

연속적 확대 유전기법을 이용한 고무물성계수의 산출

권영두¹⁾ · 김재용²⁾ · 이재관²⁾ · 권현욱²⁾ · 한인식³⁾

경북대학교 기계공학부¹⁾ · 경북대학교 기계공학과 대학원²⁾ · 국방과학연구소³⁾

Estimation of the Rubber Material Property by Successive Zooming Genetic Algorithm

Youngdoo Kwon¹⁾ · Jaeyong Kim²⁾ · Jaekwan Lee²⁾ · Hyunwook Kwon²⁾ · Insik Han³⁾

¹⁾School of Mechanical Engineering, Kyungpook National University, Daegu 702-701, Korea

²⁾Graduate School of Mechanical Engineering, Kyungpook National University, Daegu 702-701, Korea

³⁾Agency for Defense Development, Daejeon 305-152, Korea

(Received 16 February 2004 / Accepted 30 October 2004)

Abstract : Nowadays, various kind of rubber-like materials are used in industry. These are usually installed in automobiles, trains, etc. They work as dampers or important parts in the system, and the applications for rubber-like materials are increasing. In the past days, rubber engineers and designers predicted rubber material behaviors by the analytic method for limited problems. With the progress of digital computers, Finite Element Methods is widely used for analyzing the rubber-like materials. The popular methods predicting rubber material property are curve fitting and least square method, but there are some problems such as low precision and tedious solving process. Here, we introduce a method estimating rubber material property by successive zooming genetic algorithm(SZGA). The proposed algorithm offers more precise rubber property. To demonstrate the effectiveness of the proposed algorithm, we compared this method with Haines & Wilson's method, MARC, ABAQUS.

Key words : Mooney-Rivlin(무니리브린), Rubber(고무), Strain energy density(변형률에너지밀도), Least square method(최소자승법), SZGA(연속적 확대 유전기법)

1. 서론

고무는 일상생활은 물론 기계공업분야에서도 많이 사용되는 매우 중요한 기계재료이다. 고무재료는 생산원가가 낮고 또한 고무가 가지는 특유의 유연성과 가공성 및 탄성 등 많은 장점을 지니고 있으며, 이는 다른 금속재료나 무기재료로는 해결할 수 없는 기능성이라 할 수 있다. 현재 고무재료는 자동차에 사용하는 각종호스나 방진고무류, oil seal 계통, 벨트 및 cover류가 그 예이다. 고무 부품의 개발

은 고무의 물성을 맞추기 위한 성분 배합으로 형상 설계, 제작 공정은 물론이고 실험평가 등 대부분의 과정을 경험적인 수법에 의지하여 왔다. 최근 컴퓨터를 이용한 구조해석 소프트웨어의 눈부신 발전으로 말미암아 신제품 개발 시 제작 전에 특성을 미리 예측하고 평가하여 제품 개발에 소요되는 경비와 시간을 절약하는 CAE개념이 많은 부품에 적용되고 있다. 고무 부품에 대해서도 고무의 비선형 물성을 평가하는 다양한 모델의 개발과 초탄성 거동의 이론적인 뒷받침, 그리고 비선형 대변형 유한요소해석 코드의 발전 등으로 인하여 유한요소해석 기법

*To whom correspondence should be addressed.
ydkwon@knu.ac.kr

이 적극 활용되고 있는 추세이다.^{1,2)} 그러나, 고무유사재료(rubber-like material)의 경우 재료 비선형(material nonlinearity)과 기하학적 비선형(geometric nonlinearity)에 의해 구조해석시 많은 어려움이 있다. 또한, 고무재료가 가지는 비압축성이나 비선형성 등에 인하여 해석적인 연구는 많은 어려움을 겪어왔다. 그리고, 고무재료는 다른 재료와 달리 그 특성이 초탄성체(hyperelastic material)로서 변형률에너지함수(strain energy function)로 표현된다. 고무유한요소해석에서 사용하는 변형률에너지함수(W)는 연신률 불변량 함수인 Mooney-Rivlin model과 주연신율의 함수인 Ogden model이 대표적이다. 본 연구에서는 Mooney-Rivlin model을 이용하여 고무재료의 특성을 나타내었다. Mooney-Rivlin model 계수를 결정하는 방법에는 일반적인 근사방법(crue fitting),³⁾ 에너지표면(energy surface)의 관찰에 의한 계수 결정법⁴⁾ 등이 있다. 특히, 에너지표면관찰에 의한 계수 결정법에서는 이론 변형률에너지밀도(strain energy density)와 실험 변형률에너지밀도의 차이를 최소화하는 Mooney-Rivlin 계수를 구하는데, 최소자승법(least square method)을 사용하였다. 그러나, 최소자승법을 이용하면 이론적 미분과정과 다차원연립방정식을 푸는 과정이 복잡하여 오차가 발생할 가능성이 높다. 이에, 다봉함수와 같은 비볼록 문제(non-convex problem) 등의 전역 최적해 탐색에 효율적이며, 도함수의 개념을 사용하지 않고, 방향성 있는 탐색과 확률 탐색을 동시에 수행하며, 부분 탐색의 문제점을 해결한 연속적 확대 유전기법 방식을⁵⁾ 이용하여 오차함수(error function)값을 최소화하는 방법을 제안하였고, 그 효율성을 상용패키지인 MARC^{6,7)}와 ABAQUS⁸⁾로 검증하였다.

2. 연속적 확대 유전알고리즘

2.1 연속적 확대 유전기법(SZGA)

이 방법은 후보 최소점 주위로 탐색 공간을 적극적으로 줄여가는 것으로 일반적으로 모든 유전자 알고리즘에 적용될 수 있으나, 본 연구에서는 마이크로 유전자 알고리즘에 적용하여 사용하였다. 연속적 확대 유전기법의 작동순서를 간단히 서술하면, 초기 집단이 생성되고 마이크로 유전자 알고리

즘이 실행된다. 정해진 세대(100세대)가 진행된 후에 최적의 적합도를 나타내는 개체를 선정한다. 최적 개체가 선정되면 이 개체 주위로 탐색 영역을 $(X_{kopt} - \frac{\alpha^{N_{zoom}}}{2}, X_{kopt} + \frac{\alpha^{N_{zoom}}}{2})$ 로 좁혀 들어가고, 이 축소 영역에서 새로운 초기 집단을 생성하여 계속 진화되어 나가도록 한다. 이러한 탐색 영역의 축소를 통하여 해의 분해능(resolution)과 탐색 효율을 높일 수 있다. 이와 같은 과정을 해가 수렴될 때까지 계속 진행한다. Fig. 1은 연속적 확대 유전기법의 대략적인 순서도를 나타낸다. 여기에서, δ 는 error ratio, X_{1opt} 는 100세대 후의 최적 개체, X_{kopt} 는 $100 \times k$ 세대 후의 최적 개체, α 는 주밍 인자(zooming factor), N_{zoom} 은 주밍 횟수이다.

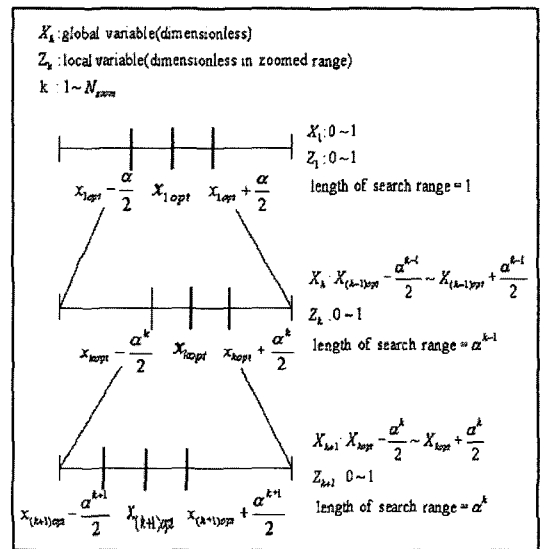


Fig. 1 Illustration of SZGA

2.2 주밍인자(α)의 결정

주밍인자(α)는 구하고자 하는 변수의 개수와 한 세대에서의 집단수에 따라 변한다. 집단수를 크게 하면 더 정확한 해를 가질 수 있겠지만, 계산량이 많아져서 최적해를 구하는데 많은 시간을 필요로 한다. 만약, 변수의 개수가 많아지면 집단수를 늘여서 더 정확한 해를 구할 수 있다.

본 연구에서는 Mooney-Rivlin 6계수를 구하기 위해 6개의 변수를 사용하였으므로, 1세대당 900개의

집단수를 사용하였다. 이에, 한번 zooming될 때마다 총 90,000(900×100)번의 함수계산을 실시하게 된다. 여기서, 900은 1세대당 집단수, 100은 100세대 진행 후 주밍(zooming)을 실시하므로 한번 zooming당 세대수를 나타낸다. 그러므로, 한 변수당 탐색되는 개체수는 6개(=90000^{1/6})가 된다. 주밍을 할 때 최적개체를 놓치지 않기 위해서는 주밍인자가 적절히 선정되어야 한다. 주밍인자를 작게 잡으면 해의 신뢰성이 떨어지며, 주밍인자를 크게 잡으면 주밍 횟수를 증가시켜야 정밀도가 높은 해를 얻을 수 있는 상관관계가 있다. 따라서, 주밍인자를 경험적으로 0.3으로 선택하여 계산하였다.⁵⁾

2.3 총세대수(Maxgen)의 결정

주밍인자가 결정되면 총세대수 결정이 중요하다. 주밍인자가 크면 zooming횟수를 늘려야 보다 정확한 해를 구할 수 있다. 세대수도 집단개수와 같이 계산량에 영향을 주므로 사용자의 판단에 따라 결정해 주어야 한다.

예를 들면, 주밍인자를 0.3으로 선택한 경우 M전 세대수를 1000($N_{zoom}=10$)으로 결정하면 탐색 영역은 $Z_{range} = \alpha^{N_{zoom}-1} = 0.3^{10-1} = 1.97E-5$ 로 되고, 1500($N_{zoom}=15$)으로 선택하면 탐색영역은 $Z_{range} = 0.3^{15-1} = 4.7E-8$ 이 된다. 여기에서 N_{range} 는 해의 분해능과 관계되는 값으로서 N번 zooming후 탐색영역의 크기를 나타낸다. 이 값이 작을수록 보다 정확한 해를 얻을 수 있는데, 너무 작게 하면 불필요하게 계산량이 증가하는 단점이 있으므로 주의가 필요하다. 본 연구에서는 총세대수를 1500으로 선택하였다.

3. 고무물성계수 산출

3.1 변형률에너지함수

고무는 그 거동이 변형률에너지함수로 표시되는 데 이러한 고무의 특성화를 위해 다양한 형태의 변형률에너지 함수가 보고되고 있다. 변형률에너지함수의 형태는 크게 주 불변량으로 표시하는 Mooney-Rivlin model과 주 연신율형태로 표시하는 Ogden model이 있다. 이 중 유한요소해석에 있어서 그 적용의 편의성으로 인해 주 불변량으로 표시되는

Mooney-Rivlin model이 선호되고 있으며 특히, Mooney-Rivlin model에서 두 개의 계수(C_{10}, C_{01})를 가진 단순 Mooney-Rivlin model이 수학적 단순성과 그 계수값의 물리적 의미로 인해 가장 많이 사용되고 있다. 그러나, 단순 Mooney-Rivlin model은 다양한 종류의 고무에 대한 응력-변형률관계를 정확하게 표현할 수 없고, 특히 연신율이 큰 구간에서는 적용하기가 어렵다는 단점이 있다.¹³⁾ 이에 최근에는 고차항을 가진 Mooney-Rivlin model이 많이 활용되고 있다. 본 연구에서는 6계수(Haines-Wilson type ; $C_{10}, C_{01}, C_{20}, C_{11}, C_{02}, C_{30}$)⁴⁾를 가지는 Mooney-Rivlin model을 적용하였다. 일반화된 Mooney-Rivlin model에 의한 변형률에너지 식 (1)과 같이 정의된다.

$$W = \sum_{i,j=0}^4 C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j \quad (1)$$

여기서, W 는 변형률에너지밀도이다. 그리고, I_1, I_2 는 정방체 초탄성재료의 각 축(x, y, z)에 대한 extension ratio를 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 라고 할 때, Cauchy 정의에 의하여 다음과 같은 형태로 표현할 수 있다.

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad (2)$$

$$I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 \quad (3)$$

$$I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \quad (4)$$

일반적으로 재료가 비압축성 물질이라고 가정한다면, 위의 extension ratio 상호간에 관계는 $\lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2 \cdot \lambda_3^2 = 1$ 이 되므로, 식 (4)에서의 I_3 은 1이 된다.

이상의 조건으로부터 λ_3 는 $\frac{1}{\lambda_1 \lambda_2}$ 이 되어 위의 식 (2), (3)은 다음과 같이 바꿔 쓸 수 있다.

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \quad (5)$$

$$I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} \quad (6)$$

이와 같이 구하여진 strain invariant (I_1, I_2)는 실험조건에 따라 달라지는데 본 연구에서는 Haines & Wilson의 논문⁴⁾에 수록된 Treloar's simple extension, pure shear, equibiaxial extension experimental data¹⁴⁾를 활용하였다. 각 실험에 대한 extension ratio는 다

음과 같다.

① 단순인장(simple extension) :

$$\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = \lambda_1^{-\frac{1}{2}}, \lambda_3 = \lambda_1^{-\frac{1}{2}}$$

② 순수전단(pure shear) :

$$\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = 1.0, \lambda_3 = \lambda_1^{-1}$$

③ 등축인장(equibiaxial extension) :

$$\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = \lambda_1, \lambda_3 = \lambda_1^{-2}$$

식 (1)에서 I_1 및 I_2 에 대하여 각각 3을 빼 주는 변형이 전혀 없는 초기 상태의 I_1, I_2 의 값이 3이므로 식 (1)의 초기값이 0으로 되게 하기 위한 것이다. 또, 식의 간편성을 위하여 $(I_1 - 3), (I_2 - 3)$ 을 각각 A, B 로 나타내었다.

$$W = \sum_{i,j=0}^n C_{ij} A^i B^j \quad (7)$$

λ_1 을 $\frac{l}{l_0}$ (l_0 : 초기 길이, l : 인장 길이)로 했을 경우, 식 (5), (6)에 의하면 W 에 미치는 영향은 I_1 의 경우가 I_2 의 경우보다 크게된다. 즉, A 의 영향이 B 의 영향보다 크게 되므로 A^3 의 고차항을 추가하였다. 그러므로, Mooney-Rivlin 6계수로 표현되는 변형률에너지밀도는 식 (8)과 같이 정의된다.

$$W = C_{10}A + C_{01}B + C_{20}A^2 + C_{11}AB + C_{02}B^2 + C_{30}A^3 \quad (8)$$

참고로 여기서, A, B 는 무차원 수이므로 변형률 에너지밀도와 같은 차원이 되기 위해서 상수들의 차원은 (MPa)로 된다.

3.2 최소자승법을 이용한 Mooney계수의 산출

Haines and Wilson⁴⁾은 Treloar 실험치를 이용하여 Mooney-Rivlin 6계수를 구하기 위해 최소자승법을 이용하였다.

$$S = \sum_{k=1}^n [W - W_k]^2 \quad (9)$$

여기서 W 는 식 (8)로부터 구해지는 변형률에너지밀도고, W_k 는 실험결과로부터 구해지는 변형률 에너지밀도다. k 는 측정 스텝 수이며 식 (9)에서 W 는 k 번째까지의 이론 변형률에너지밀도, W_k 는 k

번째까지의 실험 변형률에너지밀도로서 실제 그래프에서는 k 번째까지의 적분 값이다. 식 (8)을 식 (9)에 대입하여 풀어 써보면 다음과 같이 된다.

$$S = \sum_{k=1}^n [C_{10}A_k + C_{01}B_k + C_{20}A_k^2 + C_{11}A_kB_k + C_{02}B_k^2 + C_{30}A_k^3 - W_k]^2 \quad (10)$$

식 (10)의 S 를 각 상수 $C_{10}, C_{01}, C_{20}, C_{11}, C_{02}, C_{30}$ 에 대해 편미분한 후 $\frac{\partial S}{\partial C_X} = 0$ 로 두고 풀면, 식 (11)과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n [C_{10}A_k^2 + C_{01}A_kB_k + C_{20}A_k^3 + C_{11}A_k^2B_k \\ & + C_{02}A_kB_k^2 + C_{30}A_k^4] = \sum_{k=1}^n [A_kW_k] \\ & \sum_{k=1}^n [C_{10}A_kB_k + C_{01}B_k^2 + C_{20}A_k^2B + C_{11}A_kB_k^2 \\ & + C_{02}B_k^3 + C_{30}A_k^3B_k] = \sum_{k=1}^n [B_kW_k] \\ & \sum_{k=1}^n [C_{10}A_k^3 + C_{01}A_k^2B_k + C_{20}A_k^4 + C_{11}A_k^3B_k \\ & + C_{02}A_k^2B_k^2 + C_{30}A_k^5] = \sum_{k=1}^n [A_k^2W_k] \\ & \sum_{k=1}^n [C_{10}A_k^2B_k + C_{01}A_kB_k^2 + C_{20}A_k^3B_k + C_{11}A_k^2B_k^2 \\ & + C_{02}A_kB_k^3 + C_{30}A_k^4B_k] = \sum_{k=1}^n [A_kB_kW_k] \\ & \sum_{k=1}^n [C_{10}A_kB_k^2 + C_{01}B_k^3 + C_{20}A_k^2B_k^2 + C_{11}A_kB_k^3 \\ & + C_{02}B_k^4 + C_{30}A_k^3B_k^2] = \sum_{k=1}^n [B_k^2W_k] \\ & \sum_{k=1}^n [C_{10}A_k^4 + C_{01}A_k^3B_k + C_{20}A_k^5 + C_{11}A_k^4B_k \\ & + C_{02}A_k^3B_k^2 + C_{30}A_k^6] = \sum_{k=1}^n [A_k^3W_k] \quad (11) \end{aligned}$$

미지 상수가 모두 6개이므로 6개의 식이 필요하며, 실험 data값을 이용하여 임의의 k 번째까지의 A_k, B_k, W_k 구한 뒤 식 (11)에 대입하여 연립 방정식을 풀면 된다. ($A = A_k, B = B_k, W = W_k$)

$$\begin{bmatrix} \sum A^2 & \sum AB & \sum A^3 & \sum A^2B & \sum AB^2 & \sum A^4 \\ \sum AB & \sum B^2 & \sum A^2B & \sum AB^2 & \sum B^3 & \sum A^3B \\ \sum A^3 & \sum A^2B & \sum A^4 & \sum A^3B & \sum A^2B^2 & \sum A^5 \\ \sum A^2B & \sum AB^2 & \sum A^3B & \sum A^2B^2 & \sum AB^3 & \sum A^4B \\ \sum AB^2 & \sum B^3 & \sum A^3B^2 & \sum AB^3 & \sum B^4 & \sum A^3B^2 \\ \sum A^4 & \sum A^3B & \sum A^5 & \sum A^4B & \sum A^3B^2 & \sum A^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{10} \\ C_{01} \\ C_{20} \\ C_{11} \\ C_{02} \\ C_{30} \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sum AW \\ \sum BW \\ \sum A^2W \\ \sum ABW \\ \sum B^2W \\ \sum A^3W \end{pmatrix} \quad (12)$$

식 (12)은 6개의 연립방정식을 행렬로 표시한 것이다. 6개의 상수 ($C_{10}, C_{01}, C_{20}, C_{11}, C_{02}, C_{30}$)는 가우스 소거법을 이용하여 구하는데 풀이과정이 복잡하고 계산 중 오차가 발생할 가능성이 높으며 가우스 소거법을 이용할 때 행렬의 차수가 커짐에 따라 ill-condition이 발생하기 쉽다.^{15,16)} 또한 변형률에너지밀도함수가 변할 때마다 행렬식을 만들어 주어야 하는 번거로움이 있으며 function의 차수가 높아질수록 그 해의 정밀도가 저감된다.

3.3 연속적 확대 유전기법을 이용한 고무물성 계수의 산출

위에서 서술한 것처럼 최소자승법을 이용한 방법은 편미분과정과 행렬식을 푸는 과정이 복잡하고, 행렬의 차수가 커짐으로써 ill-condition에 의한 오차가 발생할 가능성이 높아 본 연구에서는 연속적 확대 유전기법을 이용하여 보다 간단하고 정확한 고무재료상수를 구하였다. 연속적 확대 유전기법을 이용한 초탄성 고무제품의 재료상수를 구하는 방법은 다음과 같다.

연속적 확대 유전기법에 사용되는 목적함수는 식 (13)과 같은데 이 값이 최소가 되는 Mooney-Rivlin 6계수를 구한다. 즉, 이론 변형률에너지밀도와 실험 변형률에너지밀도의 차이 (S)를 최소로 하는 Mooney-Rivlin 계수를 구하게 된다.

$$\min. S(C_{10}, C_{01}, C_{20}, C_{11}, C_{02}, C_{30})$$

$$S = \sum_{k=1}^n |W - W_k|$$

$$W = W(C_{10}, C_{01}, C_{20}, C_{11}, C_{02}, C_{30}) \quad (13)$$

여기서 W 는 임의의 $C_{10}, C_{01}, C_{20}, C_{11}, C_{02}, C_{30}$ 를 식 (8)에 대입하여 구해지는 변형률에너지밀도이며, W_k 는 실험결과로부터 구해진 변형률에너지밀도이다.

4. 결과비교 및 검증

4.1 결과비교

Haines & Wilson의 최소자승법에 의한 결과와 본 연구에서 제시한 연속적 확대 유전기법을 이용한 방법에 의한 Mooney-Rivlin 6계수를 서로 비교하였다. 사용된 실험 data는 Treloar's experimental data를 이용하였다. Table 1은 Haines & Wilson에 의해 제시된 Mooney-Rivlin 6계수와 최소자승법을 이용해서 직접 구한 계수값 및 연속적 확대 유전기법에 의해 구해진 결과값을 나타낸다.

Table 1 Mooney-Rivlin coefficients obtained by different methods

	Least square method		SZGA (present)
	Haines & Wilson	Present result	
C_{10}	0.179	0.184878	0.188551
C_{01}	0.0090	0.00841940	0.00761909
C_{20}	-0.0018	-0.00206883	-0.00232541
C_{11}	-8.46×10^{-5}	-7.49571×10^{-5}	-1.19230×10^{-5}
C_{02}	-3.71×10^{-5}	-3.12226×10^{-5}	-6.73980×10^{-6}
C_{30}	4.45×10^{-5}	4.77688×10^{-4}	5.11414×10^{-5}

다음으로 각 방법을 통해서 산출된 Mooney-Rivlin 6계수의 정확성을 확인하기 위해서 산출된 값을 식 (8)에 대입하여 구한 이론 변형률에너지밀도와 실험 변형률에너지밀도를 extension ratio의 증가에 따라서 그래프로 나타내었다. Fig. 2~3은 단순인장 경우를 나타낸 그림이다.

단순인장시험에서는 그래프에서와 같이 Haines & Wilson방법이 연속적 확대 유전기법 보다 좀 더 실험 변형률에너지밀도에 수렴하지만, 오차의 총합 (S)은 0.757932와 0.920160 MJ/m³로 큰 차이를 보이지 않았다.

Fig. 4~5는 pure shear test에서 이론 변형률에너지밀도와 실험 변형률에너지밀도를 나타낸 것이다. 그래프에서와 같이 Haines & Wilson방법이 연속적 확대 유전기법 보다 실험 변형률에너지밀도에 잘 수렴되지 않았다. 이때, 이론치와 실험치 차이의 총합 (S)은 0.702015와 0.372847 MJ/m³로 얼마간의 차이를 확인할 수 있었다.

연속적 확대 유전기법을 이용한 고무물성계수의 산출

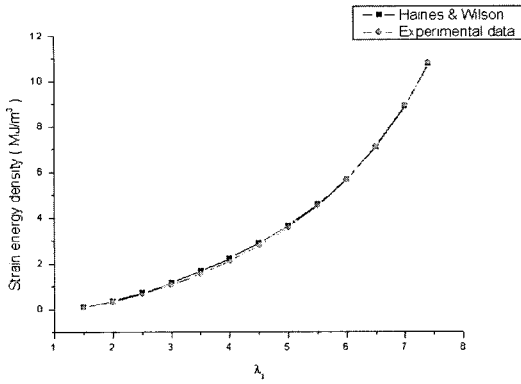


Fig. 2 Strain energy density in simple extension by Haines & Wilson

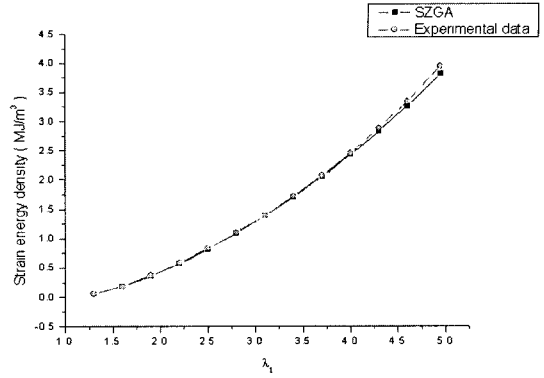


Fig. 5 Strain energy density in pure shear by SZGA

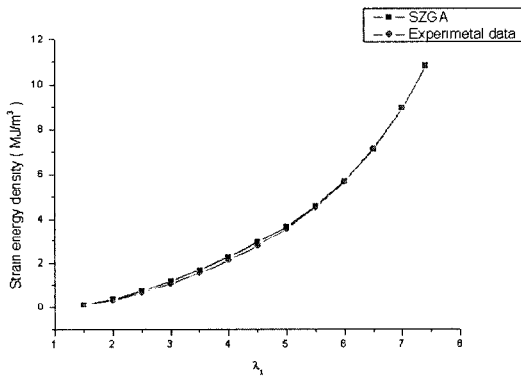


Fig. 3 Strain energy density in simple extension by SZGA

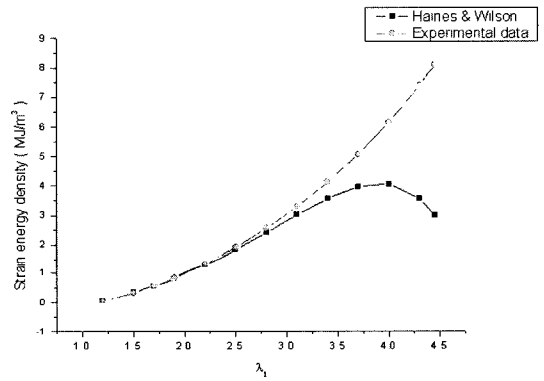


Fig. 6 Strain energy density in Equibiaxial extension by Haines & Wilson

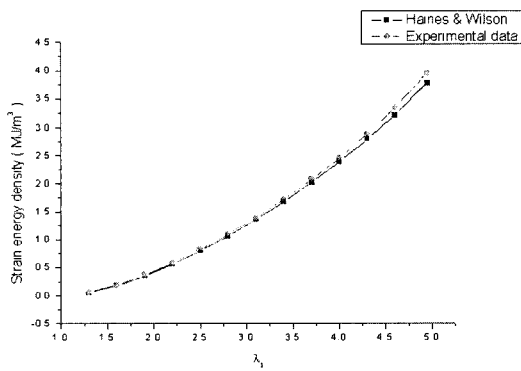


Fig. 4 Strain energy density in pure shear by Haines & Wilson

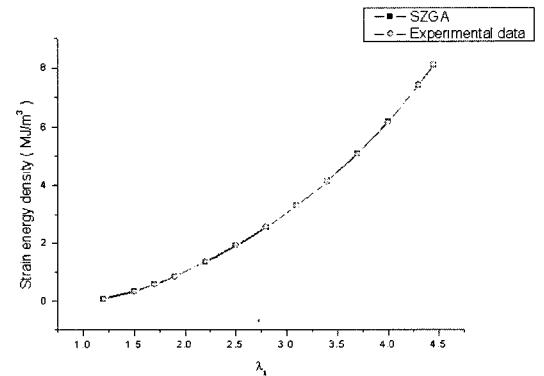


Fig. 7 Strain energy density in Equibiaxial extension by SZGA

Fig. 6~7은 equibiaxial extension test에서 이론 변형률에너지밀도와 실험 변형률에너지밀도를 나타낸 것이다. 그래프에 나타난 결과처럼 Haines & Wilson 방법은 extension ratio가 증가함에 따라 초반부에서 잘 수렴되었으나, 후반부에서는 잘 수렴되

지 않는 것이 관측되었다. 반면에, 연속적 확대 유전 기법은 이론 변형률에너지밀도와 실험 변형률에너지밀도가 잘 일치함을 확인할 수 있었다. 이 때, 이론치와 실험치의 차이의 총합(S)은 13.258042와 0.147388 MJ/m³로 큰 차이를 나타내었다. 이런 결과

를 통해서, 본 연구에서 제시한 연속적 확대 유전기법을 이용한 고무물성계수 산출이론의 신빙성과 정확성을 확인할 수 있었다.

그러나, FEM 해석시 단순인장에 중점을 둔 경우, 위의 Mooney-Rivlin 계수값을 사용하는 것보다 단순인장의 경우의 error function에 weight를 주어 좀 더 실험 strain-energy 값에 접근시키는 것이 필요할 수 있다.

그러므로, 본 연구에서는 단순인장의 이론 변형률-에너지밀도와 실험 변형률-에너지밀도의 error function (S)에 1.5의 weight를 주어 좀 더 정확한 Mooney-Rivlin 6계수를 구하였다.

각각의 방법(Haines & Wilson, SZGA, SZGA with weight)과 직접 최소자승법을 이용하여 구한 Mooney-Rivlin 6계수에 대한 각 실험에서의 이론 변형률-에너지밀도와 실험 변형률-에너지밀도의 차이의 총합(S)을 Table 2에 정리하였다. (MJ/m^3)

Table 2 Comparisons of errors between different methods for obtaining Mooney-Rivlin 6 coefficient

	Haines & Wilson	Present		
		Least square method	SZGA	SZGA with weight
Simple extension	0.757932	0.709209	0.920160	0.681611
Pure shear	0.702015	0.620089	0.372847	0.663183
Equibiaxial extension	13.258042	0.242475	0.147388	0.159191
Total	14.717989	1.571773	1.440395	1.503985

Table 2의 결과에서 특이한 점은 Haines & Wilson에 의해 구한 오차의 총합과 직접 최소자승법을 이용해 구한 오차의 총합이 차이가 나는 점이다. 이는 행렬식을 계산시 데이터를 입력할 때의 실수나 컴퓨터의 성능이 현재보다 떨어지기 때문이라고 생각된다. 최소자승법을 사용하면 변형률-에너지밀도 함수가 바뀔 때마다 편미분과정과 다차원연립방정식을 풀기 위해서 행렬식을 만들어야 하는 불편한 점이 있다. 이에 반해 연속적 확대 유전기법을 이용한 고무물성계수 산출방법은 변형률-에너지밀도 함수만을 바꿔줌으로써 간편하게 보다 정확한 계수를 구해낼 수 있다. 또한 중점을 두고 있는 실험의 오차

를 줄이기 위해 가중함수(weight function)을 도입하여 좀 더 정확한 계수를 구할 수 있다.

4.2 적용 예

연속적 확대 유전기법을 이용한 물성계수 산출 알고리즘의 유용성을 현장에서 고무물성계수 산출 및 비선형해석에 많이 사용되고 있는 상용패키지인 MARC와 ABAQUS를 이용하여 검증해 보았다. 먼저, MARC의 경우를 살펴보았다. MARC는 실험에서 구해낸 strain-stress data를 ‘experimental curve fitting’ 방법으로 변형률-에너지밀도 함수 계수를 구해낸다. 사용되는 변형률-에너지밀도 함수는 Mooney-Rivlin 1, 2, 3, 4, 5계수, Ogden 1~10계수 등이 있다. 본 연구에서는 Treloar 실험치를 MARC에 대입하여 Mooney-Rivlin 5계수를 구하였다. 그 때, 사용된 변형률-에너지밀도 함수는 식 (14)와 같다.

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{11}(I_1 - 3) + (I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 \quad (14)$$

이상의 결과를 정리하면 Table 4와 같이 나타난다. 나타낸 값은 각 실험에서 이론 변형률-에너지밀도와 실험 변형률-에너지밀도의 차이의 총합 (MJ/m^3)이다. Table 4를 통해서 연속적 확대 유전기법을 이용한 고무물성계수 산출 알고리즘의 정확성과 유용성을 확인할 수 있다.

Table 3 Mooney-Rivlin coefficients obtained by MARC and SZGA

	MARC	SZGA
C_{10}	0.178946	0.187817
C_{01}	0.00890149	0.00807456
C_{11}	-0.000127168	-0.0000989452
C_{20}	-0.00159343	-0.00213859
C_{30}	4.20330×10^{-5}	4.81545×10^{-5}

Table 4 Total errors between theoretical and experimental strain energy density (MARC / SZGA)

	MARC	SZGA
Simple extension	1.452614	1.089074
Pure shear	0.448361	0.252084
Equibiaxial extension	0.293923	0.136744
Total	2.194898	1.477902

다음은 ABAQUS 경우로서 사용되는 변형률에너지밀도함수는 식 (15)와 같다.

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) + C_{02}(I_2 - 3)^2 \quad (15)$$

ABAQUS와 연속적 확대 유전기법으로 구한 Mooney-Rivlin 5계수를 식 (15)에 대입하여 구한 이론 변형률에너지밀도와 실험 변형률에너지밀도의 차이의 총합(S)을 각 실험별로 Table 5에 정리하였다. Table 4와 차이를 나타내는 것은 사용된 변형률에너지밀도함수의 차이 때문이다.

Table 5 Total errors between theoretical and experimental strain energy density (ABAQUS / SZGA)

	ABAQUS	SZGA
Simple extension	2.610558	2.460639
Pure shear	1.808258	0.621286
Equibiaxial extension	0.720785	0.315140
Total	5.139601	3.397065

5. 결론

현대사회에서 기기등의 진동, 충격 전달을 방지 또는 완충하는 목적으로 많이 사용되고 있는 고무 유사재료(rubber-like material)는 컴퓨터의 대형화, 고속화와 관련 구조해석 프로그램의 눈부신 발전으로 FEM을 이용하여 고무제품의 특성을 예측하고 있다.

이에, 보다 나은 결과를 산출하기 위해 고무제품의 물성계수를 정확하게 구해야 한다. 그러나, 고무재료는 배합성분이 조금만 달라져도 그 성질이 확연하게 달라지므로, 보다 정확한 고무물성계수를 산출하기 위해서 제품과 동일한 배합성분을 가진 시편을 이용해서 구한 실험 data값으로 고무특성을 나타내는 변형률에너지밀도함수의 계수를 구해낸다. 본 연구에서는

1) 이론 변형률에너지밀도와 실험 변형률에너지밀도의 차이를 최소화하기 위해서 연속적 확대 유전기법을 사용하였다. 본 방법은 도함수의 개념을 사용하지 않기 때문에 구배법(gradient method) 보다 방향성 있고 확률적인 탐색을 수행할 수 있다. 또한, 다봉해(multimodal solution)를

가지는 문제를 풀 때 있을 수 있는 조기수렴의 위험이 없기 때문에 기존의 유전알고리즘기법 보다 전역 최적해 탐색에 효율적이다.

2) 최소자승법을 사용하면 이론적 미분과정과 다차원연립방정식을 거쳐야 하기 때문에 해를 도출하는 과정이 복잡하고 계산도중 오차가 발생할 수도 있다. 또한, 다차원연립방정식을 풀기 위해서 사용되는 가우스소거법에서 행렬의 차수가 높아짐에 따라 ill-condition에 의한 오차가 발생할 수 있다. 변형률에너지밀도함수가 변할 때마다 복잡한 풀이과정을 되풀이해야 하는 번거로움이 있고, 특정실험결과의 오차를 줄이기 위해서 가중함수의 도입과정이 복잡하다. 이에 반해, 연속적 확대 유전기법을 이용한 고무물성계수 산출방법은 실험에서 구한 extension ratio와 그때의 실험 변형률에너지밀도를 이용하면 Mooney-Rivlin계수를 정확하게 구할 수 있다. 연속적 확대 유전기법에서는 가중함수의 도입이 용이해서 특정실험의 이론 변형률에너지밀도와 실험 변형률에너지밀도의 오차의 총합을 줄일 수 있다. 또한, 목적함수로 사용되는 변형률에너지밀도함수를 바꾸면 다양한 종류의 변형률에너지밀도함수의 계수를 손쉽게 구할 수 있다.

3) 현재 고무해석에 많이 사용되고 있는 상용패키지에서 채택한 'experimental curve fitting'과의 결과비교를 통해서 실험 변형률에너지밀도에 좀 더 근접한 결과값을 산출함을 확인하였다. 또한, 각 상용패키지마다 채택하고 있는 변형률에너지밀도함수가 달라 서로간의 호환성이 없는 반면에 연속적 확대 유전기법은 다양한 변형률에너지밀도함수에 적용할 수 있으므로 호환성 또한 우수하다.

이상과 같이 연속적 확대 유전기법을 이용한 고무물성계수 산출이론은 앞으로의 고무해석시 보다 정확한 해석을 위해서 사용될 수 있으며, 고가의 상용패키지를 사용하지 않고도 더 정확한 변형률에너지밀도함수의 계수를 구할 수 있었다.

후 기

본 연구는 국방과학연구소 연구 지원비에 의하여

수행되었습니다.

References

- 1) W.-D. Kim, "FEA for rubber components design," Journal of the KSME, Vol.38, No.12, pp.42-48, 1998.
- 2) Y.-D. Kwon, K.-T Roh, C.-S. Ri and S.-P. Hong, "A Study on the Convergency of the Finite Element Analysis of Rubber Using Numerical Differentiation Method," Transactions of KSAE, Vol.7, No.5, pp.141-153, 1999.
- 3) A. G. James, A. Green and G. M. Simpson, "Strain Energy Functions of Rubber I. Characterization of Gum Vulcanizates," Journal of Applied Polymer Science, Vol.19, pp.2033-2058, 1975.
- 4) D. W. Haines and W. D. Wilson, "Strain Energy Density Function for Rubberlike Materials," Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol.27, pp.345-360, 1979.
- 5) Y. D. Kwon, S. B. Kwon, S. B. Jin and J. Y. Kim, "Convergence Enhanced Genetic Algorithm with Successive Zooming Method for Solving Continuous Optimization Problems," Computers and Structures, Vol.81, pp.1715-1725, 2003.
- 6) MARC Manual Version K7, Theory and User Information, User Subroutines and Special Routine, MSC/SOFTWARE, 1997.
- 7) PATRAN Manual Version 2000, Reference Manual Vol. 1, 2, 3, MSC/SOFTWARE, 2000.
- 8) ABAQUS Manual Version 6.3, "ABAQUS/CAE User's Manual, Habbitt, Karlsson & Sorensen, Inc, 2002.
- 9) G.-G. Jin, Genetic Algorithms and Their Applications, Kyowoosa, Seoul, 2000.
- 10) K. Krishnakumar, "Micro-genetic Algorithms for Stationary and Non-stationary Function Optimization," SPIE, Intelligent Control and Adaptive Systems, Vol.1196, pp.289-296, 1989.
- 11) D. L. Carroll, "Genetic Algorithms and Optimizing Chemical Oxygen-Iodine Lasers," Developments in Theoretical and Applied Mechanics, Vol.18, pp.411-424, 1996.
- 12) S. J. Shin, T. S. Lee and S. I. Oh, "Three-dimensional Finite Element Analysis of Rubber Pad Deformation - Part I : Development of Implicit and Explicit Methods," Transaction of KSME, Vol.22, No.1, pp.111-120, 1998.
- 13) A. N. Gent, Engineering with Rubber: How to Design Rubber Components, Hanser, Oxford Univ. Press, New York, 1992.
- 14) D. F. Jones and L.R.G. Treloar, "The Properties of Rubber in Pure Homogeneous Strain," J. Phys. D: Appl. Phys., Vol.8, pp.1285-1304, 1975.
- 15) Y.-D. Kwon, H.-W. Kwon, S.-M. Shin and C.-B. Lee, "Finite Element Analyses of Cylinder Problems Using Pseudo-General Plane Strain Elements(Planar Constraint)," Journal of Ocean Engineering and Technology, Vol.17, No.5, pp.66-75, 2003.
- 16) S. S. Kuo, Computer Applications of Numerical Methods, Addison-Wesley, Reading, MA, 1972.