

정전기력을 받는 마이크로 이중 외팔 보의 응답 및 모드 해석

Responses and Modal Analyses of Micro Double Cantilever Beams Interacted by Electrostatic Forces

정 강 식* · 문 승 재** · 유 흥 희†

Kang-Sik Jung, Seung-Jae Moon and Hong-Hee Yoo

(2004년 10월 7일 접수 ; 2005년 1월 6일 심사완료)

Key Words : Structural Dynamics(구조 동역학), Cantilever Beam(외팔 보), Modal Analysis(모드 해석), MEMS(마이크로 전자기계 시스템), Electrostatic Force(정전기력)

ABSTRACT

The governing equations of micro double cantilever beam structures interacted by electrostatic forces are obtained employing Galerkin's method based on Euler beam theory. Variations of static and dynamic responses as well as natural frequencies are estimated for applied voltages. In particular, it is investigated how the variations of beam properties resulted by manufacturing process influence the deflections and the modal characteristics. This study can help to design MEMS structures and to predict the performances with respect to manufacturing tolerances.

기 호 설 명

- d : 두 외팔 보의 고정 단 사이의 간격
- E_1, E_2 : 외팔 보 1, 2의 탄성계수
- ϵ_0 : 진공의 유전율
- f_i : 강제진동 시의 i 번째 고유진동수
- f_{ni} : 자유진동 시의 i 번째 고유진동수
- I_1, I_2 : 외팔 보 1, 2의 단면 관성 모멘트
- L : 보의 길이
- ν_{1T}, ν_{2T} : 외팔 보 1, 2의 자유단 처짐 양
- ρ_1, ρ_2 : 외팔 보 1, 2의 단위길이 당 질량
- V : 가친 전압
- w : 보의 너비

1. 서 론

최근 제조기술의 발달과 더불어 많은 첨단산업 제품에 MEMS 구조로 이루어진 부품이 사용되고 있다. 실생활에서 흔히 볼 수 있는 캠코더의 떨림 보정장치나 컴퓨터 HDD의 구동기가 그 예이며 각종 전자제품의 신호 검출장치, 항공기의 각속도 측정 센서도 그와 같이 MEMS 부품으로 이루어진 장치이다.

MEMS 구조물들은 미세한 크기와 재료의 특성 때문에 구조물에 전압을 가할 때 발생하는 정전기력에 의해 구동 된다. 그런데 정전기력은 구조물의 응답에 의해 변화되므로 일반적인 구동력과는 다른 특성을 갖고 있다. 이러한 특성 때문에 구조물의 외부 가친에 대한 응답특성은 정전기력을 발생시키는 전압과 연관되어서 변화한다. 따라서 구조물의 효율적인 설계를 위해서 전압의 변화에 의한 정적 및 동적 응답 특성의 변화를 예측하는 것이 필요하다.

정전기력을 받는 외팔 보는 MEMS 구조에서 구동기, 스위치, 센서 등의 보편적인 형태 중의 하나로 단일 마이크로 외팔 보나 그 집합 구조로 사용되고 있

† 책임저자 : 정희원, 한양대학교 기계공학부
E-mail : hhyoo@hanyang.ac.kr
Tel : (02) 2290-0446, Fax : (02) 2293-5070

* 정희원, 한양대학교 대학원 기계설계학과

** 한양대학교 기계공학부

다. 현재까지 이와 같은 정전기력을 받는 외팔 보의 응답과 관련한 다양한 연구들이 있었다. 참고문헌 (1)은 사각 단면을 갖는 단일 마이크로 외팔 보의 정적 처짐을 예측했다. 이와 더불어 구조물의 허용 전압을 수식으로 제시하였다. 참고문헌 (2)는 다양한 형상의 외팔 보를 다룸으로써 단면 형상 변화에 의한 정적 처짐의 민감도 변화를 제시하였다. 참고문헌 (3)은 부분적으로 변형된 단일 마이크로 외팔 보의 정적 처짐을 예측하였다. 그리고 참고문헌 (4)는 원형 단면을 갖는 단일 나노 외팔 보의 정적 처짐을 반데르 발스 힘까지 고려하여 제시하였다. 이러한 정적 응답에 국한된 연구들과 달리 참고문헌 (5)는 단일 외팔 보의 동적 응답을 다루었다. 이 연구에서는 외팔 보 상하면에 고정된 전극으로부터 가해지는 정전기력을 조절하여 동적 응답을 제어하는 방법을 제시하였다. 그러나 그 연구에서도 일반적인 진동 특성의 변화는 다루지 않았다.

이 연구에서는 참고문헌 (6)에서 다루었던 단일 마이크로 외팔 보 구조의 강체 전극 부분까지 탄성체로 고려함으로써 기존 모델보다 확장된 모델로서 이중 마이크로 외팔 보 구조를 다루고 있다. 또한 기존의 연구와 달리 정전기력의 비선형성을 고려하여 정적 처짐을 예측하며 운동방정식의 선형화에 있어서도 기존 모델보다 정확도를 높인 모델을 제시하고 있다.

특히 MEMS 구조물은 매우 미세한 구조로 제조 과정에서 단면형상의 오차나 재료의 강성 변화가 발생하기 쉽고 이 때문에 전체적인 구조 강성 변화가 발생할 가능성이 높다. 이런 점에서 이 연구는 두 외팔 보 사이에 강성 차이가 발생했을 때 일반적인 응답 특성의 변화도 관찰함으로써 효율적인 설계를 위한 정보를 제공하고 있다.

2. 운동 방정식

정전기력을 받는 이중 마이크로 외팔 보는 Fig. 1과 같이 나타낼 수 있다. 연속계에서 오일러 보 이론에 근거한 외팔 보의 굽힘방향 운동 방정식으로부터 이중 마이크로 외팔 보의 운동 방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\rho_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + E_1 I_1 \frac{\partial^4 v_1}{\partial x_1^4} = f \quad (1)$$

$$\rho_2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} + E_2 I_2 \frac{\partial^4 v_2}{\partial x_2^4} = -f \quad (2)$$

여기서 f 는 두 외팔 보 사이에 발생하는 정전기력으로서 참고문헌 (1)에 제시된 식으로부터 식 (3)과 같이 나타낼 수 있으며 변위에 대해 비선형적인 관계를 갖는다.

$$f = \frac{w \epsilon_0 V^2}{2} \frac{1}{(d - v_1 + v_2)^2} \quad (3)$$

이산계 운동 방정식을 구하기 위해 식 (1), (2)에 가중함수 ϕ_i 를 각각 곱한 후 외팔 보의 영역에 대해 부분 적분하고 경계조건을 대입한다.

$$\int_0^L \rho_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} \cdot \phi_1 dx + \int_0^L E_1 I_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} \cdot \phi_1^* dx = \int_0^L f \cdot \phi_1 dx \quad (4)$$

$$\int_0^L \rho_2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} \cdot \phi_2 dx + \int_0^L E_2 I_2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} \cdot \phi_2^* dx = - \int_0^L f \cdot \phi_2 dx \quad (5)$$

$$v_\alpha(x, t) = \sum_{i=1}^{M_\alpha} \phi_i(x) q_{\alpha i}(t) \quad (\alpha=1,2) \quad (6)$$

변위를 식 (6)과 같이 근사화 한 후 식 (4)와 식 (5)에 대입하면 다음과 같은 운동 방정식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{j=1}^{M_1} m_{ij}^1 \ddot{q}_{1j} + \sum_{j=1}^{M_1} k_{ij}^1 q_{1j} = r_i \quad (i=1, \dots, M_1) \quad (7)$$

$$\sum_{j=1}^{M_2} m_{ij}^2 \ddot{q}_{2j} + \sum_{j=1}^{M_2} k_{ij}^2 q_{2j} = -r_i \quad (i=1, \dots, M_2) \quad (8)$$

여기서

$$m_{ij}^\alpha \equiv \int_0^L \rho_\alpha \phi_i \phi_j dx$$

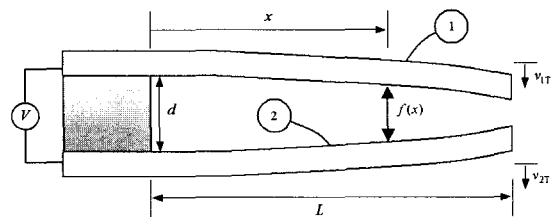


Fig. 1 Configuration of micro double cantilever beams interacted by electrostatic forces

$$k_{ij}^\alpha \equiv \int_0^L E_\alpha I_\alpha \phi_i'' \phi_j'' dx$$

$$r_i \equiv \int_0^L f \phi_i dx \quad (\alpha=1,2)$$

또한 식 (7), (8)의 시간에 관한 항을 무시하면 정적 처짐에 대한 방정식은 다음과 같다.

$$\sum_{j=1}^{\mu_1} k_{ij}^1 q_{1j} = r_i \quad (i=1, \dots, \mu_1) \quad (9)$$

$$\sum_{j=1}^{\mu_2} k_{ij}^2 q_{2j} = -r_i \quad (i=1, \dots, \mu_2) \quad (10)$$

식 (9)과 식 (10)의 비선형 방정식으로부터 정적 처짐의 평형 위치를 구할 수 있다. 그런데 동적 응답을 효율적으로 구하기 위해서는 정전기력의 선형화가 필요하다. 이를 위해 정적 해석을 통해 구한 정적평형 위치를 식 (11)과 같이 정의하고 이를 이용해 정전기력을 선형화한다.

$$v^* \equiv v_1^* - v_2^* \quad (11)$$

$$f \equiv \frac{w\epsilon_0 V^2}{2} \frac{d-3v^*}{(d-v^*)^3} + \frac{w\epsilon_0 V^2}{(d-v^*)^3} (v_1 - v_2) \quad (12)$$

식 (12) 같이 선형화한 정전기력을 운동 방정식 (7), (8)에 다시 대입하면 다음과 같이 선형화한 운동 방정식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{j=1}^{\mu} M_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{\mu} K_{ij} q_j = \sum_{j=1}^{\mu} R_{ij}^1 q_j + R_i^0 \quad (\mu = \mu_1 + \mu_2, \quad i, j = 1, 2, \dots, \mu) \quad (13)$$

여기서

$$[M_{ij}] \equiv \begin{bmatrix} m_{im}^1 & 0 \\ 0 & m_{im}^2 \end{bmatrix}$$

$$[K_{ij}] \equiv \begin{bmatrix} k_{im}^1 & 0 \\ 0 & k_{im}^2 \end{bmatrix}$$

$$\{\ddot{q}_j\} \equiv \begin{Bmatrix} \ddot{q}_{1l} \\ \ddot{q}_{2l} \end{Bmatrix}, \quad \{q_j\} \equiv \begin{Bmatrix} q_{1l} \\ q_{2l} \end{Bmatrix}$$

$$[R_{ij}^1] \equiv \begin{bmatrix} r_{im}^1 & -r_{im}^1 \\ -r_{im}^1 & r_{im}^1 \end{bmatrix}$$

$$\{R_i^0\} \equiv \begin{Bmatrix} r_i^0 \\ -r_i^0 \end{Bmatrix}$$

$$r_{ij}^1 \equiv \frac{w\epsilon_0 V^2}{(d-v^*)^3} \phi_i \phi_j$$

$$r_i^0 \equiv \frac{w\epsilon_0 V^2}{2} \frac{d-3v^*}{(d-v^*)^3} \phi_i$$

3. 수치 해석

이 절에서는 앞 절에서 유도된 운동 방정식에 근거하여 정전기력을 받는 마이크로 이중 외팔 보의 정적 및 동적 응답 해석과 모드 해석을 수행하였다. 수치 해석에 사용한 물성치들은 Table 1에 나타나 있다.

Fig. 2는 정적 해석을 수행한 결과로 전압에 대해 무차원화된 외팔 보의 자유단 처짐을 각각 나타낸 것이다. 전압이 증가할수록 전압에 대한 처짐의 변화율이 증가하는 것을 알 수 있으며 특정전압에서 변화율이 무한대가 됨으로써 구조물의 허용 전압이 존재함을 확인할 수 있다. 또한 두 외팔 보의 강성이 같을 경우 처짐이 대칭을 이루다가 외팔 보 2의 강성이 감소할수록 같은 크기의 전압에 더 크게 반응하며 그 변화는 강성이 낮은 외팔 보에서 더 큰 것을 확인할 수 있다. 강성 감소에 의한 허용 전압의 감소도 확인할 수 있다.

Fig. 3은 전압의 변화에 의한 강제 진동시의 고유 진동수 변화를 나타낸 것이다. 강성이 같을 경우 전압이 증가함에 따라 첫 번째, 세 번째, 다섯 번째 고유 진동수는 감소하며 응답에서 가장 지배적인 첫 번째 고유진동수의 변화가 가장 큰 것을 볼 수 있다. 또한 전압이 0일 때 각각 첫 번째, 세 번째, 다섯 번째 고유 진동수와 같은 값을 갖는 두 번째, 네 번째,

Table 1 Numerical data used for the simulation

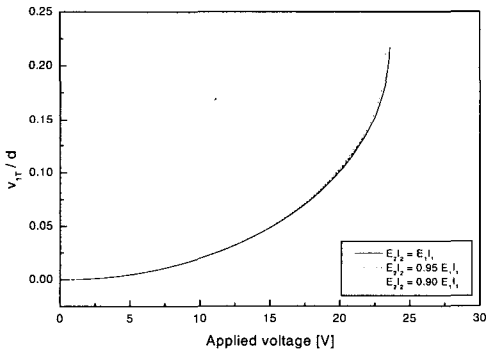
	Description	Numerical date
ρ	Mass per unit length	9.320×10^{-9} kg/m
E	Young's modulus	55 GPa
L	Moment of inertia	$1.3333 \mu\text{m}^4$
I	Beam length	100 μm
w	Beam width	2.0 μm
ϵ_0	Free space permittivity	8.8542×10^{-12} F/m
V	Applied drive voltage	0 ~ 24 V
d	Gap between fixed tips	2.0 μm

여섯 번째 고유 진동수는 전압에 의한 변화없이 일정한 값을 갖는 것을 볼 수 있다. 그러나 외팔 보 2의 강성이 감소함에 따라 홀수 번째 고유 진동수의 값이 전체적으로 감소하는 것을 볼 수 있으며 짝수 번째 고유 진동수 역시 전압 증가에 따라 미세하게 감소하고 있다.

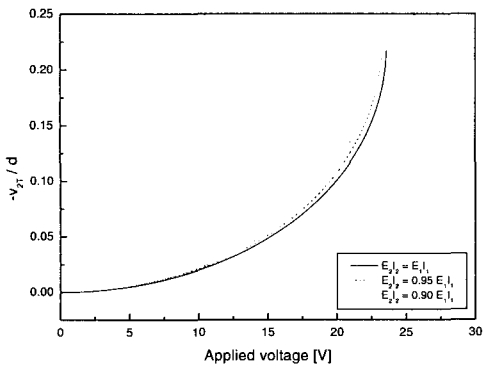
다음으로 동적 해석 결과를 보면 우선 직류 가진 전압에 의한 동적 응답은 Fig. 4와 같다. 강성이 감소한 경우 진동 주기가 변하는 것을 볼 수 있다. 또한 진폭이 증감을 반복하는 형태로 변하는 것을 알 수 있다.

교류에 의해 가진될 경우의 동적 응답은 다소 다른 경향을 갖는다. 그 이유는 교류 전압이 구조 전체의 강성을 주기적으로 변화시키기 때문이다. 이런 경우 일반적으로 동적 안정성에 문제가 발생할 수 있다. 이 때문에 고유 진동수에 비해 비교적 낮은 주파수의 교류 전압이 가해질 경우에는 정적 처짐의 경향과 유사한 안정적인 응답이 발생하나 교류 전압이 고유 진동

수와 비슷한 크기의 주파수로 가해질 경우 Fig. 5와 같이 응답의 크기가 크게 증가할 수 있다. Fig. 5는 고유 진동수의 1/2인 가진 주파수로 교류 전압이 가해지는 경우로 맥놀이 형태의 응답이 발생하는 것을 볼 수 있다. 또 외팔 보 하나의 강성만 감소할 때 두 외팔 보의 응답은 대칭성을 상실하게 된다. 가진 주

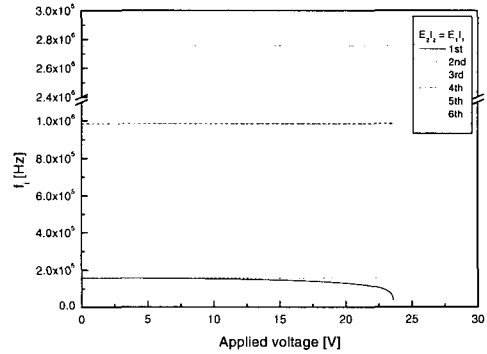


(a) First beam tip deflection

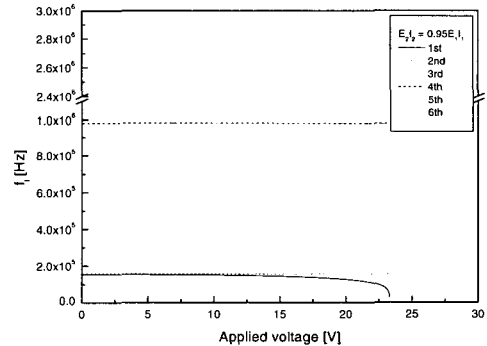


(b) Second beam tip deflection

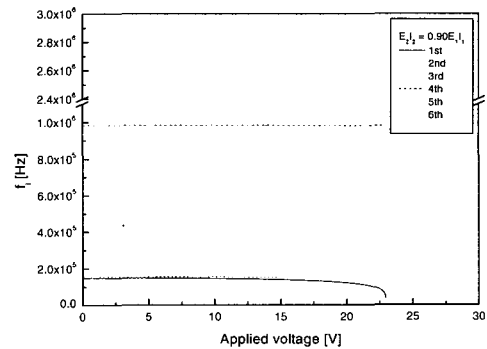
Fig. 2 Variations of static deflections of beam tips versus applied voltages



(a) $E_2I_2 = E_1I_1$



(b) $E_2I_2 = 0.95E_1I_1$



(c) $E_2I_2 = 0.90E_1I_1$

Fig. 3 Variations of the lowest six natural frequencies versus applied voltages

파수에 따라 한 외팔 보의 응답 진폭이 다른 외팔 보의 응답 진폭보다 훨씬 커지게 된다.

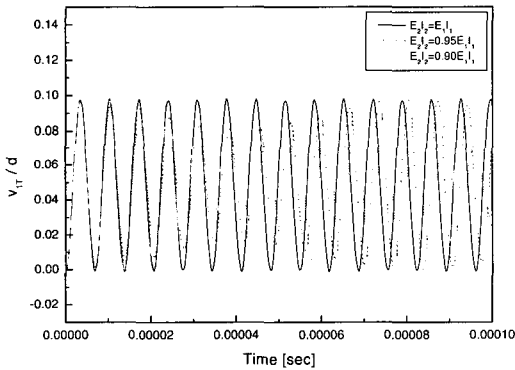
다음으로 동적 해석 결과를 보면 우선 직류 가진 전압에 의한 동적 응답은 Fig. 4와 같다. 강성이 감소한 경우 진동 주기가 변하는 것을 볼 수 있다. 또한 진폭이 증감을 반복하는 형태로 변하는 것을 알 수 있다.

교류에 의해 가진될 경우의 동적 응답은 다소 다른 경향을 갖는다. 그 이유는 교류 전압이 구조 전체의 강성을 주기적으로 변화시키기 때문이다. 이런 경우 일반적으로 동적 안정성에 문제가 발생할 수 있다. 이 때문에 고유 진동수에 비해 비교적 낮은 주파수의 교류 전압이 가해질 경우에는 정적 처짐의 경향과 유사한 안정적인 응답이 발생하나 교류 전압이 고유 진동수와 비슷한 크기의 주파수로 가해질 경우 Fig. 5와 같이 응답의 크기가 크게 증가할 수 있다. Fig. 5는 고유 진동수의 1/2인 가진 주파수로 교류 전압이 가

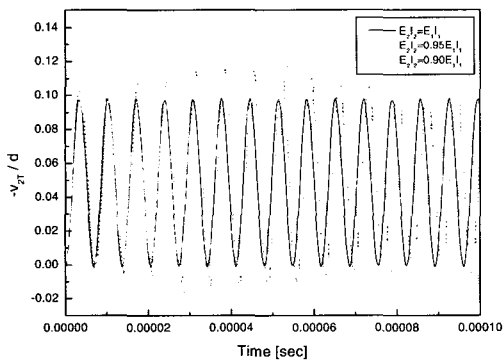
해지는 경우로 맥놀이 형태의 응답이 발생하는 것을 볼 수 있다. 또 외팔 보 하나의 강성만 감소할 때 두 외팔 보의 응답은 대칭성을 상실하게 된다. 가진 주파수에 따라 한 외팔 보의 응답 진폭이 다른 외팔 보의 응답 진폭보다 훨씬 커지게 된다.

$$v_{\max} / d = (v_1 - v_2)_{\max} / d \quad (14)$$

Fig. 6은 증가할 수 있는 무차원화된 최대 응답을 교류 전압 크기와 무차원화된 가진 주파수에 대해 나타낸 것이다. 여기서 불안정성 기준으로 식 (14)와 같이 정의된 두자유단의 처짐을 함께 고려한 값이 사용되었다. 이 값은 이중 마이크로 외팔 보의 구조 상 두 외팔 보가 고정된 간격인 d 보다 클 수 없으나(충돌이 일어나므로) 수치 해석에서는 충돌이 고려되지 않으므로 더 큰 값도 나타날 수 있는데 이는 단지 불안정성의 강도를 나타내는 것이다.

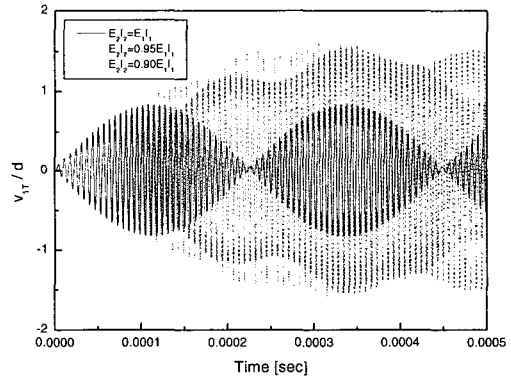


(a) First beam tip deflection

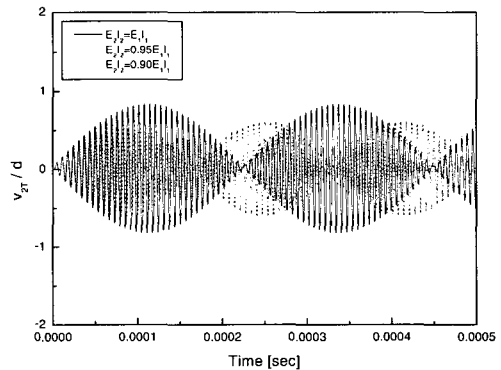


(b) Second beam tip deflection

Fig. 4 Dynamic responses by a direct voltage ($V = 15[V]$)



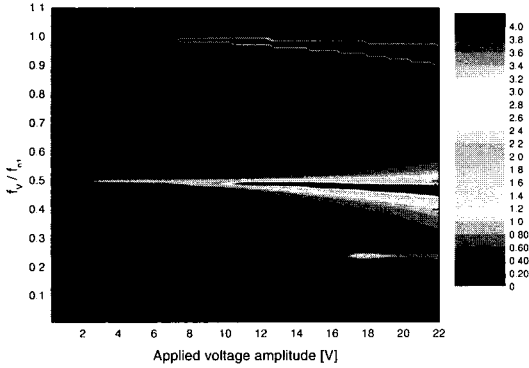
(a) First beam tip deflection



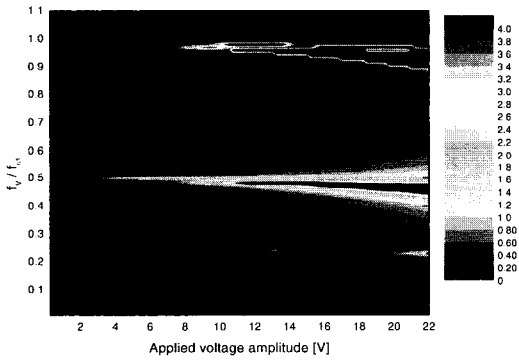
(b) Second beam tip deflection

Fig. 5 Dynamic responses by an alternate voltage ($V = 15 \sin(2\pi f_V t)[V], f_V = 0.5 f_{n1}$)

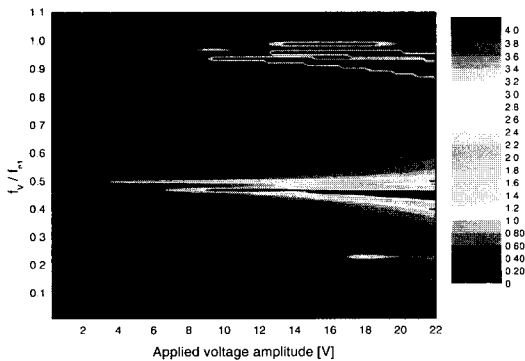
Fig. 6의 결과로부터 f_v/f_{n1} 가 0.5나 1.0인 주위에서 전압에 대한 최대 응답 변화가 급격함을 알 수 있으며 전압의 진폭이 증가함에 따라 불안정 영역 폭이 증가하는 것을 알 수 있다. 또한 전압 증가에 따라 고유 진동수가 감소했던 경향과 유사하게 불안정 영역의 중심이 낮은 주파수쪽으로 이동하는 것을 확인할 수 있다. 그리고 Fig. 6의 (a), (b), (c)를 비교해 보면 모드 해석에서 외팔 보 하나만 강성이 감소한 경우의 첫 번째 고유 진동수 변화와 유사하게 불안정 영역이 강성이 작은 경우일수록 더 낮은 주파수에서 발생하는 것을 확인할 수 있다. 그러나 이 때 강성 감소에 의해 크게 변하지 않았던 두 번째 고유진동수의 영향으로 특정 부분에서는 불안정 영역이 유사하게 존재하는 것을 볼 수 있다. 따라서 결과적으로 두 외팔 보의 강성 차이가 커질수록 불안정 영역이 더 넓은 범위에 걸쳐 존재함을 알 수 있다.



(a) $E_2I_2 = E_1I_1$



(b) $E_2I_2 = 0.95E_1I_1$



(c) $E_2I_2 = 0.90E_1I_1$

Fig. 6 Variations of dimensionless maximum dynamic responses by applied voltages

역의 중심이 낮은 주파수쪽으로 이동하는 것을 확인할 수 있다. 그리고 Fig. 6의 (a), (b), (c)를 비교해 보면 모드 해석에서 외팔 보 하나만 강성이 감소한 경우의 첫 번째 고유 진동수 변화와 유사하게 불안정 영역이 강성이 작은 경우일수록 더 낮은 주파수에서 발생하는 것을 확인할 수 있다. 그러나 이 때 강성 감소에 의해 크게 변하지 않았던 두 번째 고유진동수의 영향으로 특정 부분에서는 불안정 영역이 유사하게 존재하는 것을 볼 수 있다. 따라서 결과적으로 두 외팔 보의 강성 차이가 커질수록 불안정 영역이 더 넓은 범위에 걸쳐 존재함을 알 수 있다.

4. 결론

이 연구에서는 많은 MEMS 구조물에 이용되는 단일 외팔 보 구조의 확장된 모델로서 이중 마이크로 외팔 보의 응답 해석과 모드 해석을 수행하였다.

기존 연구들과 달리 정전기력의 비선형성을 고려하여 정적 해석을 수행하였고 해석 결과로부터 최대 처짐을 발생시키기 위한 최소 전압이라 할 수 있는 허용 전압을 제시하였다. 또한 모드 해석 및 동적 해석 결과와 관련해 일반적인 동적 특성 및 동적 안정성을 파악하였다. 특히 이 연구에서 다른 이중 외팔 보 구조가 제작 오차 등에 의해 구조 강성의 대칭성을 잃었을 때의 응답 변화를 비교, 분석하였다.

이와 같은 해석으로부터 강성 차이가 정적 응답보다 동적 응답에 더 큰 영향을 미치는 것을 확인하였으며 따라서 구조물 설계 시 구조물의 사용 목적과 가진 전압의 종류에 따라 제작 오차를 고려해야 함을 알 수 있었다.

이와 같은 연구는 마이크로 구조물을 대상으로 기존 연구에서 다루지 않았던 동적 특성의 변화를 다양한 내용으로 다루었다는 점에서 의미가 있다고 생각되며 마이크로 구동기나 스위치 또는 tweezers와 같은 기구를 고안하고 설계하기 위한 정보로서 유용하리라 사료된다.

후 기

이 연구는 한국과학재단지정 한양대학교 최적설계 신기술연구센터의 연구비 지원으로 수행되었습니다.

참 고 문 헌

- (1) Kovacs, Gregory T. A., 1998, Micro-machined Transducers Sourcebook, McGraw-Hill, pp. 278~281.
- (2) Hirai, Yoshihiko, Marushima, Yoshinari, Soda, Shinnosuke, Jin, Donghao, Kawata, Hiroaki, Inoue, Kouji, Tanaka, Yoshio, 2000, "Electrostatic Actuator with Novel Shaped Cantilever," 2000 International Symposium on Micromechatronics and Human Science, pp. 223~227
- (3) Wei, Leow Cheah, Mohammad, Abu Baker, Kassim, Norazan Mohd., 2002, "Analytical Modeling for Determination of Pull-in Voltage for An Electrostatic Actuated MEMS Cantilever Beam," ICSE Proc., pp. 233~238.
- (4) Dequesnes, Marc, Rotkin, S. V., Aluru, N. R., 2002, "Calculation of Pull-in Voltages for Carbon-nanotube-based Nanoelectromechanical Switches," IOP publishing, pp. 120~131.
- (5) Wang, P. K. C., 1998, "Feedback Control of Vibration in a Micromachined Cantilever Beam with Electrostatic Actuators," J. of Sound and Vibration, pp. 537~550.
- (6) Yoo, H. H., Moon, S. J., Jung, K. S., 2004, "Dynamic Analysis of Micro Cantilever Beams Undertaking Electrostatic Forces," Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 14, No. 9, pp. 846~851.