

조화력에 의한 원환의 강제진동

Forced Vibration of a Circular Ring with Harmonic Force

홍진선†

Jin Sun Hong

(2003년 12월 9일 접수 : 2005년 1월 12일 심사완료)

Key Words : Circular Ring(원환), Forced Vibration(강제진동), Frequency Response(주파수 응답), Harmonic Force(조화력)

ABSTRACT

Forced vibration of a thin circular ring with a concentrated harmonic force is analyzed when the ring is free and has only the in-plane motion. Using the unit doublet function for external force, the governing equation is obtained and is solved by the use of Laplace transform. The exact solutions of displacement components and bending moment are obtained. In order to verify the solutions of analysis, finite element analysis is performed and the results shows good agreement. Then, frequency response curves for displacement and bending moment are obtained. In deriving the governing equations and the solutions, nondimensional parameter of the exciting frequency and the magnitude of exciting force are extracted. As the displacement components are obtained, the remaining bending strain, slope, curvature, shear force, etc. can also be derived. With the results of this work, the responses of a free ring excited on multiple points with different frequencies can also be obtained easily by superposition.

1. 서론

원환은 그 형상이 비록 단순함에도 불구하고, 자체로써 구조물 요소로 이용되거나 각종 변환기에서 감지부로 이용되는 등,^(1,2) 공학적으로 매우 중요한 위치를 차지하고 있다. 또한 원환의 진동특성으로부터, 원통셀을 비롯한 각종 축대칭셀의 진동특성을 유추할 수도 있으므로 원환은 지난 백여년 이상의 세월동안 끊임없이 연구되어 왔다.

원환에 대한 운동방정식은 이미 수 십년전 Strutt,⁽³⁾ Love⁽⁴⁾ 등을 비롯한 선구자들에 의하여 정립되었다. 그 후, Allaei 등은 이미 알려져 있는 원환

의 고유모드를 이용하여 그 전개식으로 반경방향으로의 스프링과 집중질량이 부착된 원환의 고유진동수와 고유모드를 계산하였으며,⁽⁵⁾ 마치 자전거 바퀴와 비슷한 형상으로, 고정된 원의 중심으로부터 반경방향으로 다수의 스프링이 부착된 원환에 대하여, 역시 원환의 고유모드 전개식으로써 고유진동수와 고유모드를 계산하였다.⁽⁶⁾ 집중질량이 부착된 원환의 고유치해석에 관한 엄밀해는 비슷한 시기에 홍진선 등⁽⁷⁾에 의하여 구해졌다.

그 외에 원환의 평면에 대한 수직축을 중심으로 하여 회전하는 원환의 운동방정식을 유도하고, 회전하는 반원환(원환의 절반부분)의 고유치를 해석한 연구,⁽⁸⁾ 원환의 제작시에 필연적으로 발생할 수 밖에 없는 기하학적 불균일성을 고려한 원환의 자유진동에 관한 연구,⁽⁹⁻¹⁰⁾ 적층 재질로 이루어진 원환의 부분형상에 대한 자유진동의 연구⁽¹¹⁾ 등, 이루 헤아릴 수 없을 정도의 많은 연구가 수행되었다.

† 책임저자 : 정희원, 강릉대학교 정밀기계공학과
E-mail : jshong@kangnung.ac.kr
Tel : (033) 640-2391, Fax : (033) 640-2390

연속체의 강제진동을 해석하는 방법은 크게 적분변환에 의한 방법과 모드해석에 의한 방법으로 나눌 수 있다. 모드해석법은 무한급수의 해를 가정하여 비교적 넓은 범위의 문제에 대해서도 근사해를 구할 수 있다는 장점이 있다. 이에 비하여 적분변환법에 의한 해는 그 적용범위가 매우 제한적일 수 밖에 없지만 해를 유도할 수만 있다면 극히 적은 계산량으로 엄밀해를 계산할 수 있으며 강제진동의 특성을 파악하기 쉽다는 장점이 있다. 지금까지 모드해석법을 이용하여 미소 비대칭 원환의 고유진동을 해석한 연구는 수행된 바 있지만 조화가진력을 받는 원환의 적분변환법에 의한 해는 아직까지 알려지지 않은 것으로 파악된다.

이 연구에서는 반경에 비하여 비교적 두께가 작은, 얇은 원환의 한 점에 조화적인 집중력이 가해지는 경우에, 원환의 변위와 굽힘모멘트에 대한 주파수응답의 엄밀해를 구하였다. 유도한 식의 타당성은 유한요소해석 코드인 'ANSYS'를 이용하여 검증하였다. 외력의 주파수변화에 따라서 변하는 원환의 변형모습을 그림으로 나타내었으며 원환의 변위응답과 굽힘모멘트응답을 결정짓는, 외력의 무차원 진동수와 크기를 추출해 내었다.

2. 이론적 해석

2.1 원환의 운동방정식

반경에 비하여 두께가 작은 원환의 진동에서는 중립축상에서의 원주방향 변형률을 무시할 수 있다는 것이 알려져 있다. 원환에서 반경방향과 원주방향의 변위성분을 각각 u 와 v 로 나타내면 원주방향 변형률이 영이라는 조건으로부터 아래의 식이 성립하게 된다.

$$u = -\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad (1)$$

이미 알려진 원환의 운동방정식⁽¹²⁾에 위의 조건식을 이용하면 단위 길이당 질량이 m , 반경이 R 인 원환에 반경방향으로의 분포하중 q_r 이 작용하는 경우의 운동방정식을 아래와 같이 유도할 수 있다.

$$\frac{EI}{R^4} \left(\frac{\partial^6 v}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 v}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right) + m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - v \right) + \frac{\partial q_r}{\partial \theta} = 0 \quad (2)$$

또한, 원환에서의 굽힘모멘트는 아래와 같다는 것이 알려져 있다.

$$M = \frac{EI}{R^2} \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \quad (3)$$

이제 원환의 한 점에 반경방향으로 조화력 $F \cos \omega t$ 가 작용하는 경우에 대하여 고찰하기로 한다. 이러한 조화집중력을 받고 있는 원환의 변위를 $u = U \cos \omega t$, $v = V \cos \omega t$ 라고 가정하면 V 에 관한 미분방정식은 다음과 같이 된다.

$$\frac{EI}{R^4} \left(\frac{\partial^6 V}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 V}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \right) - m \omega^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} - V \right) + \frac{F}{R} \delta'(\theta - \theta_0) = 0 \quad (4)$$

2.2 원환의 응답해석

식 (4)의 라플라스변환은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} & [s^6 + 2s^4 + (1 - \lambda^2)s^2 + \lambda^2] \overline{V}(s) \\ &= [s^5 + 2s^3 + (1 - \lambda)s] V(0) \\ &+ [s^4 + 2s^2 + (1 - \lambda)V'(0) + (s^3 + 2s)V''(0) \\ &+ (s^2 + 2)V'''(0) + sV^{(4)}(0) + V^{(5)}(0) + se^{-s\theta_0} f \end{aligned} \quad (5)$$

여기에서

$$\lambda = \omega \sqrt{\frac{mR^4}{EI}} \quad (6)$$

$$f = \frac{FR^3}{EI} \quad (7)$$

이며, λ 는 외력의 무차원 진동수를 나타낸다. 식 (5)의 역변환식은 유수정리(residue theorem)를 이용하여 구할 수 있다.

$p = s^2$ 이라 하고 p 에 관한 함수 $f(p)$ 를 아래와 같이 정의하기로 한다.

$$f(p) = p^3 + 2p^2 + (1 - \lambda^2)p + \lambda^2 \quad (8)$$

$e^{s\theta} \overline{V}(s)$ 의 극(pole)은 $f(p) = 0$ 으로 되는 p 로부터 구할 수 있다. 이 삼차방정식의 근은 λ 의 크기에 관계없이 최소한 1개의 음근을 가지게 되므로 이 음근을 $-a_1^2$ 이라고 하면 나머지 두 근은 다음의 식 (9)로 된다.

$$a_2^2 = \frac{1}{2} \left\{ (a_1^2 - 2) - \left[(a_1^2 - 2)^2 + 4 \frac{\lambda^2}{a_1^2} \right]^{1/2} \right\}$$

$$a_3^2 = \frac{1}{2} \left\{ (a_1^2 - 2) - \left[(a_1^2 - 2)^2 - 4 \frac{\lambda^2}{a_1^2} \right]^{1/2} \right\} \quad (9)$$

이 세 근의 제곱근을 $\pm z_i$ ($i=1, 2, 3$) 라고 하면 다음의 식과 같이 $V(\theta)$ 를 유도할 수 있다.

$$V(\theta) = \sum_{i=1}^3 \{ A_i e^{z_i \theta} + B_i e^{-z_i \theta} \} + \sum_{i=1}^3 C_i H(\theta - \theta_0) e^{[z_i(\theta - \theta_0)]} \quad (10)$$

여기에서,

$$A_i = \frac{1}{Q_i} \{ [z_i^5 + 2z_i^3 + (1 - \lambda^2)z_i] V(0) + [z_i^4 + z_i^2 + (1 - \lambda^2)] V'(0) + (z_i^3 + 2z_i) V''(0) + (z_i^2 + 2) V'''(0) + z_i V^{(4)}(0) + V^{(5)}(0) \} \quad (11)$$

$$B_i = \frac{1}{Q_i} \{ [z_i^5 + 2z_i^3 + (1 - \lambda^2)z_i] V(0) - [z_i^4 + z_i^2 + (1 - \lambda^2)] V'(0) + (z_i^3 - 2z_i) V''(0) - (z_i^2 - 2) V'''(0) + z_i V^{(4)}(0) - V^{(5)}(0) \} \quad (12)$$

$$C_i = -\frac{z_i}{Q_i} f \quad (13)$$

$$Q_i = 6z_i^5 + 8z_i^3 + 2(1 - \lambda^2)z_i \quad (14)$$

으로 유도된다. $\theta = 2\pi$ 와 $\theta = 0$ 에서 변위, 경사각, 곡률, 굽힘모멘트, 전단력이 일치한다는 경계조건(matching boundary condition)은 아래의 식으로 된다.

$$V^{(n)}(2\pi) - V^{(n)}(0) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, 5 \quad (15)$$

식 (10)에 위의 경계조건을 적용하면 원주방향 변위를 유도할 수 있으며 그 결과는 다음과 같다.

$$V(\theta) = -\sum_{i=1}^3 C_i \frac{\sinh[z_i(\theta - \theta_0 + \pi)]}{2 \sinh \pi z_i} + H(\theta - \theta_0) \sum_{i=1}^3 C_i \cosh[z_i(\theta - \theta_0)] \quad (16)$$

그리고 식 (1)의 관계를 적용하면 반경방향 변위는 다음의 식으로 유도된다.

$$U(\theta) = \sum_{i=1}^3 C_i z_i \frac{\cosh[z_i(\theta - \theta_0 + \pi)]}{2 \sinh \pi z_i} + H(\theta - \theta_0) \sum_{i=1}^3 C_i z_i \sinh[z_i(\theta - \theta_0)] \quad (17)$$

3. 수치계산 및 검토

위에서 제시한 수식을 이용하여, 원환에 작용하는 조화집중력의 크기와 진동수가 알려진 경우에 반경방향변위, 원주방향변위, 그리고 굽힘모멘트 등을 계산할 수 있는 프로그램을 작성하였다. 유도한 수식과 프로그램의 타당성을 검증하기 위하여 계산모델을 설정하고 유한요소해석의 결과와 비교하였다. 검증용 모델은 Table 1에 나타내었으며 여기에서 두께는 원환의 평면내 크기를, 폭은 원환의 평면과 수직방향의 크기를 의미한다.

유한요소해석을 위하여 360개의 2차원 범요소로 원환을 모델링하였으며 'ANSYS'코드를 이용하였다. 이 원환의 한 점에 $\lambda = 1.5$, $\lambda = 3.0$ 에 해당하는 진동수(각각 약 80.46, 160.91 Hz)를 갖는 100 N의 조화가진력이 작용하는 경우의 변위와 굽힘모멘트를 계산하였다. 본 연구에서의 이론해와 유한요소해석에 의하여

Table 1 Data of a circular ring

Material	Mild steel
Density	7800 kg/m ³
Young's modulus	210 GPa
Radius, R	200 mm
Thickness, t	9 mm
Width, d	10 mm

Table 2 Displacements and bending moments
(a) $\lambda = 1.5$

θ	U (mm)		M (Nm)	
	'ANSYS'	Analysis	'ANSYS'	Analysis
0°	-0.0716	-0.0719	5.7790	5.7778
90°	-0.3149	-0.3149	-2.7781	-2.7772
180°	0.7405	0.7403	2.5277	2.5275
270°	-0.3149	-0.3149	-2.7781	-2.7772
360°	-0.0716	-0.0719	5.7790	5.7778

(b) $\lambda = 3.0$

θ	U (mm)		M (Nm)	
	'ANSYS'	Analysis	'ANSYS'	Analysis
0°	-0.9410	-0.9442	-5.6325	-5.6627
90°	0.8924	0.8951	8.7816	8.8111
180°	-0.8034	-0.8064	-9.1220	-9.1507
270°	0.8924	0.8951	8.7816	8.8111
360°	-0.9410	-0.9442	-5.6325	-5.6627

계산된 반경방향 변위와 굽힘모멘트의 결과는 Table 2와 같다.

이 표에서 θ 는 집중하중이 작용하는 위치로부터 시계방향으로의 각도를 나타내며 이론해와 유한요소 해석에 의한 오차는 0.54% 이내로 된다. 두 방법에 의한 결과가 완벽히 일치하지 않는 이유는 유한요소 해석에서는 회전관성이 고려되었으며 이론해에서는 중립축상에서의 원주방향 변형률이 영이라는 조건이 적용되었기 때문이라고 판단된다.

이 연구에서는 회전관성과 원주방향 변형률이 없다는 가정하에 원환의 조화 집중하중에 대한 엄밀해를 유도하였으며 유도된 식을 이용하여 반경방향변위에 대한 주파수응답곡선을 구한 결과는 Fig.1과 같다. 여기에서 가로축은 조화집중하중의 무차원 진동수이며 세로축은 다음의 식과 같이 무차원화된 반경방향의 변위를 나타낸다.

$$\bar{X} = \frac{EI}{FR^3} \cdot U \quad (18)$$

그리고 실선은 외력이 작용하는 점에서의 반경방향 변위를, 점선은 외력 작용점의 반대위치에서의 반경방향 변위를 나타낸다. 따라서 반경방향 변위의 진폭은 오직 식 (6)과 (7)에 나타난 외력의 무차원 진동수 λ 와 f 에 따라서만 변한다는 사실을 다시 확인할 수 있다.

원환의 고유 각진동수는 다음과 같다는 것이 알려져 있다.⁽¹³⁾

$$\omega_n = \frac{n(n^2-1)}{\sqrt{n^2+1}} \sqrt{\frac{EI}{mR^4}} \quad (19)$$

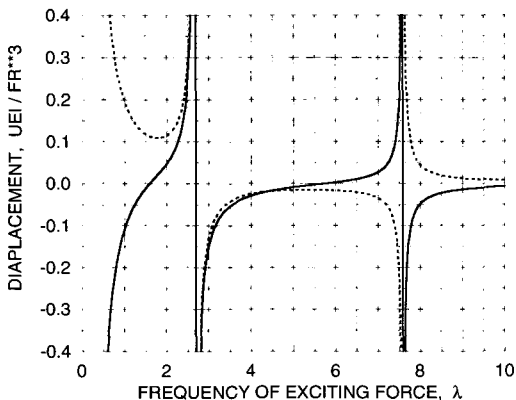


Fig. 1 Harmonic response of radial displacement

여기에서 n 은 음이 아닌 정수이며 $n=0, 1$ 인 경우는 각각 회전운동과 병진운동에 대한 강제운동을 나타낸다. 이 고유 각진동수를 이 연구에서의 무차원 진동수로 나타내면 λ 가 약 2.6833, 7.5895, ...으로 되며 외력의 진동수와 일치하게 되면 공진이 발생한다는 것을 Fig.1에서 확인할 수 있다.

또한 이 그림에 의하면 $\lambda=3.0$ 인 경우에 X 는 약 -0.15와 -0.13임을 읽을 수 있다. 위에서의 검증용 모델에 대하여 식 (18)을 이용하여 U 를 계산하면 각각 -0.94 mm와 -0.82 mm로 계산되어 Table 2에서의 반경방향 변위와 거의 일치함을 확인할 수 있다.

Fig.2는 굽힘모멘트에 대한 주파수응답곡선을 구한 결과이다. 여기에서 세로축은 아래의 식과 같이 무차원화된 굽힘모멘트를 나타낸다.

$$\bar{M} = \frac{M}{FR} \quad (20)$$

이 그림에 의하여 $\lambda=3.0$ 인 경우에는 \bar{M} 를 약 -0.25와 -0.45로 읽을 수 있다. 위에서의 검증용 모델에 대하여 식 (20)을 이용하여 M 를 계산하면 각각 -5.0 Nm와 -9.0 Nm로 계산되어 Table 2에서의 굽힘모멘트와 거의 일치하게 됨을 확인할 수 있다.

식 (16)과 식 (17)을 이용하여 $f=1$ 인 경우의 반경방향, 원주방향변위를 계산하였으며 그 변위를 조합한 결과를 Fig.3에 나타내었다. 여기에서 외력은 원환의 가장 오른쪽 점에 작용하고 있으며 외력의 방향이 오른쪽을 향하는 시점에 변위를 외력과 동위상으로 나타낸 것이다. 그리고 원환과 변위는 서로 비례하는 크기로 나타내었다. 이 그림에서 외력의 무차원 진동수 λ 가 작은 경우($\lambda=0.9$)에는 원환전체가

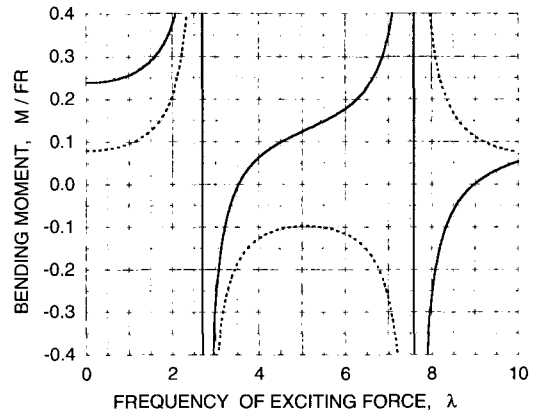


Fig. 2 Harmonic response of bending moment

외력과 반대위상으로 운동을 하고 있다는 것을 알 수 있다. λ 가 계속 작아지게 되면 원환전체의 움직임만 커지고 운동의 위상은 변하지 않는다. 외력의 진동수가 영으로 접근한다는 것을, 외력이 정하중에 접근한다는 의미로 받아들인다면 이 운동은 모순된 것으로 보일 수 밖에 없다. 그러나 $\lambda=0$ 도 무차원 고유진동수중의 하나(강제모드에 해당함)임을 상기한다면 외력의 진동수가 고유진동수보다 다소 클 때 180° 의 위상차이가 난다는 진동이론과 일치함을 알 수 있다.

유한요소해석을 이용하여 자유상태인 막대의 횡진동을 계산하여 본 결과, 매우 낮은 주파수로 가진하는 경우에는 가진력과 가진점의 변위가 역시 정반대의 위상으로 됨을 확인할 수 있었다. λ 가 0.9에서 증가함에 따라 원환전체의 움직임은 점차 둔화되어 λ 가 1.7로 되면 외력 작용점에서의 변위가 거의 없게 된다. 그 다음으로는 원환전체가 오른쪽으로 이동하며 동시에 형상이 점차 타원과 유사한 형태로 변하여 결국 원환의 1차 고유모드와 같은 형상으로 접근하게 된다. λ 가 2.5에서 2.9로 증가하는 과정은 1차 공진주파수(λ 는 약 2.68)를 통과하는 과정으로 공진 주파수를 통과하는 순간에 위상이 180° 뒤지게 된다는 기초 진동이론을 확인할 수 있다. 1차 공진주파수를 통과한 다음부터는 원환의 변위가 계속 작아져서 미소한 변위를 나타내게 된다. 이것은 반경방향 변위의 주파수응답곡선을 나타낸 Fig.1에서도 확인할 수 있다.

앞에서 유도한 식들을 이용하여 원환 외부위치에서의 굽힘변형률과 전단력을 계산한 결과는 Table 3과 같다. 이 원환은 Table 1의 원환 모델에서 반경과 두

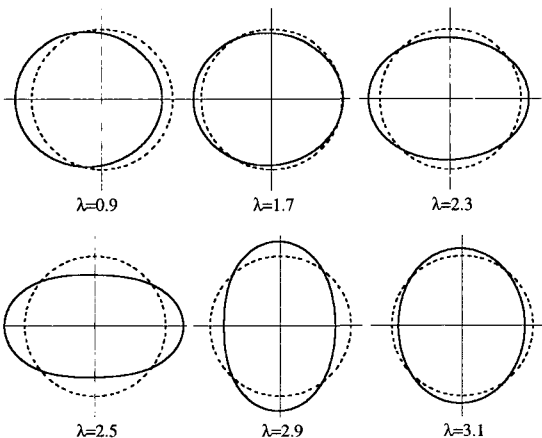


Fig. 3 Displacements with exciting frequencies

께만을 변화시켰으며 역시 100 N의 조화가진력이 작용하는 경우에 대하여 계산하였다. $\lambda=2.5$, $\lambda=3.0$ 인 경우 모두 외력의 작용선과 45° , 135° 되는 부근에서 굽힘변형률의 크기가 최소로 된다는 것을 확인할 수 있다.

이 원환의 전단력은 반경과 두께의 크기에 관계없이 오직 λ 에 따라서만 변하는 것으로 계산되었으며 그 결과는 Table 4에 나타내었다. 이 경우의 전단력

Table 3 Bending strains at outer surface of a ring

θ	Bending strain ($\times 10^6$), $\lambda=2.5$					
	R=200 mm			R=210 mm		
	t=8 mm	t=9 mm	t=10 mm	t=8 mm	t=9 mm	t=10 mm
0°	841.5	664.9	538.6	883.6	698.2	565.5
15°	647.9	512.0	414.7	680.3	537.6	435.4
30°	328.8	259.8	210.4	345.2	272.8	220.9
45°	-48.1	-38.0	-30.8	-50.5	-39.9	-32.3
60°	-396.2	-313.1	-253.6	-416.1	-328.7	-266.3
75°	-633.5	-500.5	-405.4	-665.1	-525.5	-425.7
90°	-703.8	-556.1	-450.5	-739.0	-583.9	-473.0
105°	-592.5	-468.1	-379.2	-622.1	-491.5	-398.2
120°	-329.9	-260.7	-211.2	-346.4	-273.7	-221.7
135°	15.5	12.3	9.9	16.3	12.9	10.4
150°	354.8	280.3	227.1	372.5	294.3	238.4
165°	600.8	474.7	384.5	630.8	498.4	403.7
180°	690.5	545.5	441.9	725.0	572.8	464.0

θ	Bending strain ($\times 10^6$), $\lambda=3.0$					
	R=200 mm			R=210 mm		
	t=8 mm	t=9 mm	t=10 mm	t=8 mm	t=9 mm	t=10 mm
0°	-252.8	-199.7	-161.8	-265.4	-209.7	-169.9
15°	-300.3	-237.3	-192.2	-315.3	-249.1	-201.8
30°	-219.9	-173.7	-140.7	-230.9	-182.4	-147.8
45°	-50.0	-39.5	-32.0	-52.5	-41.5	-33.6
60°	149.9	118.4	95.9	157.4	124.3	100.7
75°	315.1	249.0	201.7	330.9	261.4	211.7
90°	393.4	310.8	251.7	413.0	326.3	264.3
105°	359.2	283.8	229.9	377.1	298.0	241.4
120°	220.7	174.3	141.2	231.7	183.1	148.3
135°	16.9	13.3	10.8	17.7	14.0	11.3
150°	-193.8	-153.1	-124.0	-203.5	-160.8	-130.2
165°	-350.7	-277.1	-224.4	-368.2	-290.9	-235.6
180°	-408.5	-322.8	-261.4	-428.9	-338.9	-274.5

Table 4 Shear force of a ring

θ	Shear force (N)					
	$\lambda=2.5$	$\lambda=2.6$	$\lambda=2.7$	$\lambda=2.8$	$\lambda=2.9$	$\lambda=3.0$
0°	50.0	50.0	50.0	50.0	50.0	50.0
15°	-113.4	-206.7	815.6	86.0	29.6	8.8
30°	-154.7	-316.3	1454.5	190.8	93.3	57.2
45°	-161.4	-347.9	1696.9	237.8	125.3	83.8
60°	-130.4	-291.8	1479.1	215.7	118.3	82.5
75°	-68.5	-161.6	861.0	131.7	75.6	55.0
90°	9.3	9.5	9.6	9.8	9.9	10.1
105°	83.7	177.0	-845.4	-115.8	-59.5	-38.7
120°	136.0	297.4	-1473.6	-210.1	-112.7	-76.9
135°	153.1	339.4	-1705.6	-246.8	-134.4	-93.2
150°	130.8	292.2	-1478.9	-215.6	-118.3	-82.6
165°	75.0	168.2	-854.4	-125.0	-68.9	-48.3
180°	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

은 모두 외력이 작용하는 위치에서 50 N으로 계산되며 그 반대위치에서의 전단력은 없는 것으로 계산되었다. 그리고 전단력의 크기는 외력의 작용선과 45°, 135°되는 부근에서 가장 크게 나타남을 알 수 있다.

4. 결 론

이 연구에서는 반경에 비하여 두께가 비교적 작은 원환의 자유상태에서, 원환의 한 점에 조화 집중하중이 작용하는 경우에 대하여 이론적인 해를 구하였다. 단위 더블릿 함수(unit doublet function)를 이용하여 운동방정식을 구성하였으며, 라플라스 변환을 이용하여 조화 집중하중에 대한 변위와 굽힘모멘트의 주파수응답특성을 구하였다. 변위의 진폭을 결정짓는 변수는 λ 와 f 이며 굽힘모멘트의 진폭을 결정짓는 변수는 λ 와 f . RF 임을 파악하였다. 원환의 여러 점에 서로 다른 진동수를 갖는 조화력이 동시에 작용하는 경우의 응답은 중첩성을 이용하여 계산할 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

(1) Hu, J. H., Li, H. L., Chan, H. L. W. and Choy, C. L. 2001. "A Ring-shaped Piezoelectric Transformer Operating in the Third Symmetric Extensional Vibration Mode". Sensors and Actuators,

Vol. 88, pp. 79~86.

(2) 김창부, 최상현, 2002, "마이크로 3축 링 자이로스코프의 동역학", 한국소음진동공학회논문집, 제 12 권, 제 12 호, pp.1001~1009.

(3) Strutt, J. W. and Rayleigh, B., 1945. The Theory of Sound, First American Edition, Dover Publications Inc., New York.

(4) Love, A. E. H., 1944, A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Dover Publications Inc., New York.

(5) Allaei, D., Sodel, W. and Yang, T. Y., 1986. "Natural Frequencies and Modes of a Rings that Deviate from Perfect Axisymmetry", Journal of Sound and Vibration, Vol. 111, No. 1, pp. 9~27.

(6) Allaei, D., Sodel, W. and Yang, T. Y., 1987, "Eigenvalues of Rings with Radial Spring Attached". Journal of Sound and Vibration, Vol. 121, No. 3, pp. 547~561.

(7) 홍진선, 김석현, 이장무, 1987, "집중질량을 가지는 원환의 자유진동 해석", 대한기계학회논문집, 제 11 권, 제 1 호, pp.170~176.

(8) Williams, H. E., 1987, "On the in-Plane Motion of Thin, Rotating Ring Segments". Journal of Sound and Vibration, Vol. 115, pp. 65~81.

(9) Hwang, R. S., Fox, C. H. J. and McWilliam, S., 1999, "The In-plane Vibration of Thin Rings with In-plane Profile Variations Part I : General Background and Theoretical Formulation", Journal of Sound and Vibration, Vol. 220, pp. 497~516.

(10) Fox, C. H. J., Hwang R. S., and McWilliam, S., 1999, "The In-plane Vibration of Thin Rings with In-plane Profile Variations Part II : Application to Nominally Circular Rings", Journal of Sound and Vibration, Vol. 220, pp. 517~539.

(11) Kovács, B., 2001, "Free Vibration of a Laminated Circular Ring Segment". Journal of Sound and Vibration, Vol. 245, pp. 653~667.

(12) Sodel, W., 1981, Vibrations of Shells and Plates, Marcel Dekker, Inc., New York.

(13) Blevins, R. D., 1979. Formulus for Natural Frequency and Mode Shape, Van Nostrand Reinhold, New York.