확률의 상관 빈도이론과 포퍼*[1)]

송하석 (아주대학교)

【요약문】 이 글의 목적은 포퍼의 초기의 확률론, 즉 ≪탐구의 논리≫에서 제시된 상관 빈도 이론에 대해서 살펴보고 평가하는 것이다. 이를 위해서 우선 빈도 이론을 가장 체계적으로 제시한 폰 미제스의 빈도 이론에 대해서 자세하게 논의한다. 빈도 이론에 대한 일반적인 비판은 유한한 경험적 집산이 어떻게 무한 계열인 수학적 집산으로 표상되는가와 무작위성의 공리가 어떻게 수학적으로 정식화하는가의 문제이다. 폰 미제스는 이러한 비판에 답하면서 빈도이론을 발전시켜나간다. 그러나 그의 빈도 이론에는 무작위성의 공리와 수렴성의 공리가 양립가능하지 않은 것처럼 보인다는 문제가 있다. 객관주의 확률론의 옹호자로서 포퍼는 이와 같은 문제가 해결된 빈도 이론을 제시하고자 했다. 포퍼는 대담하게 수렴성의 공리를 완전히 포기하고 무작위성의 공리를 개선함으로써 이 문제를 해결할 수 있다고 주장한다. 그는 서수선택과 이웃선택이라는 위치선택 개념을 통해서 무작위성의 공리를 보다 약화된 조건으로 수정하고 그 공리로부터 베르누이의 정리를 연역해 냄으로써 수렴성의 공리가 불필요함을 보인다. 결국 포퍼는 폰 미제스의 빈도이론의 치명적인 문제라고 여겨졌던 두 공리 사이의 비일관성 문제를 해결했다고 할 수 있다. 그럼에도 불구하고 포퍼의 수정된 빈도이론은 빈도이론의 기초가 된다고 생각되는 수렴성의 공리를 포기하는 반직관적인 이론이라는 비판을 피할 길이 없어 보이고, 그런 이유 때문에 포퍼의 빈도이론은 별로 주목을 받지 못한 것이다. 보다 직관적으로 설득력 있는 빈도 이론은 무작위성의 공리를 수렴성 공리와 일관성을 갖도록 정식화하여 제시하는 이론이다.

【주제어】 집산, 폰 미제스, 안정성 법칙, 도박체계의 배제 원리, 수렴성의 공리, 무작위성의 공리

---

* 이 논문은 2003년 한국 학술 진흥재단의 지원에 의해서 연구되었음 (2003-074-AS0017).

1) 이 논문의 초고는 확률론 연구팀의 2004년 5월 모임과 한국 과학철학회 2004년 6월 모임에서 발표되었다. 확률론 연구팀 모임에서 토론에 참여해주신 이초식, 이영의, 이상원, 여영서 선생님께 감사드리고, 특별히 과학철학회 발표에서 논평을 맡아 유익한 논평을 해주신 진성배 교수님과 토론에 참여해주신 많은 선생님들께 감사를 드린다. 또한 사소한 실수 하나까지 꼼꼼하게 읽고 심사를 해주신 두 분의 익명의 심사위원께도 감사를 드린다.

1. 들어가는 말

확률의 상관 빈도이론은 확률에 관한 명제들을 물리적 대상의 속성들이 나타나는 상관 빈도(relative frequency)를 기술하는 것으로 해석한다. 상관 빈도이론은 벤(J. Venn)에 의해 처음으로 정식화되었고, 폰 미세스(R. von Mises)와 라이헨바흐(H. Reichenbach)가 발전시켰다. 그리고 현대의 대표적인 빈도론자는 브레이스웨이트(R. B. Braithwaite)와 새먼(W. Salmon) 등이다.

확률에 대한 빈도이론의 사상적 배경은 대륙의 합리주의 철학의 영향 아래 라플라스(M. de Laplace)를 중심으로 전개된 고전적 확률이론에 대한 영국의 경험주의 철학의 반성으로 등장했다고 할 수 있다. 빈도이론은 19세기 중엽, 영국의 엘리스(R. Elis)와 벤이 이끄는 케임브리지 학파에 의해 처음 전개되었고, 20세기에 들어와서는 폰 미제스가 이를 계승 발전시켰다. 폰 미제스에 의하면 확률론은 기하학이나 이론물리학과 동일한 정도의 엄밀함을 요구하는 수준의 수리과학(mathematical science)이다. 다시 말해서 기하학이 공간현상에 대해서 연구하는 수리과학인 것처럼, 확률론은 집단현상(mass phenomena)과 반복적 사건(repetitive events)에 대해서 연구하는 수리과학이라는 것이다.

빈도이론은 우선 통계적 확률의 명제들을 분석함으로써 시작된다. 즉 'B가 될 A 의 확률은 p다'라는 형식의 명제는 단순통계적 확률(simple statistical probability)인 실제적 비율과 상관 빈도에 관한 명제로 분석되거나, 복합통계적 확률(complex statistical probability)인 가설적 비율에 관한 명제로 분석될 수 있다. 예를 들어, 정상적으로 섞여있는 트럼프 중에서 한 장을 뽑아서 다이아몬드가 나올 확률이 1/4이라고 할 때, 이는 특정한 대상의 성질을 지적하는 것이 아니라, 트럼프 전체 속에 들어 있는 다이아몬드 카드의 비율을 말하거나, 실제로 관찰된 n개의 카드 중에서 다이아몬드의 비율이 1/4이라는 뜻이다. 따라서 이와 같은 단순통계적 확률은 어떤 사건을 경험적으로 기술하고 있기 때문에, 그 진위 역시 경험에 의해 검증될 수 있다.

그러나 '동전을 던져 앞면이 나올 확률이 1/2이다'라고 할 경우는 어떤가? 동전을 몇 번 던졌을 때 앞면이 나올 확률이 1/2이란 말인가? 빈도이론에 의하면 동전을 던진 횟수를 n이라고 하고 앞면이 나온 동전의 횟수를 r이라고 했을 때, 그 상관빈도의 극한값이 1/2이라는 뜻이다. 좀더 정확히 표현한다면 0이 아닌 임의의 작은 수 δ에 대해서, $p + \delta > r/n > p - \delta$ 이라는 말이다. 여기에서 '동전을 무한히 많이 던진다면'이라는 가정을 하고 있는데, 이처럼 가설적 비율을 논하는 복합통계적 확률은 분명히 객관적 사실을 기술하려고 하지만, 그것의 진위는 결코 경험에 의해 검증되거나 반증되지 않는다.

빈도이론은 관찰을 기반으로 하는 경험주의와 사건의 객관적 속성을 전제로 하는 객관주의를 표방하지만 몇 가지 난점을 지닌다. 우선 극한 빈도이론은 가능한 관찰의 무한집합을 기반으로 해서 확률을 정의하고 있는데, 이렇게 무한수의 사례를 전제로 하고 있다는 점에서 관찰이 불가능하고, 따라서 빈도이론이 근거로 하는 경험론적 논거를 찾기 어렵다는 비판이 있다. 뿐만 아니라 빈도이론을 주장하는 사람들은 물리적 세계의 확률과 관찰 가능한 상관 빈도와의 관계를 명확히 해결하지 못하고 있다. 그리하여 귀납추리의 결론이 지니는 확률의 의미는 빈도이론으로 설명될 수 없다는 비판이 제기된다.

확률의 상관 빈도 이론에 대한 또 다른 비판은 이미 암시된 바와 같이 확률이 경험에 의해 검증되지도 반증되지도 않는 경우가 있다는 것이다. 정상적인 주사위를 던지는 경우, 각각의 눈이 나오는 확률이 1/6이라고 가정한다. 그 주사위를 열 번 던져 보았더니 6이 일곱 번 나왔고 세 번은 다른 수가 나왔다면, 이러한 관찰은 분명히 우리가 본래 가졌던 믿음을 의심하게 만들 것이다. 즉, 그 주사위가 6이 나오기 쉽게 되어 있는 비정상적인 주사위가 아닌가 하는 생각을 하게 되어, 그 주사위가 정상적이라는 가설이 잘못된 것이라는 생각을 가질 수 있게 된다. 그러나 그렇다고 해서 그 주사위가 정상이라는 가설이 반증되었다고 할 수는 없다. 왜냐하면 그러한 확률명제는 원리상 결정불가능한 것이기 때문이다.

이러한 비판에 응답하면서 상관 빈도 이론은 지속적으로 발전되어 왔고, 그 발전에 가장 중요한 기여자는 바로 폰 미제스이다. 그리하여 이 글은 폰 미제스가 발전시킨 상관빈도 이론의 성과를 평가해보기 위해서 그의 이론을 살펴보는 것으로 시작할 것이다. 그리고 폰 미제스가 제안하고 라이헨바하 등에 의해서 발전된 확률의 빈도이론이 갖는 문제와 관련하여 포퍼(K. Popper)가 수정, 발전시킨 이론이 얼마나 성공적인가를 살펴보는 것이 이 글의 주된 목표 중의 하나이다. 이를 위해서 먼저 폰 미제스에 의해서 제시된 상관 빈도 이론에 대해서 살펴보고(2절), 이에 대한 문제점을 해결하기 위해서 포퍼가 수정하여 제안한 상관빈도 이론에 대해서 논할 것이다(3절).

2. 폰 미제스의 상관 빈도 이론

카르납 등으로 대표되는 확률에 대한 논리적 이론은 확률을 일종의 논리학으로, 즉 연역 논리학을 귀납 논리학으로 확장하는 것으로 보는 반면, 확률에 대한 주관주의 이론은 확률을 개인의 믿음의 정도로 해석한다. 그러나 이들과 달리 확률에 대한 상관 빈도이론은 확률을 다양한 범위의 관찰 가능한 현상을 다루는 일종의 수리과학으로 간주한다. 폰 미제스는 상관 빈도이론을 확률에 관한 "기하학이나 이론 역학과 같은 체계를 지닌 학문"이라고 말하고, "기하학의 주요한 문제가 공간 현상에 대한 탐구인 것처럼, 확률론은 집단 현상이나 반복적인 사건을 다루는 학문"이라고 말한다.[2] 확률이란 집단적 현상이나 반복적인 사건에 관한 학문이라고 말함으로써 확률이 집합체(collections)에 관한 것이라고 주장하는 것은 확률에 관한 상관 빈도이론을 다른 이론, 특별히 주관주의 이론과 구별할

2) R. von Mises (1957) vii.

수 있게 하는 중요한 특징이 된다. 즉 주관주의 이론에 따르면, 개개인은 구체적이고 개별적인 사건에 대해서 주관적인 확률값을 할당할 수 있는 반면, 상관 빈도이론에 따르면, 확률은 그 확률값의 평가자와는 독립된 객관적인 것이고, 사건들의 집합이나 사건이 갖는 집단적인 성질과만 관계한다.

폰 미제스가 제시한 반복적인 사건이나 집단 현상에 대한 많은 예들은 세 가지 종류로 대별될 수 있다. 첫째는 동전 던지기와 같은 우연적인(chance-like) 게임이고, 둘째는 특정한 지역에서 재배되는 식물의 집합과 같은 생물학적 통계이며, 셋째는 특정한 기체 표본의 분자들의 집합과 같은 물리학적 상황이다. 그런데 이러한 반복적 사건이나 집단 현상의 집합을 구성하는 요소들에는 모두 특정한 속성(attribute)이 나타난다. 예컨대 동전 던지기의 경우는 각각 '앞면' 또는 '뒷면'이라는 속성이 나타나고, 특정 지역에서 재배되는 식물들 하나하나는 '특정한 수의 낟알을 가짐'이라는 속성이 나타나며, 특정한 기체 표본의 분자들은 각각 '특정한 속도를 가짐'이라는 속성이 나타난다.

폰 미제스는 이러한 속성이 드러나는 반복적인 사건이나 집단 현상의 집합을 기술하기 위해서 "집산(collective)"이라는 개념을 도입한다. 집산이란 "색깔이나, 수 등과 같은 관찰 가능한 속성에 의해서 구별되는 균일한(uniform) 사건이나 시행의 연쇄를 가리킨다."[3] 그는 집산을 경험적 집산과 수학적 집산 개념으로 구별한다. 경험적 집산이란 특정한 장소에서 특정한 시각에 행해진 동전 던지기처럼 실제 세계에서 발생한 사건들의 집합이고, 그렇기 때문에 경험적 집산은 유한한 요소로 구성된다. 반면에 수학적 집산은 무한한 요소들의 연쇄로 구성된다. 여기서 자연스럽게 유한한 경험적 집산과 무한한 수학적 집산 사이의 관계에 대한 문제가 제기된다.

폰 미제스는 유한한 경험적 집산이 수학적 이론에서 무한한 수학적 집산으로 표상된다고 설명한다. 그런데 이러한 표상은 과연 정

3) R. von Mises (1957), p. 12.

당한 것인가? 그는 확률론은 역학과 같은 수리과학이고, 역학에서 무한에 의한 유한의 표상이 일반적으로 받아들여진다는 점에서 그러한 표상은 정당한 것으로 받아들여져야 한다고 주장한다. 그는 무한 연쇄나 무한하게 가는 직선 등은 경험적 실재에 대한 수학적 추상화(abstraction)이며, 실재(reality)에 대한 수학적 표상을 의미있게 하기 위해서는 그러한 추상화가 필연적이라고 주장한다. 폰 미제스의 이러한 설명은 수리과학으로서 확률론이 어떻게 동전 던지기와 같은 경험적 사실과 관련될 수 있는가를 설명해주는 중요한 부분이다.

경험론자로서 폰 미제스는 관찰 가능한 현상들, 즉 경험적 집산으로 자신의 이론을 시작한다. 그는 먼저 관찰을 토대로 관찰되고 있는 현상이 따르는 경험적 법칙을 수립한다. 한편 경험적 집산을 다루기 위해서, 추상화 과정을 통해서 수학적 집산과 같은 수학적 개념을 얻어 내야 한다. 그는 관찰을 토대로 얻어낸 경험적 법칙을 추상화함으로써 수학적 집산이 전제해야 할 수학적 공리를 얻어낸다. 이렇게 일단 수학적 체계가 수립되면, 그것으로부터 논리적으로 귀결되는 것을 연역해낼 수 있고, 이를 통해서 보다 많은 앞으로의 현상을 예측하고 설명할 수 있게 된다는 것이다. 이러한 폰 미제스의 전략을 길리스(D. Gillies)는 다음과 같은 도식으로 명료하게 설명하고 있다.[4]

```
 관찰 현상     --------추상화 -----------> 수학적 개념
(경험적 집산)                              (수학적 집산)

경험적 법칙 ----------추상화 ------------> 수학적 공리
                                              |
                                              | 연역
                                              ↓
앞으로 관찰가능한 현상 <----설명, 예측-------- 귀결
```

4) D. Gillies (2000), p. 91.

폰 미제스는 경험적 집산에 대해서 성립하는 두 개의 경험 법칙을 제시한다. 첫째는 그가 확률 이론의 일차적 현상(primary phenomenon)이라고 지적한 통계적 빈도의 안정성이 증가하는 것과 관련된 것이다. 이를 현대 논리학자들은 통계적 빈도의 안정성 법칙(Law of Stability of Statistical Frequencies)이라고 부른다. A를 어떤 집산과 관련된 임의의 속성이라고 하고, Ω가 그 집산의 전체 속성 집합이라고 한다면, $A \subseteq \Omega$일 것이다. 그 집산의 처음 n개 중에서 A가 발생하는 경우가 m번이라고 하면, A의 상관빈도는 m(A)/n이 된다. 여기서 안정성 법칙이 말하는 것은 n이 증가함에 따라 m(A)/n은 어떤 고정된 값에 점점 가까워진다는 것이다.

그러나 폰 미제스는 안정성의 법칙을 보다 정확하게 다음과 같이 말한다.

> [동전 던지기에서] 앞면이 나올 상관 빈도가 소수 첫째 자리까지 정확하게 계산된다면, 이 첫 번째 근사값에서 안정성(constancy)에 도달하는 것은 어렵지 않을 것이다. 사실 약 500번의 게임에서 이 첫 번째 근사값은 0.5에 도달할 것이고, 그 이후 변화가 없을 것이다. 소수 둘째 자리까지 계산된 두 번째 근사값에 대한 고정된 값에 도달하기까지는 더 많은 시간이 필요할 것이다. ... 아마 두 번째 값이 변하지 않고 상관 빈도가 불변적으로 0.50으로 유지되기 위해서는 10,000번 이상의 시행이 필요할 것이다.[5]

여기서 폰 미제스는 안정성의 법칙을 아무런 이론적, 수학적 고찰 없이 관찰에 의해서 얻어지는 경험적 결과라고 말하고 있는 것 같다. 그러므로 "약 500번의 게임에서 이 첫 번째 근사값은 0.5에 도달할 것이고 이후에 변화가 없을 것"이라는 그의 주장을 확인하기 위해서, 우리는 다음과 같은 실험을 해야 할 것이다. 즉 동전을 1,000번 던지고, 500번 이상의 시행에서는 앞면이 나올 상관빈도는 소수 첫째 자리에서 5가 됨, 즉 상관빈도는 0.5가 됨을 확인할 수 있어야 한다. 마찬가지로 "아마 두 번째 값이 변하지 않고 상관 빈

5) R. von Mises (1957), p. 14.

도가 불변적으로 0.50으로 유지되기 위해서는 10,000번 이상의 시행이 필요할 것"이라는 그의 주장을 확인하기 위해서는 11,000번 정도의 동전 던지기를 시행하고 10,000 이후의 상관빈도가 0.50이 됨을 확인해야 할 것이다.

앞면이 나올 확률의 1/2인 정상적인 동전을 n번 던져서 앞면이 m번 나왔다고 하자. 수학의 법칙은 m/n은 정상적으로 분산되고 (normally distributed), 정상 분포표에 의해서 다음 식은 95% 정도의 확률을 갖는다.

$$|m/n - 1/2| \leq 0.98/\sqrt{n}$$

즉 수학의 법칙은 동전을 500번 던지면 m/n은 0.456에서 0.544 사이에서 값을 갖고, 또 1,000번 던지면 0.4902에서 0.5098 사이에서 값을 가질 것임을 보여준다. 다시 말해서 500번의 시행은 폰 미제스가 기대한 것처럼 소수 첫째 자리가 5에 근사적으로 도달하지만, 10,000번의 시행에서 소수 둘째 자리는 0에 도달하지 않을 것임을 보여준다. 이러한 수학적 연산은 이론과 관찰 사이에 존재하는 관계가 폰 미제스가 주장한 것과 다를 수 있음을 보여주고 있는 것이다. 그의 주장에 따르면, 경험법칙은 관찰에 의해서 얻어지고, 그에 대응하는 수학적 공리는 경험적 법칙을 추상함으로써 얻어진다. 그러나 대체적인(rough) 경험 법칙은 관찰로부터 직접적으로 얻어질 수 있겠지만, 보다 정확한 법칙을 얻기 위해서 때로는 관찰을 잠정적으로 포기해야 하는 경우가 있는 것 같다. 수학적 연산은 경험법칙에 대한 보다 정확한 정식을 제공해주고, 수학적 연산의 결과는 관찰을 통해서 확인될 수 있다. 즉 정확한 수학의 법칙에 따른 연산은 500번의 시행 후에 소수 첫째 자리에서 빈도값은 불변으로 유지되고, 일반적으로 그 빈도값은 $1/\sqrt{n}$의 비율로 극한에 수렴하는 경향이 있음을 보여준다. 그리고 이 결과는 계속적인 시행을 관찰함으로써 확인할 수 있다. 결론적으로 말해서, 폰 미제스가 생각했던 것과 달리 관찰과 법칙 사이에는 양방향적 관계가 있는 것이다.

이제 폰 미제스의 두 번째 경험법칙에 대해서 살펴보자. 첫 번째 법칙이 폰 미제스 이전에도 널리 알려져 있는 것과 달리 두 번째 법칙은 전적으로 그가 독창적으로 제안한 것이다. 그는 길거리에 인위적으로 배열된 돌들의 경우를 생각해 보라고 제안한다.[6] 즉 어떤 도로변에 매 1마일마다 큰 돌들이 있고, 매 1/10 마일마다 작은 돌이 배열되어 있다고 하자. 이러한 돌들의 집합에서 큰 돌이 나타날 상관빈도는 1/10이고 작은 돌이 나타날 상관빈도는 9/10이기 때문에 이 돌들의 집합은 안정성의 법칙을 만족시킨다. 그러나 폰 미제스는 이 경우에 그 결과가 완전히 결정되어 있기 때문에, 즉 다음에 어떤 속성-작은 돌인지, 큰 돌인지-이 나타날 것인지 완전히 결정되었기 때문에 이것은 집산이 아니라고 주장한다. 그는 진정한 의미에서의 경험적 집산은 무질서해야 한다, 즉 무작위적(random)이어야 한다고 말한다. 그리고 그는 이러한 집산의 무작위적 성질을 상관빈도로 정의되는 확률값을 높이거나 낮출 수 있는 어떤 체계도 존재하지 않는다는 것과 관련시킨다. 예컨대 주사위 던지기 게임에서 어떤 전략을 세워도 그리고 지금까지 어떤 경험적 결과가 있었다고 할지라도 그 상관빈도는 변하지 않는다는 것이다. 결국 상관빈도는 특정한 값으로 수렴하는 안정성을 가질 뿐만 아니라 우리가 어떤 전략이나 규칙을 선택한다고 할지라도 그 값은 동일하게 유지된다는 것이다. 포퍼를 비롯한 많은 논리학자들은 이를 도박 체계의 배제 원리(principle of excluded gambling system)라고 부른다.

이제 길리스가 설명한 것처럼 확률에 관한 경험법칙들을 추상화하여 수학적 공리로 만들어 보자. 첫 번째 법칙인 빈도의 안정성의 법칙을 추상하여 얻어진 공리를 수렴성의 공리(axiom of convergence)라고 한다. 이 공리는 다음과 같이 표현된다:

어떤 집산 C의 임의 속성 A에 대해서 $\lim_{n\to\infty} m(A)/n$의 값이 존재한다.

---

6) R. von Mises (1957), p. 23.

수렴성의 공리는 어떤 집산 C의 임의의 속성 A에 대한 극한빈도에 의한 확률의 정의이다. 이 정의는 모든 확률을 조건적으로 해석한다는 점이 특징인데, 이 점은 상관빈도 이론과 논리적 이론 사이의 중요한 공통점 중 하나이다. 그러나 논리적 이론에서 어떤 가설의 확률은 항상 일련의 증거에 대하여 조건적이지만, 상관 빈도이론에서 확률이 조건적이라는 것은 어떤 특정한 집산에 속하는 특정한 속성이 그 집산에 대하여 조건적이라는 것이다. 확률에 관한 논리적 이론과 상관 빈도이론은 모두 객관주의적 확률 이론으로 분류되는 것이 보통이다. 그러나 논리적 이론은 확률이 경험적 증거에 대한 인간의 지식과 관련된다는 점에서 분명하게 객관주의적인지 의심스럽다. 그러나 상관빈도 이론은 확률을 객관적인 세계의 성질과 관련시킨다는 점에서 분명히 객관주의적이다.[7]

이러한 확률 해석에 대한 가장 일반적인 비판은 확률의 개념을 지나치게 좁게 해석한다는 것이다. 즉 극한 빈도에 의한 확률 해석에 따르면, 단일한 사건(single event)처럼 경험적 집산을 구성할 수 없는 경우에 대해서는 확률 개념을 적용할 수 없게 된다. 그러나 폰 미제스는 "우리의 확률 이론은 '독일이 미래의 어떤 시점에 라이베리아와 전쟁을 하게 될 확률이 있는가?'와 같은 문제와 아무런 관련이 없다"[8]고 말하면서, 균일한(uniform) 사건의 집합이 있는 경우에 수학적인 의미에서 확률 개념을 사용할 수 있다고 주장한다. 그런 뜻에서 그의 확률 해석을 특징짓는 유명한 슬로건은 바로 "집산 먼저, 그리고 확률(First the collective, then the probability)"이다.[9] 결국 그는 개별 사건에 대한 확률에 대한 논의를 포기하고 집산에서의 확률만을 다루고 있는 것이다.

---

7) 길리스는 이런 점을 지적하기 위해서 확률 이론을 인식론적 해석(epistemological interpretation)과 객관주의적 해석(objective interpretation)으로 나누고 논리적 이론, 주관주의 이론을 전자에 상관빈도 이론과 포퍼의 성향이론을 후자로 분류한다. D. Gillies (2000), p. 2와 그리고 7장 참조.

8) R. von Mises (1957), p. 9.

9) R. von Mises (1957), p. 18.

폰 미제스는 우리가 불명확하고 부정확한 용어를 가지고 사유를 시작할 수 있지만, 과학적인 이론을 구성하기 위해서는 보다 엄밀하고 정확한 용어를 가져야만 한다고 주장하면서, 이러한 정확한 용어는 명료한 정의(explicit definition)에 의해서 규정되어야 한다고 주장한다. 그의 주장에 따르면, '일(work)'이라는 용어가 일상적으로 널리 그리고 다양하게 사용되지만, 물리학에서는 일이란 힘과 거리의 곱이라는 대단히 엄밀하고 명료한 정의를 가지고 사용되는 것처럼, '확률'이라는 단어도 일상적으로 다양하게 사용되지만 과학적인 목적을 위해서는 엄밀하고 명료한 정의를 통해서 규정되어야 한다. 폰 미제스는 바로 확률에 관한 엄밀한 정의는 수렴성의 공리가 말하는 바, 극한 빈도 개념에 의해서 주어진다고 주장하는 것이다.

그러나 어떤 과학의 모든 개념이 다 명료하게 정의될 수는 없다. 만약 모든 개념을 명료하게 정의하려고 한다면, 우리는 무한 역행에 빠지거나 악순환에 빠지게 될 것이다.[10] 아마 폰 미제스도 이러한 문제를 인식했던 것 같다. 그는 확률 이론이 어떤 측면에서 수리과학이지만 동시에 경험적 대상을 다루는 경험과학이기 때문에, 기본이 되는 개념에 대해서 관찰가능한 것을 통해서 조작적 정의가 주어져야 한다고 생각했던 것 같다. 그런 의미에서 그는 "수은주의 길이가 온도의 측정(measure)이듯이, 반복적 사건의 상관 빈도는 확률의 측정이다."고 말한다.[11] 즉 확률에 대한 극한 빈도에 의한 정의는 '확률'이라는 이론 용어를 '빈도'라는 관찰가능한 개념에 의해서 조작적 정의를 하고 있는 것이다.

그렇다면 이 조작적 정의는 만족스러운가? 두 개의 계열(sequence)이 n번 째 항까지에서 -n이 아무리 큰 수라고 할지라도- 값이 일치하지만 궁극적으로 다른 값에 수렴하는 경우를 생각할 수 있다. 예컨대 동전을 500번 던져서 앞면이 나온 빈도가 거의 1/2로 관찰되었다고 해도, 이 사실은 그 동전 던지기 시행으로 구성된 계

10) 이러한 비판은 H. Cramér, (1961) p. 150 참조.

11) R. von Mises (1957), viii.

열이 1/2과는 다른 극한값을 가질 수 없음을 보여주는 것은 아니다. 이것은 앞에서 언급한 적이 있는 유한 경험적 집산이 무한 계열인 수학적 집산으로 표상될 수 있는가라는 문제와 유사하다. 폰 미제스는 그런 방식으로 표상하는 것은 수리과학에서 흔히 나타나는 것이기 때문에, 문제될 것이 없다고 응답한다. 즉 확률론에서 나타나는 그런 방식의 표상을 문제 삼는 것은 확률론이 수리과학보다 더 엄밀해야 한다고 요구하는 것이고 이는 지나친 요구라는 것이다. 그리고 그는 다음과 같이 말한다.

무한 집산이라는 개념에 근거한 이론의 결과는 논리적으로 정의될 수 없지만, 그럼에도 불구하고 실제로(in practice) 충분히 정확한 방식으로 유한 계열의 관찰에 적용될 수 있다. 이 경우 이론과 관찰의 관계는 모든 다른 자연과학에서와 본질적으로 동일하다.[12)]

그러나 드 피네티(De Finetti)는 이에 대해서 확률론과 자연과학 사이에는 중요한 비유사성(disanalogy)가 있다고 비판한다.

내가 보기에 [폰 미제스의]의 유비는 착각이다. 다른 과학에서 우리는 어떤 이론이 완전하게 정확하다면 무슨 일이 발생할지 확실하게 주장하고 예측할 수 있는 이론을 갖는다. 확률의 연산에서는 우리는 모든 빈도의 가능성을 인정하지 않을 수 없는 이론을 갖는다. 다른 과학에서 불확실성은 실제로 이론과 사실 사이의 불완전한 관계로부터 나오지만, [확률론의] 경우에는 반대로 불확실성의 원천은 그러한 관계에 있는 것이 아니라, 이론 자체에 있다.[13)]

요컨대 이론이라는 추상적 개념과 경험적 실재 사이의 관계라는 점에서 확률론과 다른 수리과학 사이에는 중요한 비유사성이 존재하고, 따라서 폰 미제스의 확률에 대한 조작적 정의는 관찰과 이론

12) R. von Mises (1957), p. 85.

13) B. De Finetti (1937), p. 117.

을 적절하게 연결시켜주지 못한다는 비판은 여전히 설득력 있어 보인다.[14)]

그러나 폰 미제스의 확률 이론이 갖는 보다 큰 난점은 두 번째 경험법칙인 도박체계 배제의 원리와 관련되어 나타난다. 이제 도박체계 배제의 원리에 대한 수학적 추상화의 결과로 얻어지는 수학적 공리인 무작위성의 공리에 대해서 생각해 보자. 이 공리가 의미하는 것은 어떤 집산에서 임의의 속성의 극한 빈도는 본래의 계열에서 얻어진 하위 계열의 어떤 곳에서든지 동일하다는 것이다. 이 공리와 관련된 가장 큰 문제는 어떻게 이 공리를 수학적으로 정식화할 수 있는가이다. 먼저 초기에 폰 미제스가 고려했던 것처럼 보이는 소박한 정식화를 살펴보자.

전체 속성 집합이 Ω인 수학적 집산 C를 가정하자. C는 첫 번째 수학적 공리인 수렴성의 공리를 만족할 것이고 따라서 Ω에 속하는 임의의 속성 A에 대해서 C에서 A가 발생할 확률은 m(A)/n의 극한값(p)일 것이다. 이제 위치 선택(place selection) 또는 도박 체계(gambling system)를 C의 하위 계열인 C′을 선택하는 규칙이라고 정의하기로 하자. 그런데 어떤 위치 선택 혹은 도박 체계가 성공적인 경우는 C′에서의 m(A)/n의 극한값(p′)이 C에서의 극한값과 다른 경우이다.[15)] 이제 소박한 형태로 정식화된 무작위성의 공리는 다음과 같이 정의될 수 있을 것이다.

위치 선택에 의해서 원래의 계열 C로부터 얻어진 임의의 하위 계열 C′에서, m(A)/n은 C에서의 A가 나타날 원래의 극한값(p)에 수렴해야 한다.

---

14) 이는 확률의 상관빈도 이론을 받아들이면, 확률에 관한 명제는 반증될 수 없다는 것과 관련이 있을 것이다. 이 문제에 대해서는 필자의 또 다른 글 "포퍼의 성향적 확률론"에서 다루어질 것이다.

15) 여기서 p′은 p보다 크든 작든 상관이 없다. p′이 p보다 크다면 C′에서 A가 나타나는 것에 거는 것이 유리하고, p′이 p보다 작다면 C′에서 A가 나타나지 않는다는 것에 거는 것이 유리하기 때문이다.

무작위성의 공리와 관련된 즉각적인 비판은 가능한 위치 선택 중에서 극한값에 수렴하지 않는 계열을 구성할 수 있는 선택이 있을 수 있다는 것이다. 즉 C에서 A가 나타날 확률이 0보다 크고 1보다 작다면, 무한 계열인 수학적 집산 C에서 A는 무수히 많이 나타날 것이다. 그렇다면 우리는 속성 A만 나타나는 하위 계열 C′을 구성할 수 있고, 그 경우 C′에서 A가 나타날 극한값은 1이 될 것이며, 따라서 원래의 극한값 p에 수렴하지 않게 된다. 즉 가능한 여러 선택 중에는 특정한 속성의 빈도가 분명히 달라지는 선택이 있을 수 있다는 것이다. 결국 우리는 이러한 문제를 피하기 위해서 허용가능한 위치 선택의 범위를 제한하지 않을 수 없을 것이다. 그렇다면 그러한 제한은 어떻게 이루어질 수 있는가? 폰 미제스는 다음과 같은 규정을 할 수 있다고 제안한다: "원래 계열의 어떤 원소가 선택된 하위 계열에 속하는가의 문제는 대응하는 관찰의 결과와 독립적으로, 즉 이 결과에 대해서 어떤 것도 알려지기 전에 결정되어야 한다."[16] 다시 말해서 자신이 언급하는 선택은 시행의 결과에 독립적이고, 따라서 선택될 요소의 속성을 이용하지 않고 정의되는 것이라고 답한다. 우리가 실제적인 도박 상황을 염두에 둔다면 이러한 규정은 옳다. 그러나 우리는 경험적 집산과 관련된 실제적 과정에 관심을 가지고 있는 것이 아니라, 수학적 집산과 관련된 정의에 대해서 논의하고 있기 때문에 이러한 폰 미제스의 규정은 문제 해결에 도움이 되지 않는다.

그러나 폰 미제스의 이론에 대한 보다 심각한 비판은 무작위성의 공리와 수렴성의 공리 사이에 모순이 발생할 수 있다는 것이다. 캄케(E. Kamke)가 의심하듯이, 이러한 정의를 동시에 만족하는 집산들이 존재할 수 있는가의 문제가 제기된다는 것이다.[17] 폰 미제스에 따르면, 무작위성의 공리로부터 그 공리를 만족하는 어떤 집산

16) R. von Mises (1957), p. 25.

17) 캄케는 이런 이유 때문에 무작위성의 공리를 포기할 것을 제안한 것으로 알려졌다. 이에 대해서는 K. Popper(1959)의 p. 154 이하를 참조.

C에서 이항정식이 성립한다. 그러므로 A가 C의 임의의 속성이고 P(A/C)=p라면, C의 n 개의 원소 중에서 A가 m 번 나타날 확률은 $_nC_mp^m(1-p)^{n-m}$이다. 다시 말해서 무작위성은 독립성을 함축한다. 그러나 프라이(T. Fry)는 이 독립성이 수렴성의 공리와 모순이 된다고 주장한다.[18] 수렴성의 공리에 따르면 P(A/C)= $\lim_{n\to\infty}$ m(A)/n = p이다. 여기서 0보다 큰 임의의 작은 분수값 δ가 주어지면, p와 m(A)/n 사이의 차이가 δ보다 작게 되는 n을 생각해보자. n은 매우 큰 수일 것이고 실제로 베르누이의 정리에 따르면 n이 무한히 크면 그 차이는 항상 δ보다 작게 된다. 이제 그러한 모든 n보다 작은 수 N을 가정하자. 즉 N번째까지의 항에서는 |m(A)/n - p|가 δ보다 클 수 있다. 이제 그 계열에서 첫 N 개의 원소 다음에 나오는 유한한 r 개의 하위 계열(N+1, N+2, ... N+r 항)을 생각해 보자. 이항정식에 따르면, 이 하위계열의 원소들 각각에서 A가 나타날 확률(p^r)이 존재한다. 만약 우리가 그러한 일련의 시행을 충분히 길게 한다면 m(A)/n은 δ보다 큰 정도로 p로부터 벗어날 것이다. 즉 p에 수렴하지 않을 것이다. 따라서 수렴성의 공리의 요청과 달리, 임의의 N에 대해서 수렴하지 않는 유한한 확률이 존재하게 된다.

확률을 극한 빈도 개념으로 정의하고자 하는 폰 미제스의 이론은 결국 그가 제시한 두 공리를 어떻게 일관성 있는 정식으로 제시하는가가 가장 중요한 문제로 남은 셈이다. 이제 이러한 문제를 해결하기 위한 포퍼의 제안을 살펴보자.

3. 포퍼의 새로운 기획

이러한 문제에 대하여 대부분의 철학자들은 무작위성의 공리가 문제라고 생각하여 그 공리를 포기 혹은 수정할 것을 제안한다. 그

18) Fry, T, (1928), pp. 88-91. 이에 대한 자세한 논의는 D. Gillies (2000), 106쪽 참조.

러나 포퍼는 "무작위성의 공리 못지않게 수렴성의 공리가 문제"라고 생각하여 "무작위성의 공리를 개선하고 수렴성의 공리를 완전히 배제"함으로써 문제를 해결하고자 한다.[19]

포퍼는 서수 선택(ordinal selection)과 이웃 선택(neighbourhood selection)이라는 위치 선택 개념[20]을 통해서 무작위성의 공리를 보다 약화된 조건으로 수정하여 그 공리로부터 베르누이의 정리가 추론됨을 보이고자 한다. 그리고 그는 이 공리의 의미를 폰 미제스가 "한 집산(collective) 내에서의 빈도의 극한값들은 **어떤 종류의 체계적 선택에 대해서도** 둔감함(insensitive)"으로 해석하는 것과 달리, 포퍼는 "한 집산 내에서의 빈도의 극한값들은 **서수 선택과 이웃 선택 모두에 대해서** 둔감할 것이고, 그리고 또한 도박체계로 사용될 수 있는 **이 두 가지 선택방법의 모든 조합에 대해서도** 그럴 것이다."[21]라고 말한다. 이렇게 함으로써 우선 앞에서 언급된 무작위성의 공리에 대한 즉각적인 반론은 해소된다. 왜냐하면 서수선택과 이웃선택 혹은 그것들의 조합에 의한 선택은 어떤 C에서 특정한 속성 A가 나오는 경우만을 선택하는 것을 배제하게 될 것이기 때문이다.

이제 무작위성의 공리를 만족시키는 집산은 자기모순적이라는 비판을 생각해 보자. 이 비판은 무작위성의 공리를 만족하는 집산들의 집합이 공집합이 아님을 증명할 수 있는가의 문제이다. 특정한

---

19) Popper, K. (1959), p. 154. 박우석(1994), 209쪽,

20) 서수선택이란 어떤 준거집합 α의 계열에서 그 계열의 원소에 부여된 서수에 의존하는 속성 β에 따라 선택함으로써 이루어진다. 즉 β가 짝수라는 속성이라면 α로부터 그것의 서수가 짝수인 모든 원소들로 구성되는 계열을 구성하는 선택이다. 이웃선택이란 원소들을 번호가 부여된 계열 내에 배열할 때 특정한 이웃 관계들이 만들어진다는 사실에 의해서 가능해진다. 즉 어떤 원소의 바로 앞 원소가 속성 γ를 갖는 모든 원소들의 선택과 같은 것이 그것이다. (포퍼의 앞의 책, p. 159, 박우석의 앞의 책, 214-215쪽.)

21) Popper, K. (1959), p. 170. 박우석(1994), 231쪽. (강조는 필자가 한 것임).

집산의 예를 구성해서 그러한 집산이 존재한다는 것을 보이는 것은 적어도 가능한 것 같지 않다. 왜냐하면 특정한 조건을 만족시키는 무한 계열의 예는 수학적 규칙에 의해서만 줄 수 있는데, 폰 미제스의 정의에 따르면, 어떤 규칙이든지 하나의 도박체계로, 혹은 하나의 선택체계로 사용될 수 있기 때문에, 그의 의미에서 어떤 집산에 대해서도 정의상 그러한 규칙이 있을 수 없다.

또 이론 체계의 공리들은 그 체계의 정리들을 증명하기 위해서 충분조건일 뿐만 아니라 필요조건이기도 해야 한다. 그러나 폰 미제스의 무작위성의 공리는 확률론의 정리들을 증명하는 데 불필요함을 보일 수 있다는 반론이 있다. 왜냐하면 포퍼가 제시한 것처럼 서수선택과 이웃 선택의 특별한 배제만으로도 그러한 조건을 만족시킬 수 있기 때문이다. 어떤 계열이 임의로 선택된 선행자들의 n-쌍들에 따른 선택에 둔감해야 한다는 것, 다시 말해서 그것이 모든 n에 대한 사후효과(after-effects)로부터 n-자유여야 한다는 것을 요구하는 것으로 충분하다는 것이 포퍼의 주장이다.[22] 결국 포퍼는

22) 포퍼의 n-자유의 개념을 간단히 설명하기 위해서 다음과 같은 양자택일적인 계열 α를 생각해보자.

1100110011001100......

α에서 속성 0과 속성 1의 상관빈도는 1/2로 동일하다. α의 하위계열 α'를 다음과 같이 구성해보자; α'는 α의 원소 중 1에 직접 후속하는 이웃속성을 지닌 모든 항으로 구성된다.

1010101010.....

α'에서 속성 0과 속성 1의 상관빈도는 변하지 않는다. 이런 경우에 폰 미제스는 α는 α'을 구성하는 이웃선택에 대해서 둔감하다고 말한다. 이러한 둔감성을 포퍼는 α는 단일한 후속자들의 어떤 사후효과로부터도 자유롭다, 혹은 α는 1-자유라고 말한다. 이런 식으로 포퍼는 어떤 계열 α의 상관빈도가 단일한 후속자에 따른 이웃선택에 둔감하고 후속자들의 쌍에 따른 선택에 둔감하고, 후속하는 세 쌍들에 따른 선택에 둔감하고,,, 후속자들의 n-쌍들에 따른 선택에 둔감할 때, 그리고 오직 그럴 경우만 α는 n-자유라고 말한다. (Popper, K. (1959), p. 161-162. 박우석(1994), 219쪽.)

폰 미제스의 무작위성의 공리를 모든 n에 대한 n-자유라는 의미에서 절대적 자유라는 덜 엄격한 요건으로 대치하고, 이에 따라 우연적인 수학적 수열들을 이 요건을 충족하는 것으로 정의할 것을 주장한다. 이렇게 함으로써 우리는 절대적으로 자유로운 계열들을 구성하는 수학적 규칙을 제시할 수 있고, 따라서 이를 만족시키는 예들을 구성할 수 있게 된다.

요컨대 포퍼는 폰 미제스의 무작위성의 공리가 자기모순적인 것처럼 보이는 것은 그가 모든 도박 체계를 배제해야 한다는 불필요하게 강한 조건을 제시한 때문이라고 진단하고, 모든 체계가 아니라 특별한 종류의 이웃선택을 배제하는 것으로 충분하다고 주장하고 있는 것이다.

그리고 포퍼는 자신이 수정하여 제안한 무작위성의 공리와 수렴성의 공리 사이에 모순이 발생하지 않음을 보이기 위해서, 무작위성의 공리로부터 베르누이의 정리가 도출될 수 있다는 것을 증명한다.

어떤 사건계열, 혹은 속성 계열들이 우연적(chance-like), 혹은 무작위적이라 함은 그 계열의 일차적 속성들의 빈도의 극한값이 절대적으로 자유로울 때, 즉 어떤 n-쌍의 선행자들의 속성들에 근거한 선택에 대해서도 둔감함을 말한다. 그리고 무작위적인 계열에 대응하는 빈도 극한값은 관련된 계열에서 그 속성의 객관적 확률(F)이 된다. 포퍼는 그런 다음 이렇게 약화된 무작위성의 공리로부터 베르누이의 정리를 추론해 낸다. 먼저 그는 어떤 계열 α로부터 n 개의 원소로 구성되는 부분 계열(segment)을 다음과 같이 구성한다. α에서 처음 n 개의 원소들로 구성되는 부분 계열(a_1, a_2, ... a_n)을 얻고, 다음 n 개의 원소들로 구성되는 두 번째 부분 계열(a_{n+1}, ... a_{2n})을 얻는다. 이런 식으로 계속하여 얻어지는 부분 계열들을 각 원소로 갖는 또 다른 계열을 구성할 수 있는데, 이를 α의 이웃하는(adjoining) 부분 계열이라고 하고, α_n이라고 표시한다. 그리고 α에서 첫 번째 원소로부터 n 번째까지의 원소로 구성되는 부분 계열(a_1, a_2, ... a_n)을 얻고, 두 번째 원소로부터 n+1 번째까지의 원소로

구성되는 부분 계열(a_2, ... a_{n+1})을 얻는다. 이런 식으로 계속하여 얻어지는 부분 계열들을 각 원소로 갖는 또 다른 계열을 구성할 수 있는데, 이를 α의 겹쳐지는(overlapping) 부분 계열이라고 하고, $\alpha_{(n)}$이라고 표시한다.

여기서 포퍼는 α가 n-자유인 경우에 다음 이항정식이 성립함을 보인다.[23]

(1) $_{\alpha(n)}F\ (m) = {}_nC_m p^m q^{n-m}$

(2) $_{\alpha n}F\ (m) = {}_nC_m p^m q^{n-m}$

베르누이의 정리는 우리가 n을 극한까지 (n → ∞) 취할 수 있다는 가정에서 (2)로부터 순수하게 수학적으로 도출된다. 베르누이의 정리는 결국 $_{\alpha n}F\ (m)$의 값을 구하는 문제와 아주 비슷하다. α의 n-부분이 속성 <Δp>를 갖는다는 것은 α에서 m의 상관빈도가 p로부터 δ이하로 일탈할 때, 그리고 오직 그럴 경우라고 하자. (여기서 δ는 0에 가까운 임의의 분수이다.) 다시 말하면, $|m/n - p| < \delta$이면, 그리고 오직 그럴 경우에만 어떤 n-부분은 속성 <Δp>를 갖는다고 정의된다. 그리고 그 외의 경우는 속성 <-Δp>를 갖는다. 이제 베르누이의 정리는 α_n-계열에서 이러한 종류의 부분들이 속성 <Δp>를 소유하는 부분들의 빈도값 또는 확률의 문제에 답한다. 결국 $\alpha_n F(\Delta p)$의 값을 제공할 수 있다.

(3) $\lim_{n\to\infty}\ {}_{\alpha n}F(\Delta p) = 1$

이것은 (2)으로부터 얻어진다. (1)로부터 다음 식이 곧 얻어진다.

(4) $\lim_{n\to\infty}\ {}_{\alpha(n)}F(\Delta p) = 1$

23) 포퍼는 유한한 계열에서 이항정식이 성립함으로부터 무한 계열에서 이항정식이 성립함을 유도하고, αn이 절대적 자유임을 보임으로써 이 이항정식이 성립함을 증명한다. Popper, K. (1959), pp. 175-177. 박우석 (1994), 237-239쪽.

그러므로 다음과 같이 일반적으로 표현되는 베르누이의 정리가 연역된다는 것이다.

$$\lim_{n\to\infty}\Pr(|m/n - p| < \delta) = 1$$

그리고 포퍼는 그 의미를 다음과 같이 설명한다.

> 베르누이의 정리는 절대적으로 자유인 또는 우연적 계열들의 짧은 부분들은 종종 p로부터 비교적 큰 일탈을 보이고 따라서 비교적 변동이 큰 반면, 긴 부분들은 대개의 경우 길이가 증가하는 p로부터 점점 더 작은 일탈을 보일 것이다. (...) 결국 베르누이의 정리는 우연적 계열들의 더 작은 부분들은 종종 큰 변동을 보여주는 반면 큰 부분들은 항상 항상성 또는 수렴성을 시사하는 방식으로 행동한다고 주장한다. 간단히 말해서 그것은 우리가 작은 것에서는 무질서와 무작위성을, 그리고 큰 것에서는 질서와 항상성을 발견한다고 주장한다.[24)]

결국 n-자유인 α라는 무한 계열에서 어떤 속성이 발생할 상관빈도는 특정한 값 p에 접근할 것임이 증명된 것이고, 이것이 바로 베르누이의 정리가 말하고 있는 것이다. 그리고 포퍼는 이렇게 베르누이의 정리를 증명하는 데 있어서 수렴성의 공리를 전혀 사용하지 않았음을 지적하고, 수렴성의 공리와 베르누이의 정리는 독립적일 수 있다고 주장한다. 뿐만 아니라 포퍼는 베르누이의 정리가 성립하지는 않지만 수렴성의 공리를 만족하는 계열들이 있으며, 이도 또한 그들 사이의 독립성을 지지해주는 근거라고 말한다.

요약하면, 포퍼는 폰 미제스의 상관 빈도 이론이 봉착한 문제인 두 공리 사이의 비일관성의 문제를 무작위성의 공리를 수정하고 수렴성의 공리를 포기함으로써 해결하고자 하였다. 물론 포퍼도 극한값이 정해진 값으로 수렴한다는 사실을 거부한 것이 아니라 그의 주장은 그것을 확률론의 공리로 받아들일 필요가 없다는 것이다. 그러나 확률을 상관 빈도의 극한으로 해석하면서 수렴성의 공리를

---

24) Popper, K. (1959), p. 180. 박우석 (1994), 244-245쪽,

포기하는 것은 매우 기이해 보인다. 왜냐하면 수렴성의 공리야말로 확률의 상관빈도 이론에서 가장 직관적이고 기본적인 정의에 해당되기 때문이다.[25)]

4. 맺음말

포퍼가 수정, 제안한 확률의 빈도 이론은 적어도 폰 미제스의 체계가 갖는다고 비판되는 비일관성의 문제는 피할 수 있는 것 같다. 포퍼가 증명해 보이지는 않았지만, 분명히 포퍼가 제안한 형식체계에서도 콜모고로프(A. Kolmogorov)의 표준적 수학적 확률 체계의 공리들을 연역할 수 있을 것이다.[26)] 즉 수정된 무작위성의 공리로부터 베르누이의 정리를 연역하고 이로부터 콜모고로프의 확률 공식들을 연역할 수 있을 것이기 때문이다. 그런데 필자가 아는 한, 포퍼의 후기 확률 이론인 성향이론에 비하여 상관 빈도이론에 대한 그의 이러한 수정안은 별로 주목받지 못했다. 그 이유는 무엇일까? 그것은 수렴성의 공리가 배제된 상관 빈도 이론은 확률에 관한 기본적인 정의에 해당하는 것을 보다 덜 기본적인 것을 공리로 삼아 연역해내는 기이한 체계라고 여겨지기 때문일 것이다. 실제로 폰 미제스도 자신의 형식체계로부터 콜모고로프의 확률 공식을 증명하지는 않았다. 폰 미제스의 확률 체계로부터 콜모고로프의 공리들을 연역해보면,[27)] 그 연역 과정에서 무작위성의 공리는 전혀 사용되지 않고 오직 수렴성의 공리만으로도 충분함을 알 수 있다. 즉 무작위성의 공리는 이러한 연역에 아무런 역할을 하지 않는다는 것이다.

25) I. Hacking (2001), p. 193.

26) 그의 첫 번째 공리는 임의의 A에 대해서 $0 \leq (P(A) \leq 1$이고, $P(\Omega)=1$이고, 두 번째 공리인 덧셈 공리는 A와 B가 배타적인 속성일 때, $P(A) + P(B) = P(A \vee B)$이며, 세 번째 공리인 곱셈 공리는 임의의 두 속성 A, B에 대해서 $P(A\&B) = P(A/B).P(B)$이다.

27) 이 증명은 D. Gillies (2000), pp. 109-112 참조.

이러한 사실에 대해서 여러 가지 해석이 있을 수 있지만, 이 사실이 의미하는 중요한 것은 바로 수렴성의 공리야말로 상관빈도 이론의 확률 해석에서 포기될 수 없는 가장 기본적인 공리라는 것이다. 그런 의미에서 상관 빈도 이론의 두 공리가 모순적인 것처럼 보이는 문제에 대한 보다 바람직한 해결책은 무작위성의 공리를 보다 기본적인 공리인 수렴성의 공리와 일관성을 갖도록 정식화하는 것일 것이다.[28] 아무래도 수렴성의 공리를 제거한 포퍼의 상관 빈도 이론은 핵심이 빠져버렸다는 느낌을 지울 수 없기 때문이다. 결국 포퍼는 폰 미제스의 상관 빈도 이론이 부딪친 문제를 해결하는 데는 성공했지만, 그가 수정한 빈도 이론은 직관적이지 못한 약점을 가지고 있고, 포퍼의 확률 이론에 대한 중요한 기여는 또 다른 객관주의적 확률 이론인 성향이론의 제시에서 찾아져야 할 것이다.[29]

참고 문헌

Church, A. (1940) "On the Concept of a Random Sequence", *Bulletin of the American Mathematical Society* 46: 130-135.

Cramér, H. (1961), *Mathematical Methods of Statistics* (New Jersey: Princeton University Press).

De. Finetti, B. (1937) "Foresight: Its Logical Laws, Its Subjective Sources," In H. E. Kyburg & H.E. Smokler (eds.) *Studies in Subjective Probability* (Wiley, 1964).

---

28) 이러한 가능성은 발드(A. Wald)와 처치(A. Church)에 의해서 제시된다. 이에 대한 자세한 설명은 D. Gillies (2000), pp. 107-108 참조.

29) 이 논문을 과학철학회에서 발표할 때 논평을 해주신 진성배 교수와 익명의 심사위원 모두 포퍼의 확률론에 대한 진정한 기여는 성향이론에 있음을 지적해주셨다. 필자도 동의한다. 다만 이 논문의 목적은 포퍼의 초기 확률론에 대한 평가에 있고, 포퍼의 성향이론에 대한 논의는 별도의 논문 "포퍼의 확률의 성향이론"에서 다룰 것이다.

Fry, T. (1928) *Probability and Its Engineering Uses*, Van Nstrand.
Gillies, D. (2000), *Philosophical Theories of Probability* (New York: Routledge).
Hacking, I. (2001), *An Introduction to Probability and Inductive Logic* (New York: Cambridge University Press).
Popper, K. (1959) *The Logic of Scientific Discovery* (New York: Routledge). 박우석 옮김 (1994) 『과학적 발견의 논리』 (서울: 고려원).
Von Mises, R. (1957), *Probability, Statistics and Truth* (New York: Dover Pub.).

【Abstract】 The purpose of the paper is to discuss and estimate early Popper's theory of probability, which is presented in his book, *The Logic of Scientific Discovery*. For this, Von Mises' frequency theory shall be discussed in detail, which is regarded as the most systematic and sophisticated frequency theory among others. Von Mises developed his theory to response to various critical questions such as how finite and empirical collectives can be represented in terms of infinite and mathematical collectives, and how the axiom of randomness can be mathematically formulated. But his theory still has another difficulty, which is concerned with the inconsistency between the axiom of convergence and the axiom of randomness. Defending the objective theory of probability, Popper tries to present his own frequency theory, solving the difficulty. He suggests that the axiom of convergence be given up and that the axiom of randomness be modified to solve Von Mises' problem. That is, Popper introduces the notion of ordinal selection and neighborhood selection to modify the axiom of randomness. He then shows that Bernoulli's theorem is derived from the modified axiom. Consequently, it can be said that Popper solves the problem of inconsistency which is regarded as crucial to Von Mises' theory. However, Popper's suggestion has not drawn much attention. I think it is because his theory seems anti-intuitive in the sense that it gives up the axiom of convergence which is the basis of the frequency theory. So for more persuasive frequency theory, it is necessary to formulate the axiom of randomness to be consistent with the axiom of convergence.

【Key Words】 collective, R. Von Mises, Law of Stability, Principle of excluded gambling system, Axiom of Convergence, Axiom of Randomness.