}),[1]) \tag{8}$$

는 퍼지 집합 A와 관련된 일반집합 A_{near}의 유사측도이다.

증명. 증명은 정리 3.4 의 결과와 유사하게 보일 수 있다. (S 1)에서는 집합 A와 A_{near}의 가환성의 성립 여부이므로 식 (8)에서 역시 자명하다. (S2) 에서는 $s(A,A^c)=0$를 보이면 되므로

$$\begin{aligned} s(A,A^c) &= 2-2d((A\cap(A^c)^c),[0])-2d((A\cup(A^c)^c),[1]) \\ &= 2-2(d(A,[0])+d(A,[1])) \\ &= 2-2\cdot 1=0 \end{aligned}$$

이다.

(S3) 서로 다른 두 합의 엔트로피보다 같은 집합일 때 엔트로피가 가장 크다는 사실이므로

$$\begin{aligned} s(A,B) &= 2-2d((A\cap B^c),[0])-2d((A\cup B^c),[1]) \\ &\leq 2-2d((D\cap D^c),[0])-2d((D\cup D^c),[1]) \end{aligned}$$

이다. 여기서 부등식의 증명은

$$d((A\cap B^c),[0])\geq d((D\cap D^c),[0])$$
$$d((A\cup B^c),[1])\geq d((D\cup D^c),[1])$$

를 통하여 자명하다.

마지막으로 (S4)는 $\forall A,B,C\in F(X)$, $A\subset B\subset C$ 이면,

$$\begin{aligned} s(A,B) &= 2-2d((A\cap B^c),[0])-2d((A\cup B^c),[1]) \\ &= 2-2d([0],[0])-2d((A\cup B^c),[1]) \\ &\geq 2-2d(A\cap C^c,[0])-2d(A\cup C^c,[1]) \\ &= 2-2d([0],[0])-2d(A\cup C^c,[1]) \\ &= s(A,C) \end{aligned}$$

이다. 또한

$$\begin{aligned} s(B,C) &= 2-2d((B\cap C^c),[0])-2d((B\cup C^c),[1]) \\ &= 2-2d([0],[0])-2d((B\cup C^c),[1]) \\ &\geq 2-2d(A\cap C^c,[0])-2d(A\cup C^c,[1]) \\ &= 2-2d([0],[0])-2d(A\cup C^c,[1]) \\ &= s(A,C) \end{aligned}$$

를 만족한다. 부등호의 증명은

$$d((A\cup B^c),[1])\geq d((A\cup C^c),[1])$$
$$d((B\cup C^c),[1])\geq d((A\cup C^c),[1])$$

를 통하여 증명된다. 따라서 제안한 유사측도 (8)은 역시 유사 측도의 정의 2.3 을 만족한다.

4. 결 론

우리는 본 논문에서 엔트로피와 거리측도 그리고 유사측도에 대한 공리적 정의를 소개하고 모호함의 측도인 퍼지 엔트로피를 거리 측도를 통하여 유도 하였다. 유도된 퍼지 엔트로피는 기존 결과의 요구 조건보다 완화된 상황 하에서 구성 가능하다. 또한 퍼지 집합과 관심 있는 일반집합 사이의 유사측도를 거리측도를 통하여 유도하였고 타당성을 증명을 통하여 확인하였다.

참 고 문 헌

[1] D. Bhandari, N. R. Pal, "Some new information measure of fuzzy sets," Inform. Sci. 67, 209-228, 1993.

[2] A. Ghosh, "Use of fuzziness measure in layered networks for object extraction: a generalization," Fuzzy Sets and Systems, 72, 331-348, 1995.

[3] B. Kosko, *Neural Networks and Fuzzy Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1992.

[4] Liu Xuecheng, "Entropy, distance measure and similarity measure of fuzzy sets and their relations," Fuzzy Sets and Systems, 52, 305-318, 1992.

[5] N.R. Pal, S.K. Pal, "Object-background segmentation using new definitions of entropy," IEEE Proc. 36, 284-295, 1989.

[6] J. L. Fan, W. X. Xie, "Distance measure and induced fuzzy entropy," Fuzzy Set and Systems, 104, 305-314, 1999.

[7] J. L. Fan, Y. L. Ma, and W. X. Xie, "On some properties of distance measures," Fuzzy Set and Systems, 117, 355-361, 2001.

[8] S.H. Lee and S.S. Kim, "On some properties of distance measures and fuzzy entropy," Proceedings of KFIS Fall Conference, 2002, 9-12.

저 자 소 개

이상혁(Sang-Hyuk Lee)
1988년 :충북대학교 전기공학과졸업.
1991년 :서울대학교대학원 전기공학과졸업 (공학석사).
1998년 :서울대학교대학원 전기공학부졸업 (공학박사).
1996-1999년 :(주)하우 책임연구원.
2000년-현재 :부산대학교 산업자동화및 인력양성사업단 기금교수.

관심분야 : 강인제어이론, 게임이론, 퍼지이론.
Phone : +82-51-510-2497
Fax : +82-51-513-0212
E-mail : leehyuk@pusan.ac.kr

김성신(Sungshin Kim)
1984년 :연세대학교 전기공학과졸업.
1986년 :연세대학교대학원 전기공학과졸업 (공학석사).
1996년 :Georgia Institute of Technology 졸업(공학박사).
1998년-현재 부산대학교 전기공학과 부교수.

관심분야 :지능제어, 데이터 마이닝, 공정시스템
Phone : +82-51-510-2374
Fax : +82-51-513-0212
E-mail : sskim@pusan.ac.kr