

# 마찰기인 접촉 강성을 가지는 2-자유도계 면외 방향 진동 시스템의 선형 안정성 해석

## Linear Stability Analysis of an Out-of-plan Motion of Vibration of a Two Degree-of-freedom with Contact Stiffness

조용구\* · 신기홍\*\* · 이현영\*\*\* · 오재응† · 이수갑\*\*\*\*

Yong-goo Joe, Ki-hong Shin, Hyun-young Lee, Jae-Eung Oh and Su-Gab Lee

(2004년 9월 17일 접수 : 2005년 2월 18일 심사완료)

**Key Words** : Out-of-plane Motion(면외방향운동), Contact Stiffness(접촉 강성), Negative Stiffness(음의 강성), Friction(마찰)

### ABSTRACT

A two-degree-of-freedom out-of-plane model with contact stiffness is presented to describe dynamical interaction between the pad and disc of a disc brake system. It is assumed that the out-of-plane motion of the system depends on the friction force acting along the in-plane direction. Dynamic friction coefficient is modelled as a function of both in-plane relative velocity and out-of-plane normal force. When the friction coefficient depends only on the relative velocity, the contact stiffness has the role of negative stiffness. The results of stability analysis show that the stiffness of both pad and disc is equally important. Complex eigen value analysis is conducted for the case that the friction coefficient is also dependent on the normal force. The results further verify the importance of the stiffness. It has also been found that increasing the gradient of friction coefficient with respect to the normal force makes the system more unstable.

### 기 호 설 명

$\beta$  : 수직항력에 관한 마찰계수의 기울기  
 $\delta$  : 평형점에서의 정적 변위  
 $F_f$  : 마찰력  
 $k_c$  : 접촉 강성

$[K_0]$ :  $\mu=0$  일 때의 강성 행렬  
 $\bar{k}_1$ : 디스크의 정규화된 강성  
 $\bar{k}_2$ : 패드의 정규화된 강성  
 $[K_c]$ : 접촉 강성 행렬  
 $\mu(N)$ : 면외 수직항력 의존 동마찰 계수  
 $\mu(v_r)$ : 면내 상대속도 의존 동마찰 계수  
 $m_1, c_1, k_1$ : 패드의 질량, 감쇠, 강성  
 $m_2, c_2, k_2$ : 디스크의 질량, 감쇠, 강성  
 $N$ : 수직 항력  
 $v_r$ : 패드와 디스크의 상대 속도  
 $v_0$ : 디스크의 회전 속도  
 $y_p, y_d$ : 패드와 디스크의 변위

† 책임저자 : 정희원, 한양대학교 기계항공공학부  
E-mail : jeoh@ihanyang.ac.kr  
Tel : (02) 2294-8294, Fax : (02) 2299-3153  
\* 정희원, 서울대학교 기계항공공학부  
\*\* 정희원, 안동대학교 기계공학부  
\*\*\* 한양대학교 대학원 자동차공학과  
\*\*\*\* 정희원, 서울대학교 기계항공공학부

## 1. 서 론

디스크 브레이크의 동적 불안정성은 마찰면에서의 마찰 상호작용에 의해 유발되는 자력진동(self-excited oscillation)과 밀접한 관계가 있다. 이것의 가장 일반적인 현상이 브레이크 스컬 노이즈이다. 이런 소음의 발생은 이 소음의 제거를 어렵게 하는 풀기 어려운 현상이다. 마찰 기인 디스크 브레이크 노이즈의 가장 영향력 있는 요인은 접촉면에서의 마찰 메커니즘일 수도 있고 브레이크 작용력이 시스템에 부과될 때 마찰력을 대표하는 마찰계수의 모델링일 수도 있다. 디스크 브레이크 노이즈의 안정성 해석은 지난 몇 십년 동안 심도있게 연구되어 왔다. 이들 연구들의 대부분이 유한요소해석법(FEM)에 기반을 두고 있다.<sup>(1~5)</sup> 또한 해석적인 모드 중첩법이 Ouyang와 Mottershead<sup>(6,7)</sup>에 의하여 연구되어 왔다. 이들 논문에서는 수치적 또는 수학적으로 불안정성의 영역을 얻었으나, 이들 방법들은 일반적으로 많은 자유도와 복잡한 표현들을 구성하기 위하여 많은 상수들을 고려해야 한다.

결과적으로, 물리적 의미를 가진 결과들을 유도하는 것 뿐 아니라 마찰 메커니즘의 기본적인 역할조차 발견하기 어렵게 한다. 따라서, 브레이크 시스템의 메커니즘의 기본적인 동역학을 묘사하기 위한 단순한 모델의 개발이 상당히 요구된다.

최근, Shin et al<sup>(11)</sup>은 패드와 디스크 사이의 'one mode' 상호작용을 묘사하는 2자유도 모델을 소개하고 있다. 이것은 마찰 메커니즘이 면내진동에서 음의 감쇠로서 작용하고 패드와 디스크의 감쇠 모두가 음의 감쇠의 효과를 억제할 만큼 충분히 커야만 한다는 것을 보여주고 있다. 그러나, 이 모델은 단지 면내 동역학만 고려하므로 일반적인 노이즈 문제와 직접적인 관련이 없을 수도 있다. 따라서, 이번 논문에서는 면외 운동에서의 접촉면의 역할을 찾기 위하여 2자유도 면외 모델을 제시하였다. 마찰 계수가 면내 상대속도와 면외 수직력 둘 모두에 의존한다고 가정된다. 그러므로 디스크 브레이크 시스템의 면내와 면외의 진동 사이의 관계를 묘사할 수 있다.

면내방향 운동모델과는 현저히 틀리게 마찰 메커니즘은 면외 진동에서 음의 감쇠항으로서 작용한다. 만약 마찰계수가 단지 상대속도의 함수라면 (이 연구

에서는 ' $\mu$ -시스템'이라고 명명한다.) 안정성 분석이 시스템의 스컬 상태에 대한 조건들을 찾기 위하여 수행 되었다. 이 결과들은 감쇠가 중요한 변수들이 아니고, 반면에 면외 진동에서의 감쇠는 음의 감쇠 효과를 극복하기 위한 필수적인 요소이다.

만약 마찰계수 또한 수직력에 의존한다면, 시스템 변수들의 변화로서 특성 방정식에서 시스템이 정성적으로 다른 복소근을 가지는 비대칭 감쇠항이 존재하게 된다. 이런 경우 변수  $\beta$ 가 수직력의 관점에서 마찰계수의 편미분으로 소개되고 이 연구에서는 ' $\mu\beta$ -system'이라고 명명하였다. 변수  $\beta$ 는 얼마나 민감하게 마찰 상수가 수직력에 의존하는지 묘사하기 위한 중요한 요소이고 시스템의 안정성에 큰 영향을 미친다.  $\beta$ 의 향으로 시스템의 안정성을 조사하기 위하여 복소 고유치 해석이 수행된다.

이 결과들은 감쇠가 면외 진동을 조절하기 위한 가장 효과적인 변수가 될 수 있고, 패드와 디스크의 감쇠가 동등하게 중요하다는 사실을 확인시켜 준다.

## 2. 자유도 면외 모델과 안정성 분석

Fig. 1에서 보여진 면외 모델을 고려해 보자. 이 모델은 미끄럼 마찰면과 접촉 강성을 통하여 연결된 2자유도 시스템으로써 패드와 디스크를 나타내고 있으며 동적 마찰계수가 면내 상대 속도와 면외 수직력에 의존한다고 가정된다. 다시 말해서,  $\mu(v_r, N)$ . 경계면 상에 작용하는 수직력은 수직 상대변위에 따라 변하고,  $N(y)$  값은 수직변위는 접촉 강성  $k_c$ 에 의해 영향

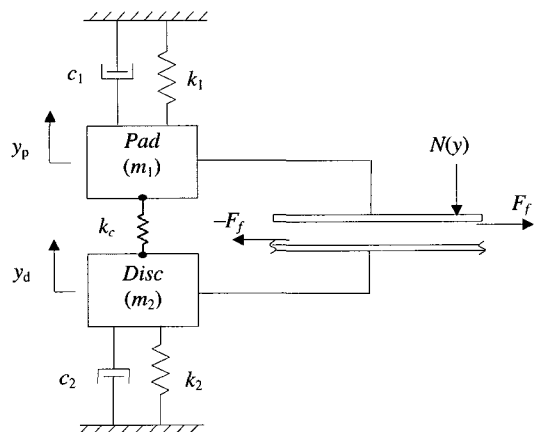


Fig. 1 Two-degree-of-freedom out-of-plane model

을 받는다. 여기서 마찰력의 합력  $F_f$ 가 면내 방향을 따라 작용한다는 것에 주목해야 한다. 따라서, 이 모델이 마찰 계수의 변화에 따라 면내 운동이 면외 운동에 얼마나 영향을 주는지 묘사하게 된다.

운동 방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$[M]\{\ddot{y}\} + [C]\{\dot{y}\} + [K + K_c(y)]\{y\} = 0 \quad (1)$$

여기서,  $[M]$ ,  $[C]$ ,  $[K]$  그리고  $[K_c]$ 는 각각 질량, 감쇠, 강성, 그리고 접촉강성 행렬을 나타내고  $\{y\}$ 는 수직 변위 벡터이다. 이 경우에 수직력은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$N(y) = k_c(y_p - y_d) \quad (2)$$

따라서, 마찰력은

$$F_f = -\mu(v_r, N) \cdot k_c \cdot (y_p - y_d) \quad (3)$$

이 된다. 여기서  $v_r$ 은 면내 방향을 따라 패드와 디스크 사이의 상대 속도이다. 마찰력이 수평축을 따라 작동함에도 불구하고 이것은 수직 상대 변위에 의존한다. 결과로서 마찰력의 영향은 접촉강성에 포함된다. 선형화된 접촉 강성 행렬은 식 (4)에 의해 확인할 수 있다.

$$[K_c] = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_f}{\partial y_p} & -\frac{\partial F_f}{\partial y_p} \\ -\frac{\partial F_f}{\partial y_d} & \frac{\partial F_f}{\partial y_d} \end{bmatrix} \quad (4)$$

여기서,

$$\frac{\partial F_f}{\partial y_p} = -\frac{\partial \mu}{\partial y_p} k_c \cdot (y_p - y_d) - \mu k_c,$$

$$\frac{\partial F_f}{\partial y_p} = -\frac{\partial \mu}{\partial y_p} k_c \cdot (y_p - y_d) - \mu k_c,$$

$$\frac{\partial F_f}{\partial y_p} = -\frac{\partial \mu}{\partial y_p} k_c, \quad \frac{\partial F_f}{\partial y_d} = -\frac{\partial \mu}{\partial y_d} k_c$$

따라서, 접촉 강성 행렬은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$[K_c] = -\mu(v_r, N) \begin{bmatrix} k_c & -k_c \\ -k_c & k_c \end{bmatrix}$$

$$-k_c \begin{bmatrix} \frac{\partial \mu}{\partial N} k_c (y_p - y_d) & -\frac{\partial \mu}{\partial N} k_c (y_p - y_d) \\ \frac{\partial \mu}{\partial N} k_c (y_p - y_d) & -\frac{\partial \mu}{\partial N} k_c (y_p - y_d) \end{bmatrix} \quad (5)$$

만일 마찰계수가 수직력의 변화에 의해 크게 영향을 받지 않는다면 기울기  $\frac{\partial \mu}{\partial N}$ 는 0으로 접근한다. 이런 경우에 마찰 계수는 단지 상대속도만의 함수로 가정될 수 있다. 다시 말해  $\mu(v_r)$ , 따라서 접촉강성 행렬은 다음과 같이 된다.

$$[K_c] = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_f}{\partial y_p} & -\frac{\partial F_f}{\partial y_p} \\ -\frac{\partial F_f}{\partial y_d} & \frac{\partial F_f}{\partial y_d} \end{bmatrix} = -\mu(v_r) \begin{bmatrix} k_c & -k_c \\ -k_c & k_c \end{bmatrix} \quad (6)$$

마찰계수가 항상 양(+)이라면,  $\mu(v_r) > 0$ , 대칭 접촉 강성 행렬  $[K_c]$ 에서 강성 요소들은 모두 음의 강성으로서 작용한다. 접촉 강성을 가진 시스템을 편의상 이 논문에서는 ‘ $\mu$ -시스템’이라고 하겠다. 이런 경우에 운동 방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_p + c_1 \dot{y}_p + (k_1 - \mu(v_r)k_c) y_p + \mu(v_r)k_c y_d &= 0 \\ m_2 \ddot{y}_d + c_2 \dot{y}_d + (k_2 - \mu(v_r)k_c) y_d + \mu(v_r)k_c y_p &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

식 (7)을 기본으로 하여, 이 시스템은 Fig. 2와 같이 다시 그릴 수 있다.

이 그림은 항  $\mu(v_r)k_c$  음의 강성으로 작용하는 가장 중요한 요소라는 것을 보여준다. 따라서 시스템의 강성 요소들이 음의 강성 영향을 억제하기 위해 조절되어야 한다는 것을 보여줄 수 있다. 여기서, 마찰계수가 면내 상대 속도에 의존하는 것에 주목하고, 면외 방향에서 음의 강성항을 구성한다. 그러므로 마찰 계수의 변화를 통하여 면내진동은 면외운동에 영향을 미친다고 생각할 수 있다. 속도 의존적인 마찰 계수  $\mu(v_r)$ 는 면내 상대 속도 변화들에 따라 변화 한다고

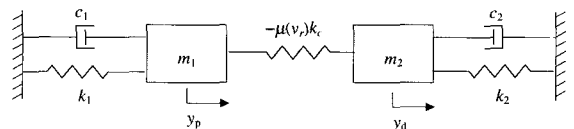


Fig. 2 Modified two-degree-of-freedom out-of-plane model

할 수 있다. 만일  $\mu(v_r)$ 가 양수가 된다고 가정한다면, 선형 안정성 해석이 수행될 수 있다. 안정성 해석을 위하여 특성방정식은 다음과 같이 된다.

$$\det \begin{bmatrix} \lambda^2 + c_{11}\lambda + k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & \lambda^2 + c_{22}\lambda + k_{22} \end{bmatrix} = 0 \quad (8)$$

여기서,

$$c_{11} = \frac{c_1}{m_1}, c_{22} = \frac{c_2}{m_2}, k_{11} = \frac{k_1 - \mu k_c}{m_1}$$

$$k_{22} = \frac{k_2 - \mu k_c}{m_2}, k_{12} = \frac{\mu k_c}{m_1}, k_{21} = \frac{\mu k_c}{m_2}$$

식 (8)은  $\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0$ 의 형태이다. 그러므로 불안정성의 조건들은 참고문헌 (11)에서와 같은 방법을 사용함으로써 쉽게 얻을 수 있다. 그러나 이 논문에서 다소 다른 접근법이 안정성의 기준을 유도하기 위해 사용되었다.

시스템의 안정성이 강성 요소들에 크게 때문에 안정성에 초점을 둘 때는 시스템의 감쇠 요소들은 고려하지 않을 수 있다.

만일 감쇠요소의 값이 0이라면, 특성방정식은 다음과 같이 나타난다.

$$\lambda^4 + (k_{11} + k_{22})\lambda^2 + k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21} = 0 \quad (9)$$

따라서 이 시스템이 항상 안정될 수 있는 조건들은 각각 식 (10)과 식 (11)로 나타낼 수 있다.

$$m_2 \left( \frac{k_1}{\mu k_c} \right) + m_1 \left( \frac{k_2}{\mu k_c} \right) > m_1 + m_2 \quad (10)$$

$$\left( \frac{k_1}{\mu k_c} \right) + \left( \frac{k_2}{\mu k_c} \right) \geq \left( \frac{k_1}{\mu k_c} \right) \left( \frac{k_2}{\mu k_c} \right) \quad (11)$$

여기서  $\mu k_c$ 가 강성계수가 같은 단위를 가지고 있기 때문에  $\mu k_c$ 의 관점에서 정규화된 강성  $\bar{k}_1$  and  $\bar{k}_2$ 가 도입되었고, 식 (10)과 식 (11)은 다음과 같이 된다.

$$\left( \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) \bar{k}_1 + \left( \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) \bar{k}_2 > 1 \quad (12)$$

$$\frac{1}{\bar{k}_1} + \frac{1}{\bar{k}_2} \leq 1 \quad (13)$$

여기서  $\bar{k}_1 = \frac{k_1}{\mu k_c}$  and  $\bar{k}_2 = \frac{k_2}{\mu k_c}$ 이다. 따라서 부등식 (12)과 식 (13)으로부터 단순화된 안정성 조건을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\bar{k}_1 + \bar{k}_2 \leq \bar{k}_1 \bar{k}_2 \quad (14)$$

식 (12)로부터 여러 개의 직선들 ( $\bar{k}_1$  versus  $\bar{k}_2$ )가  $m_1$ 과  $m_2$ 의 다양한 값들에 대하여 도시화 될 수 있다. 이 그림들은 Fig. 3(a)에서 확인 할 수 있다. 안정성조건을 만족하는 곡선  $\frac{1}{\bar{k}_1} + \frac{1}{\bar{k}_2} = 1$ 은 이 그림에서 볼 수 있다. (식 (13)과 식 (14) 참조) 이 곡선들

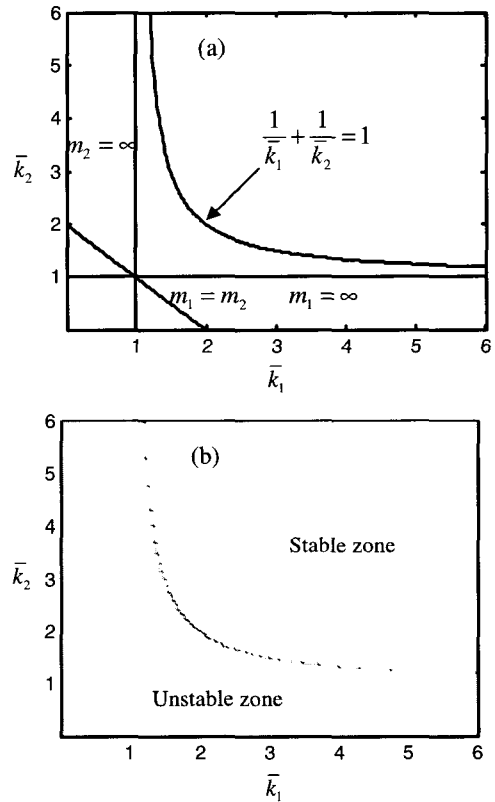


Fig. 3 (a) Plots of for various values of  $m_1$  and  $m_2$  (b) Stability area using the Routh-Hurwitz criterion for any values of mass and damping

이 안정과 불안정 영역 사이의 경계조건을 형성한다. 또한 시스템의 안정성은 질량 요소들에 의존하지 않는다는 것을 확인 할 수 있다. 안정성 조건은 더욱이 수치적 시뮬레이션에 의해 확인된다. Routh-Hurwitz 판별식이 참고문헌 (11)에서와 같은 방법을 사용하여 식 (8)에 직접적으로 적용된다. 다양한 변수 조건들에 대한 시스템의 안정성이 조사되었고, 그 결과는 Fig. 3(b)에서 확인할 수 있다. 여기서 Fig. 3(a)에서의 곡선  $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = 1$ 이 Fig. 3(b)에서 안정성 경계와 부합하는 사실에 주목해야 하고 이 결과들이 질량과 강성 값들과는 상관없이 항상 같다는 것을 알 수 있다.

다르게 표현하면, 면내진동의 경우와는 틀리게 시스템의 안정성은 감쇠요소 또는 질량에 의존하지 않는다. Fig. 3(a)와 Fig. 3(b)를 살펴보면 식 (14)에서 주어진 안정성 조건은 패드와 디스크의 강성이 동등하게 중요하게 작용한다는 사실을 확인할 수 있다. 예를 들면 패드 또는 디스크의 강성이 무한대로 증가한다 할지라도 정규화된 패드 또는 디스크의 강성이 1 이하라면 시스템의 항상 불안정하다. 이 사실은 패드와 디스크의 강성 모두 음의 강성의 영향을 억제하기 위해 충분히 커져야 한다는 것을 의미한다.

### 3. 복소 고유치 해석과 갈래질

이전 장에서 단지 마찰 계수는 면내 상대 속도에 의존한다고 가정하였다. 그러나 마찰 상수가 상대속도와 수직력의 함수라면 접촉 강성의 비대칭 행렬 부분은 고려되어야 한다. 식 (5)에서 이런 경우에 기울기  $\frac{\partial \mu}{\partial N}$ 는 시스템의 안정성에 큰 영향이 있고 매우 중요한 변수이다. 여기서 이와 같은 시스템을 'μβ-시스템'이라 하고 편의상  $\beta = \frac{\partial \mu}{\partial N}$ 이라고 한다. 이 장에서 비대칭 강성 행렬을 고려하므로 갈래질과 같은 동역학에서의 정성적인 변화를 변수 β를 변화 시키면서 조사하였다. 이런 모델(식 (1))은 일반적으로 복소값을 가지므로 근의 실수부대 허수부의 그래프인 근 궤적 다이어그램상에 표현할 수 있다. 이것들이 우선적으로 관찰하고 이에 부합되는 갈래질 선도 또한 조사하였다.

면의 수직력과 면내 상대 속도는 각각 독립적이라

고 가정하고 마찰계수는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mu(v_r, N) = \mu(v_r) \mu(N) \tag{16}$$

따라서 속도 의존의 마찰계수  $\mu(v_r)$ 와 수직력에 의존하는 마찰 계수  $\mu(N)$ 를 분리하여 생각할 수 있다.  $\mu(v_r)$ 는 낮은 속도의 영역에서 일정하다고 가정할 수 있고 여기서 편의상  $\mu(v_r)=1$ 로 한다. 그러면 마찰 계수 행렬은 다음과 같이 된다.

$$[K_c] = -\mu(N) \begin{bmatrix} k_c & -k_c \\ -k_c & k_c \end{bmatrix} - k_c \begin{bmatrix} \beta k_c (y_p - y_d) & -\beta k_c (y_p - y_d) \\ \beta k_c (y_p - y_d) & -\beta k_c (y_p - y_d) \end{bmatrix} \tag{17}$$

여기서 접촉 강성 행렬은 대칭 음의 강성 부분과 비대칭 부분으로 구성되었다. 여기서  $y_p - y_d$ 는 평형

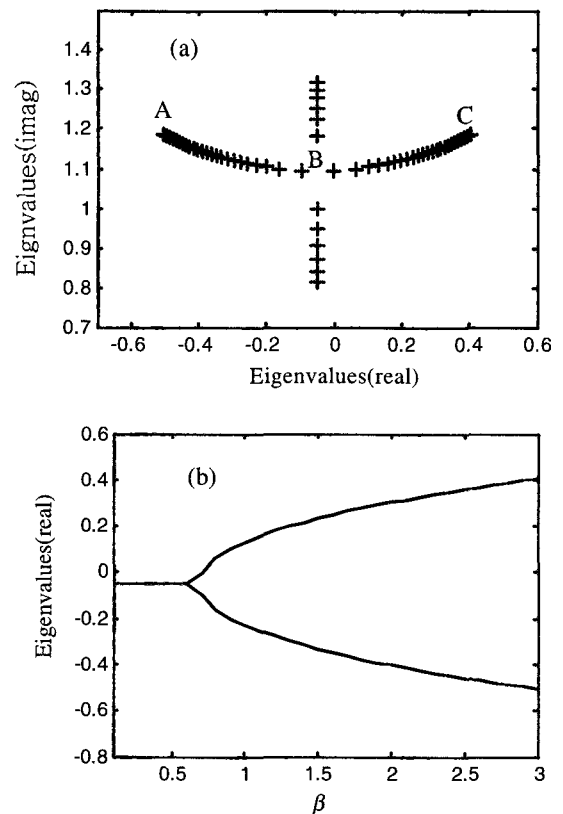
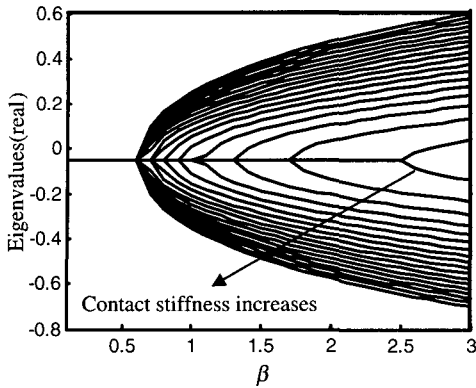
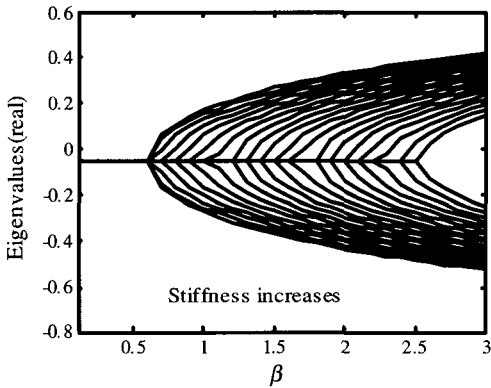


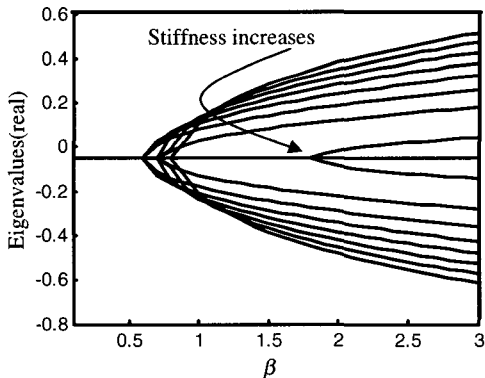
Fig. 4 (a) Complex eigenvalues (b) Bifurcation diagram ( $k_c=0.5, k_1=1, k_2=2, m_1 = m_2=1, c_1 = c_2=0.1$ )



**Fig. 5** Bifurcation diagrams for various values of contact stiffness ( $k_1 = 1, k_2 = 2, m_1 = m_2 = 1, c_1 = c_2 = 0.1, k_c = 0.05 \sim 1$ )



**Fig. 6** Bifurcation diagrams when both stiffness parameters ( $k_1, k_2$ ) are increased ( $k_c = 0.5, k_2 = 2k_1, m_1 = m_2 = 1, c_1 = c_2 = 0.1, k_1 = 0.5 \sim 5$ )



**Fig. 7** Bifurcation diagrams when only one stiffness parameter ( $k_1$ ) is increased ( $k_c = 0.5, k_2 = 2, m_1 = m_2 = 1, c_1 = c_2 = 0.1, k_1 = 0.5 \sim 5$ )

상태에서의 패드와 디스크의 상대 변위이다 이런 경우에 복소 고유치는 시스템을 불안정하게 만드는 주된 요소들을 찾으므로 수치적으로 얻어진다. 복소 고유치가 얻어진 후에 근궤적 다이어그램상에 도식화 된다.

예를 들어 Fig. 4(a)에서 처럼 초기에는 복소 고유치는 점 B에 수렴하고 변수  $\beta$ 가 증가함에 따라 갈라지게 된다. 하나의 근은 2사분면에 존재하고 다른 하나는 1사분면으로 이동한다. 곡선 A-B-C를 따라 위치한 근들은 대칭적으로 점 B근방에 위치한다. 이것은 두개의 분리된 모드들이 연성되어 있는 것을 나타낸다. Fig. 4(b)는 고유치의 실수부가  $\beta$ 가 어떤 점에 도달할 때 까지  $\beta$ 가 증가함에 따라 일정하게 유지된다는 것을 보여주고 반대 방향으로 분리된다는 것을 보여준다. 양의 방향의 것은 불안정 영역 조건을 나타낸다. 갈래질은 시스템의 불안정성의 확률을 나타내기 때문에  $\beta$ 가 접촉 강성  $k_c$ 와 더불어 시스템의 안정성에 큰 역할을 한다는 것을 보여준다.

접촉 강성의 효과는  $\beta$ 를 0부터 3까지 변화시키면서 조사되었다. 여기서  $\mu(N) = 0.6$ 의 일정한 값이 사용되었다. Fig. 5는 0.05부터 1사이의 접촉 강성 영역의 다양한 값들에 대한 갈래질의 양상을 보여준다. 분석 결과 접촉 강성이 클수록 더 빨리 갈래질이 발생하는 것을 보여주고 접촉강성의 증가함에 따라 시스템은 더욱 불안정하게 된다는 것을 암시한다.

강성이 가장 중요한 요소이기 때문에 시스템의 강성인자의 효과에 대하여 보다 자세하게 조사하였다. 패드와 디스크의 강성이 동시에 증가할 때, 갈래질 위치는 오른쪽으로 이동하고 시스템은 안정하게 된다. Fig. 6은 이 내용을 보여준다.

그러나 예를 들어 패드에서 강성이 단지 한쪽 면의 시스템에서 증가된다면 초기에 갈래질 위치는 왼쪽으로 이동하고 Fig. 7에서 보여진 것처럼 강성이 더욱 증가할수록 오른쪽으로 이동한다. 여기서 왼쪽으로의 갈래질 위치의 이동은 시스템안정성에 나쁜 영향을 주는 것을 의미한다. 이런 부정적인 효과에도 불구하고, Fig. 7은 패드 또는 디스크의 강성의 크게 증가한다면 ' $\mu\beta$ -시스템'을 더욱 안정하게 만들 수 있는 가능성을 보여준다. 이 결과는 이전 장에서의 안정성 결과와 미세한 차이를 보여준다. 이 안정성 한계(식 (16))는 만약 한쪽의 강성이 너무 작다면 단지 다른 쪽의 강성을 증가시켜 ' $\mu$ -시스템'을 안정하게 만드는 것은 불가능하다는 사실을 말해준다. Fig. 6과 Fig. 7

에서 보여진 결과로부터 강성보강은 면외 방향 운동에서 불안정성을 피하기 위해 고려되어야 한다는 것을 알 수 있다. 또한 패드와 디스크의 강성이 동시에 증가할 때 가장 효과적임을 보여준다.

#### 4. 결 론

2자유도 마찰기인 진동 모델이 디스크 브레이크 소음에 밀접한 관계가 있는 면외 방향 진동에서 마찰 메커니즘의 효과를 구현하기 위해서 소개 되었다. 선형 안정성 해석과 복소 불안정성 해석으로부터, 다음과 같은 결과를 얻어 내었다. 첫째, ' $\mu$ -시스템' 안정성 기준을 유도하였고, 그것이 디스크와 패드 양쪽의 강성 값이 음의 강성의 영향을 억제하기 위하여 충분히 커야 한다는 것을 제시하였다. 둘째, ' $\mu\beta$ -시스템'에 대해서, 시스템의 안정성을 좋게 하기 위해서는 패드 혹은 디스크의 한쪽 강성을 크게 하는 경우도 가능하나 안정성을 확실히 보장하기 위한 가장 효과 적인 방법은 역시 패드와 디스크의 강성을 동시에 증가 시키는 것이다.

#### 후 기

이 연구는 BK-21프로젝트의 지원하에 이루어진 것입니다.

#### 참 고 문 헌

(1) Lee, Y. S., Brooks, P. C., Barton, D. C. and Crolla, D. A., 1999, "A Study of Disc Brake Squeal Propensity Using a Parametric Finite Element Model", Proceedings of ImechE 98, pp.191~201.  
 (2) Liies, G. D., 1989, Analysis of Disc Brake Squeal Using Finite Element Methods, SAE Paper 891150, pp.1138~1146.  
 (3) Matsui, H., Murakami, H., Nakanishi, H. and Tsuda, Y., 1992, Analysis of Disc Brake

Squeal, SAE Paper 920553, pp.15~24.  
 (4) Nack, W. V., 1999, Brake Squeal Analysis By Finite Elements, SAE Paper 1999-01-1736.  
 (5) Park, C., Han, M. G., Cho, S. S., Choi, H. G., Jeong, J. D. and Lee, J. M., 2001, A Study on the Reduction of Disc Brake Squeal Using Complex Eigenvalue Analysis, Proceedings of the 19th Annual Brake Colloquium and Exhibition SAE 2001-01-3141.  
 (6) Ouyang, H., Mottershead, J. E., Cartmell, M. P. and Friswell, M. I., 1998, Friction-induced Parametric Resonances in Discs : Effect of a Negative Friction-velocity Relationship, Journal of Sound and Vibration 209, pp.251~264.  
 (7) Ouyang, H. and Mottershead, J. E., 2001, Unstable Traveling Waves in the Friction-induced Vibration of Discs, Journal of Sound and Vibration 248 pp.768~779.  
 (8) Krupka, R., Walz, T. and Etemeyer, A., 2000, New Techniques and Applications for 3d-brake Analysis, Dr. Ettemyer Application Report No. 04-00.  
 (9) Fieldhouse, J. D. and Newcomb, T. P., 1993, An Experimental Investigation into Disc Brake Noise, Proceedings of IMechE C444/036/93 pp.145~159.  
 (10) Cunefare, K. A. and Ryan, R., 2001, Investigation of Disc Squeal via Sound Intensity and Laser Vibrometry, Sae Paper 2002-01-1604.  
 (11) Shin, K., Brennan, M. J., Oh, J.-E. and Harris, C. J., 2002, Analysis of Disc Brake Noise Using a Two-degree-of-freedom Model, Journal of Sound and Vibration, 254 pp. 837~848.  
 (12) Shin, K., Brennan, M. J., Joe, Y. -G. and Oh, J.-E., 2003, The Effect of Velocity Dependent Friction Coefficient of the Disc Brake Noise, Internoise.