

이중크랙을 가진 외팔 파이프의 동특성에 미치는 끝단질량과 이동질량의 영향[#]

Influence of Tip Mass and Moving Mass on Dynamic Behavior of Cantilever Pipe with Double-crack

손인수* · 윤한익†

In-Soo Son and Han-Ik Yoon

(2005년 2월 14일 접수 ; 2005년 3월 14일 심사완료)

Key Words : Cantilever Pipe(외팔 파이프), Double-crack(이중크랙), Dynamic Behavior(동특성), Flexibility Matrix(유연행렬), Moving Mass(이동질량), Tip Mass(끝단질량)

ABSTRACT

In this paper a dynamic behavior of a double-cracked cantilever pipe with the tip mass and a moving mass is presented. Based on the Euler-Bernoulli beam theory, the equation of motion is derived by using Lagrange's equation. The influences of the moving mass, the tip mass and double cracks have been studied on the dynamic behavior of a cantilever pipe system by numerical method. The cracks section are represented by the local flexibility matrix connecting two undamaged beam segments. Therefore, the cracks are modelled as a rotational spring. This matrix defines the relationship between the displacements and forces across the crack section and is derived by applying fundamental fracture mechanics theory. We investigated about the effect of the two cracks and a tip mass on the dynamic behavior of a cantilever pipe with a moving mass.

1. 서론

크랙은 구조물의 불안정을 증대시켜 구조물의 진동 특성과 안정성을 변화시키는 주요 원인이 되며, 이동 질량은 그 이동위치 및 속도에 따라 구조물의 응답특성에 큰 영향을 미친다.^(1~1) 이처럼 구조물의 진동특성에 큰 영향을 미치는 요소인 크랙은 실제로 구조물에서 2개 이상 존재할 가능성이 있으며 이로 인하여

더욱 복잡한 진동현상을 수반하게 된다. 따라서 2개 이상의 크랙이 존재하는 경우 각 크랙의 위치와 크기에 따른 상호 연성관계에 의한 구조물의 동적특성을 파악하는 것은 구조물의 안정성 확보에 중요한 문제라 할 수 있다. 크랙과 중동력을 고려한 보에 대한 연구는 티모셴코 보 이론을 적용하여 크랙과 중동력이 보의 동적 안정성 및 동적응답에 미치는 영향에 대한 연구결과⁽⁵⁾가 있으며, 크랙과 이동질량을 가진 보 형태 구조물의 응답 및 진동수 변화에 대한 많은 연구결과들이 발표되어지고 있다.^(6~9) 그러나 이들의 연구는 단일크랙(single crack)을 대상으로 한 경우가 대부분이며 2개의 크랙(double cracks)이 있는 보를 대상으로 한 연구는 그리 활발하지 않다. Ostashowicz 등⁽¹⁰⁾은 외팔보의 단면 및 양면에 2개의 개구형 크랙이 존재하는 경우를 가정하여 해석적인 방법으로 두 크랙의 위치 및 깊이를 변수로 1차

† 책임저자 : 정회원, 동의대학교 기계공학부

E-mail : hiyoon@dongeui.ac.kr

Tel : (051) 890-1645, Fax : (051) 890-2232

* 정회원, 동의대학교 대학원 기계공학과

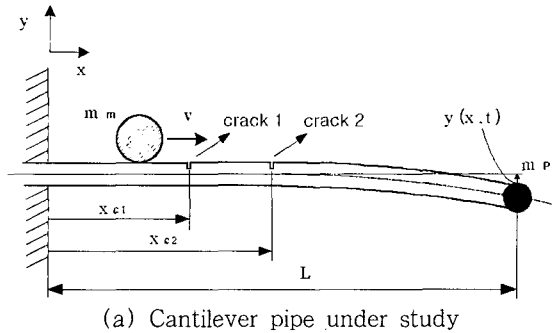
이 논문은 2004 추계학술대회 우수발표논문으로 추천되었음

고유진동수의 변화를 고찰하였으며, Sekhar⁽¹¹⁾는 단 순지지 상태의 금속재료의 로터에 대하여 유한요소해 석으로 2개의 횡방향 개구형 크랙의 상호 위치 및 깊이를 변수로 하여 고유진동수, 모드형상 및 위험속 도 한계 등을 분석하였다. 또 Douka 등⁽¹²⁾은 2개의 크랙이 존재하는 외팔보에 수직하중이 작용하는 경우 각 크랙의 크기에 따른 외팔보의 고유 진동수 변화를 예측하는 방법을 제시하였다.

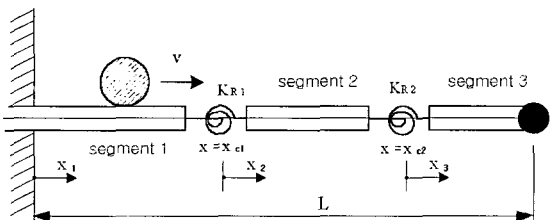
이 연구에서는 끝단질량 및 이동질량, 그리고 이중 크랙이 존재하는 경우 외팔 파이프의 진동특성에 대 하여 연구하였다. 즉 이동질량, 끝단질량의 크기 및 각 크랙의 위치와 크기가 외팔 파이프의 진동특성에 미치는 영향에 대하여 수치해석하였다. 외팔 파이프 의 해석은 오일러-베르누이 보 이론을 적용하였으며, 각각의 크랙은 비진전, 개구형 크랙이라 가정하였다.

2. 시스템 모델링

Fig. 1은 크랙과 끝단질량을 가진 외팔 파이프 위 를 이동질량이 일정한 속도로 이동하는 시스템을 나 타내고 있다. 여기서 m_m 은 외팔 파이프 위를 이동 하는 이동질량, v 는 이동질량의 속도, 그리고 L 은 외팔 파이프의 길이를 나타낸다. 또, x_{c1} , x_{c2} 는 첫 번째와 두 번째 크랙의 위치를 나타내며, m_p 는 끝단



(a) Cantilever pipe under study



(b) Double-cracked cantilever pipe model

Fig. 1 Geometry of the double-cracked cantilever pipe conveying fluid with a moving mass

질량이다. Fig. 2는 크랙이 존재하는 부분의 외팔 파 이프 단면을 표현한 것이다. 여기서 a_c , h , 그리고 $2b$ 는 각각 크랙의 최대 깊이와 크랙이 존재하는 외 팔 파이프 단면지름, 그리고 크랙 길이를 표현하고 있다. 또, θ_c 는 전체 크랙의 반각(half-angle)이다. 외팔 파이프에서 각 크랙의 위치를 기준으로 세 부분 으로 분리하여 모델링 하였으며, 크랙위치에서는 크 랙의 영향에 의한 파괴역학적 변수를 회전스프링 상 수들(K_{R1} , K_{R2})로 변환하여 수치해석에 이용하였다.

2.1 에너지 식

크랙을 가진 외팔 파이프의 횡변위는 가정모드법을 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$y_k(x, t) = \sum_{i=1}^{\mu} \phi_{ik}(x) a_i(t) \quad (1)$$

여기서 $a_i(t)$ 는 일반화 좌표, μ 는 모드의 수를 나 타내며, $k (= 1, 2, 3)$ 는 크랙으로 인한 분할구간의 수를 의미한다. 또, 외팔 파이프의 고유함수 $\phi_{ik}(x)$ 는 크랙이 존재하는 위치를 기준으로 다음과 같이 표 현할 수 있다.

I) Segment 1 : $0 \leq x \leq x_{c1}$

$$\begin{aligned} \phi_1(x) = & A_1 \cos(\lambda_i x) + A_2 \sin(\lambda_i x) \\ & + A_3 \cosh(\lambda_i x) + A_4 \sinh(\lambda_i x) \end{aligned} \quad (2-1)$$

II) Segment 2 : $x_{c1} \leq x \leq x_{c2}$

$$\begin{aligned} \phi_2(x) = & A_5 \cos(\lambda_i x) + A_6 \sin(\lambda_i x) \\ & + A_7 \cosh(\lambda_i x) + A_8 \sinh(\lambda_i x) \end{aligned} \quad (2-2)$$

III) Segment 3 : $x_{c2} \leq x \leq L$

$$\begin{aligned} \phi_3(x) = & A_9 \cos(\lambda_i x) + A_{10} \sin(\lambda_i x) \\ & + A_{11} \cosh(\lambda_i x) + A_{12} \sinh(\lambda_i x) \end{aligned} \quad (2-3)$$

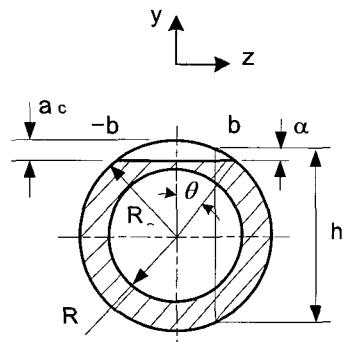


Fig. 2 Cross section of a cracked pipe

여기서 λ_i 는 끝단질량을 가진 외팔 파이프의 진동수 방정식에서 구할 수 있다(부록). 식 (2)에서 미지수 $A_1 \sim A_{12}$ 는 다음 식 (3)~(5)의 끝단질량을 가진 외팔 파이프의 끝단 경계조건 및 각 크랙 위치에서의 연속조건에 대입하여 구할 수 있다.

$$y_1(0, t) = 0, \quad \frac{dy_1(0, t)}{dx} = 0, \\ EI \frac{d^2 y_3(L, t)}{dx^2} = -J_o \frac{d^3 y_3(L, t)}{dx dt^2}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{d^2 y_3(L, t)}{dx^2} \right) = -m_p \frac{d^2 y_3(L, t)}{dt^2}$$

$$\phi_{\bar{n}}(x_{c1}) = \phi_{\bar{z}}(x_{c1}), \quad \frac{d^2 \phi_{\bar{n}}(x_{c1})}{dx^2} = \frac{d^2 \phi_{\bar{z}}(x_{c1})}{dx^2}, \\ \frac{d^3 \phi_{\bar{n}}(x_{c1})}{dx^3} = \frac{d^3 \phi_{\bar{z}}(x_{c1})}{dx^3}, \quad (4)$$

$$\frac{d\phi_{\bar{z}}(x_{c1})}{dx} - \frac{d\phi_{\bar{n}}(x_{c1})}{dx} = \frac{EI}{K_{R1}} \frac{d^2 \phi_{\bar{z}}(x_{c1})}{dx^2}$$

$$\phi_{\bar{z}}(x_{c2}) = \phi_{\bar{B}}(x_{c2}), \quad \frac{d^2 \phi_{\bar{z}}(x_{c2})}{dx^2} = \frac{d^2 \phi_{\bar{B}}(x_{c2})}{dx^2}, \\ \frac{d^3 \phi_{\bar{z}}(x_{c2})}{dx^3} = \frac{d^3 \phi_{\bar{B}}(x_{c2})}{dx^3}, \quad (5)$$

$$\frac{d\phi_{\bar{B}}(x_{c2})}{dx} - \frac{d\phi_{\bar{z}}(x_{c2})}{dx} = \frac{EI}{K_{R2}} \frac{d^2 \phi_{\bar{B}}(x_{c2})}{dx^2}$$

여기서 J_o 는 끝단질량의 관성모멘트를 나타낸다. Fig. 1에서 보인 계를 구성하는 외팔 파이프와 이동질량의 에너지식을 구하면 각각 다음과 같다.

$$T_p = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^n \left\{ \int_0^{x_{c1}} \{ \phi_{\bar{n}}(x) \dot{q}_i(t) \}^2 dx \right. \\ + \int_{x_{c1}}^{x_{c2}} \{ \phi_{\bar{z}}(x) \dot{q}_i(t) \}^2 dx \\ + \left. \int_{x_{c2}}^L \{ \phi_{\bar{B}}(x) \dot{q}_i(t) \}^2 dx \right\} \\ + \frac{1}{2} m_p \sum_{i=1}^n \{ \phi_{\bar{B}}(L) \dot{q}_i(t) \}^2 \\ + \frac{1}{2} J_o \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{d}{dt} \{ \phi_{\bar{B}}(L) q_i(t) \} \right\}^2 \quad (6)$$

$$V_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[EI \left(\int_0^{x_{c1}} \{ \phi_{\bar{n}}''(x) q_i(t) \}^2 dx \right. \right. \\ + \int_{x_{c1}}^{x_{c2}} \{ \phi_{\bar{z}}''(x) q_i(t) \}^2 dx \\ + \left. \int_{x_{c2}}^L \{ \phi_{\bar{B}}''(x) q_i(t) \}^2 dx \right) \\ + \frac{1}{2} K_{R1} (\Delta y'_1)^2 + \frac{1}{2} K_{R2} (\Delta y'_2)^2 \left. \right] \quad (7)$$

$$T_m = \frac{1}{2} m_m \left[\sum_{k=1}^3 \left\{ v^2 \sum_{i=1}^n q_i^2(t) \phi_{ik}'^2[f(t)] \right. \right. \\ + 2v \sum_{i=1}^n q_i(t) \dot{q}_i(t) \phi_{ik}[f(t)] \phi_{ik}'[f(t)] \\ + \left. \left. \sum_{i=1}^n \dot{q}_i^2(t) \phi_{ik}^2[f(t)] \right\} + v^2 \right] \\ \text{where } k = \begin{cases} 1 & (0 \leq x_m \leq x_{c1}) \\ 2 & (x_{c1} \leq x_m \leq x_{c2}) \\ 3 & (x_{c2} \leq x_m \leq L) \end{cases} \quad (8)$$

여기서 T_p , V_p , 그리고 T_m 은 각각 외팔 파이프의 운동에너지와 포텐셜 에너지, 그리고 이동질량의 운동에너지를 나타낸다. 또, $f(t) = x_m$ 으로 이동질량의 수평변위이다.

2.2 크랙에 의한 탄성변형에너지

선형 탄성구간에서 Castigliano의 정리에 의하여 크랙에 의해서 부가되는 변위와 크랙 부분의 유연행렬을 각각 다음과 같이 구할 수 있다.

$$u_i = \frac{\partial}{\partial P_i} \int_a^e J(a) da \quad (9)$$

$$C_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial P_j} = \frac{\partial^2}{\partial P_i \partial P_j} \left[\int_a^b \int_b^e J(a) da dz \right] \quad (10)$$

여기서 P_i 는 i 방향에서의 힘을 표현하고 있으며, $J(a)$ 는 변형률 에너지 밀도함수로서 다음과 같다.

$$J(a) = \frac{1}{E^*} (K_{IP} + K_{IM})^2 \quad (11)$$

여기서 E^* 는 평면변형에 대하여 $E^* = E / (1 - \nu_p^2)$ 로 표현되며, ν_p 는 Poisson의 비를 나타낸다. K_{IP} 와 K_{IM} 은 각각 제 1 파괴모드에서의 전단력과 모멘트에 의한 응력집중계수를 나타낸다.^(8,9) 식 (10)의 유연행렬 (6×6)을 구하여, 해석에 필요한 회전 스프링 상수는 전단력과 모멘트에 해당하는 항만을 고려한 유연행렬의 역수를 취함으로써 구할 수 있다. 즉, $K_R = C^{-1}$ 이다.

2.3 계의 운동방정식

계의 운동방정식은 앞에서 구한 각 에너지식을 Lagrange 방정식에 대입하여 구할 수 있으며 구해진 계의 운동방정식을 무차원화하기 위하여 사용한 무차

원 매개변수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{L}, \quad \xi_{ck} = \frac{x_{ck}}{L}, \quad \theta_{1,2}^* = \frac{\theta_{c1,2}}{\pi}, \\ V &= v \sqrt{\frac{m_m L}{EI}}, \quad \tau = \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}, \\ K_{Rk}^* &= \frac{K_{Rk} L}{EI}, \quad M_p = \frac{m_p}{mL}, \\ M_m &= \frac{m_m}{mL}, \quad J_o^* = \frac{J_o}{mL^3}, \quad d = \frac{q}{L} \end{aligned} \quad (12)$$

여기서 τ 는 무차원 시간을 나타내며, 식 (12)의 무차원 매개변수를 이용하여 계의 무차원된 운동방정식을 구하면 다음과 같다.

$$M \ddot{d} + C \dot{d} + K d = 0 \quad (13)$$

여기서 (\cdot)는 무차원화된 시간 τ 에 대한 미분을 나타내며, 식 (13)은 고유치 문제를 해결하기 위하여 다음과 같이 변환할 수 있다.

$$M^* \dot{\eta} + K^* \eta = 0 \quad (14)$$

식 (14)의 각 항은 각각 다음과 같다.

$$M^* = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad K^* = \begin{bmatrix} C & K \\ -I & 0 \end{bmatrix}, \quad \eta = \begin{bmatrix} \dot{d} \\ d \end{bmatrix} \quad (15)$$

식 (15)에서 η 는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\eta = e^{\lambda \tau} \theta \quad (16)$$

여기서 λ 는 복소수 값의 고유치이고, θ 는 모드형을 나타내는 행렬이다. 구해진 계의 고유치는 복소함수 형태를 가지며 허수부로부터 계의 고유진동수를 계산할 수 있다.

3. 수치해석 결과 및 고찰

이 연구에서는 이론해석에서 유도된 무차원 운동방정식을 이용하여 이중크랙이 존재하는 외팔 파이프의 진동특성에 미치는 끝단질량 영향과 크랙의 크기 및 위치, 그리고 이동질량의 영향을 수치해석 하여 고찰하였다. 수치해석 예제에 사용한 파이프의 길이는 1 m, 영 계수는 208 MPa, 밀도는 7860 kg/m³이다. 또, 수치해석 결과의 고찰 부분에서 의미상 이동질량의

위치가 외팔 파이프의 0.0 인 위치 ($\xi_c = 0$)에 존재하는 경우 즉, 이동질량이 시스템에 영향을 미치지 않는 경우를 고유진동수라 칭하였고, 이동질량이 외팔 파이프 위를 이동하는 동안은 진동수라고 표현하였다.

Fig. 3은 이동질량과 끝단질량이 존재하지 않는 경우에 두 번째 크랙의 크기에 따른 첫 번째 크랙의 크기변화에 의한 외팔 파이프의 고유진동수 변화를 나타내었다. 여기서 가로축은 두 번째 크랙의 크기를 나타낸다. 각 크랙의 위치는 각각 0.3과 0.6으로 하였다. 전반적으로 각 크랙의 크기와 진동수는 서로 반비례적인 경향을 보인다. 이 결과를 이용하여 첫 번째 크랙의 크기와 두 번째 크랙의 크기에 따른 고유진동수를 예측할 수 있다. 예를 들어, 크랙의 크기가 모두 0.15인 경우 고유진동수는 0.4854이며, 첫 번째 크랙의 크기가 0.12이고 두 번째 크랙의 크기가

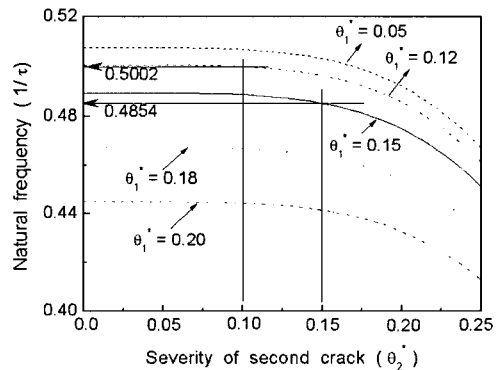


Fig. 3 Curves of natural frequency of double-cracked cantilever pipe versus severity of second crack (1st mode, $\xi_{c1} = 0.3, \xi_{c2} = 0.6$)

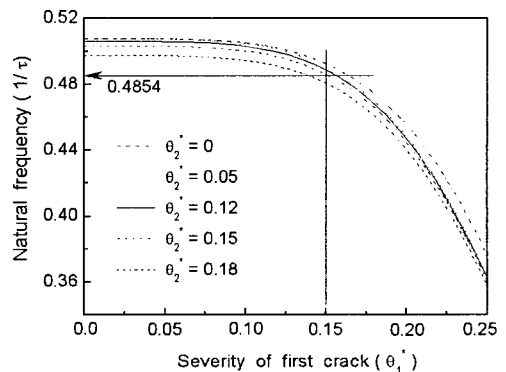


Fig. 4 Curves of natural frequency of double-cracked cantilever pipe versus severity of first crack (1st mode, $\xi_{c1} = 0.3, \xi_{c2} = 0.6$)

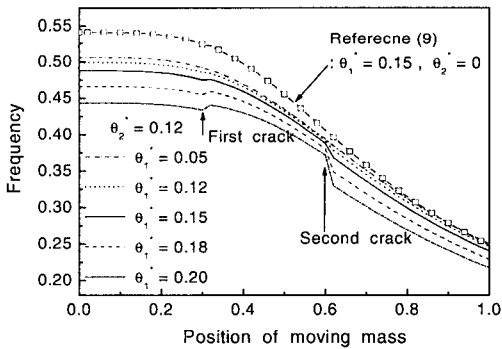
0.1 인 경우의 고유진동수는 0.5002 임을 쉽게 예측할 수 있다.

Fig. 4는 Fig. 3과 동일한 조건에서 첫 번째 크랙의 크기에 따른 두 번째 크랙의 크기변화에 따른 외팔 파이프의 고유진동수를 표현한 것이다. Fig. 3의 결과와 비교해 볼 때 크랙의 크기가 모두 0.15 인 경우 외팔 파이프의 고유진동수는 동일한 값인 0.4854 임을 알 수 있다.

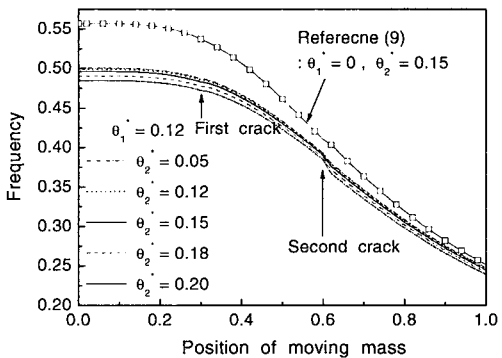
Fig. 5는 크랙의 크기가 변하는 경우 이동질량의 위치에 따른 외팔 파이프의 진동수 변화를 표현한 것이다. 무차원 이동질량의 크기는 1, 이동질량의 속도는 1m/s로 하였다. Fig. 5(a)는 두 번째 크랙의 크기를 0.12로 고정하고 첫 번째 크랙의 크기를 변화한 것이고, Fig. 5(b)는 첫 번째 크랙의 크기를 0.12로 고정하고 두 번째 크랙의 크기에 따른 진동수 변화이다. 이 결과에서 볼 수 있는 것처럼 외팔 파이프의 진동수에 미치는 영향은 두 번째 크랙에 비하여

첫 번째 크랙의 영향이 더 크다는 것을 확인할 수 있다. 단일크랙이 존재하는 경우인 참고문헌 (9)와 Fig. 5(a)의 첫 번째 크랙의 크기가 0.15인 경우를 비교해 볼 때 외팔 파이프의 고유진동수는 이중크랙인 경우에 약 10.5% 정도 감소하며, 이동질량이 파이프의 끝단에 위치하는 경우에는 이중크랙이 존재하는 파이프의 진동수는 단일크랙이 존재하는 경우에 비하여 약 3.27% 정도 진동수가 감소하는 경향을 보인다.

Fig. 6은 무차원 크기가 1인 이동질량이 파이프의 0.3인 위치에 존재하는 경우, 첫 번째 크랙과 두 번째 크랙의 크기와 위치가 외팔 파이프의 고유진동수 변화에 미치는 영향을 각각 나타낸 것이다. 전반적으로 크랙의 크기와 진동수는 서로 반비례적인 경향을 보이며, 첫 번째 크랙과 두 번째 크랙의 위치가 모두 앞부분에 존재하는 경우 외팔 파이프의 진동수는 더 작은 값을 가진다. 또 외팔 파이프의 고유진동수 변화에 미치는 영향은 두 번째 크랙의 영향에 비하여

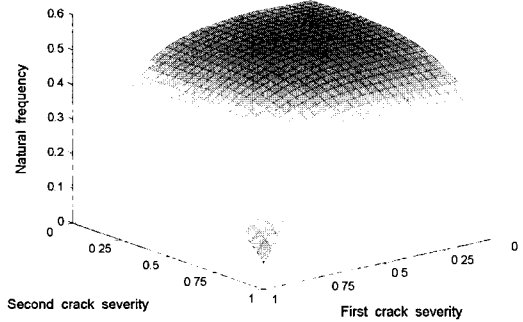


(a) Second crack, $\theta_2^* = 0.12$

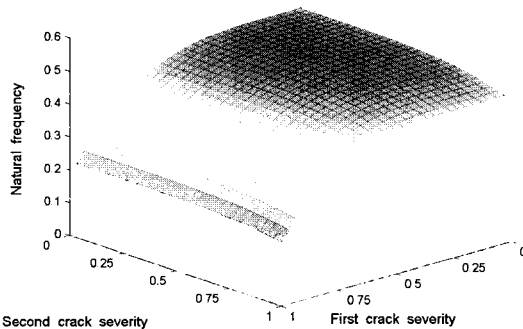


(b) First crack, $\theta_1^* = 0.12$

Fig. 5 Frequency of double-cracked cantilever pipe due to crack severity ($\xi_{c1} = 0.3$, $\xi_{c2} = 0.6$)



(a) $\xi_{c1} = 0.1$, $\xi_{c2} = 0.2$



(b) $\xi_{c1} = 0.1$, $\xi_{c2} = 0.5$

Fig. 6 Contours of natural frequency of double-cracked pipe due to crack severities (1st mode)

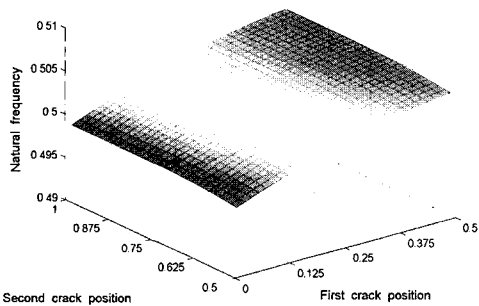
첫 번째 크랙의 영향이 더 큼을 확인할 수 있다. 이것은 단일크랙이 존재하는 외팔 파이프의 진동수 및 횡변위의 변화는 크랙이 존재하는 위치가 외팔 파이프의 고정 단으로부터 멀어질수록 그 영향이 작아지는 현상⁽⁹⁾과 상응하는 결과이다.

Fig. 7은 크랙의 크기가 각각 다른 경우 첫 번째 크랙의 위치와 두 번째 크랙의 위치에 따른 고유진동

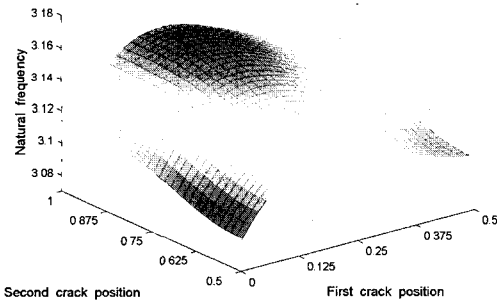
수 변화를 제 3 차 진동모드까지 표현한 것이다. 첫 번째 크랙과 두 번째 크랙의 크기를 모두 0.1로 두었으며, 전체적인 경향을 확인하기 위하여 계산상 첫 번째 크랙은 외팔 파이프의 고정단으로부터 0.5인 지점까지를, 그리고 두 번째 크랙은 0.5에서 1인 지점까지 존재한다고 가정하였다. Fig. 7(a)의 1차 모드를 살펴보면, 크랙의 크기가 동일한 경우 첫 번째 크랙의 위치변화에 따른 등고선의 기울기가 두 번째 크랙의 위치변화에 의한 것보다 훨씬 크다. 즉 앞에서 설명한 것처럼 두 번째 크랙에 비해 첫 번째 크랙이 외팔 파이프의 고유진동수 변화에 미치는 영향이 더 큼을 쉽게 알 수 있다. 또 Fig. 6과 Fig. 7의 전체적인 경향을 살펴보면 크랙의 위치변화에 의한 영향보다 크랙의 크기 변화에 따른 영향이 더 크다는 것을 알 수 있다.

Table 1은 이중크랙을 가지는 외팔 파이프의 1차 모드의 고유진동수에 미치는 각 크랙의 크기와 끝단 질량 및 관성모멘트에 의한 영향을 계산한 값이다. 각 크랙의 위치는 외팔 파이프의 고정 단으로부터 0.3, 0.6인 위치에 놓았으며, 이동질량이 없는 경우에 크랙의 크기에 따른 외팔 파이프의 고유진동수를 구한 것이다. 크랙의 위치에 관계없이 끝단질량의 크기와 크랙의 크기가 클수록 진동수는 감소하는 경향을 보인다.

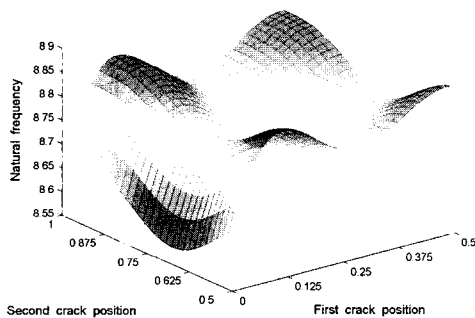
Fig. 8은 Table 1의 계산결과 가운데 끝단질량의



(a) 1st mode



(a) 2nd mode



(c) 3rd mode

Fig. 7 Contours of natural frequency of double-cracked pipe due to position of two cracks ($\theta_1^* = \theta_2^* = 0.1$)

Table 1 Natural frequency of double-cracked cantilever pipe with tip mass and its moment of inertia (1st mode, without moving mass)

J_o^*	M_p	$\theta_1^* = 0.15$			$\theta_2^* = 0.15$		
		θ_2^*			θ_1^*		
		0.1	0.15	0.2	0.1	0.15	0.2
0	0.03	0.4706	0.4689	0.4628	0.4787	0.4687	0.4375
	0.05	0.4572	0.4554	0.4494	0.4652	0.4554	0.4246
	0.10	0.4281	0.4263	0.4206	0.4358	0.4263	0.3968
0.01	0.03	0.4554	0.4534	0.4473	0.4633	0.4534	0.4228
	0.05	0.4429	0.4410	0.4350	0.4507	0.4410	0.4110
	0.10	0.4157	0.4139	0.4081	0.4232	0.4139	0.3851
0.05	0.03	0.4039	0.4018	0.3954	0.4109	0.4018	0.3739
	0.05	0.3942	0.3922	0.3860	0.4011	0.3922	0.3648
	0.10	0.3726	0.3707	0.3648	0.3792	0.3707	0.3445

* frequency unit : $1/\tau$

관성모멘트가 0인 경우 각 크랙의 크기와 끝단질량의 크기에 따른 외팔 파이프의 고유진동수를 도시한 것이다. Fig. 8은 두 번째 크랙의 크기를 0.15로 일정하게 두었을 경우 첫 번째 고유진동수 변화를 나타낸 것이다. 첫 번째 크랙의 크기가 0.15일 때 끝단질량

의 크기가 0.03인 경우 외팔 파이프의 고유진동수는 0.4689로 예측할 수 있고, 끝단질량의 크기가 0.05일 때는 0.4554로 Table 1과 비교해 보면 정확히 예측할 수 있음을 판단할 수 있다.

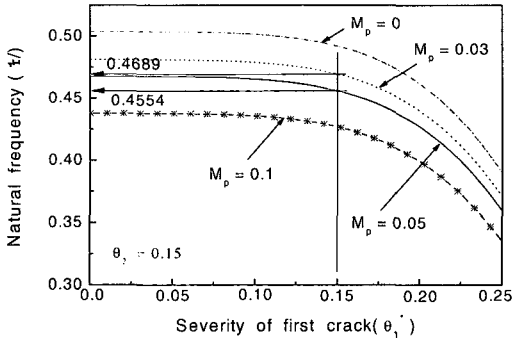
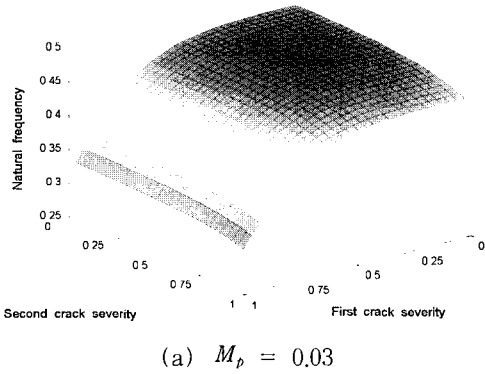
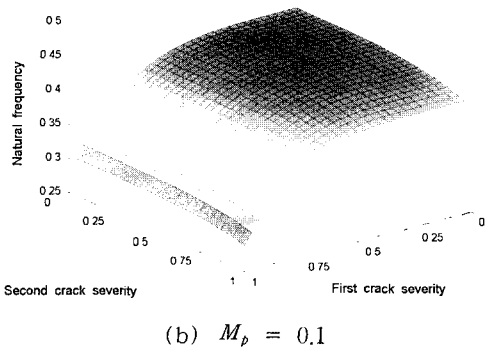


Fig. 8 Natural frequency of double-cracked cantilever pipe according to tip mass ($\theta_2^* = 0.15, \xi_{c1} = 0.3, \xi_{c2} = 0.6$)

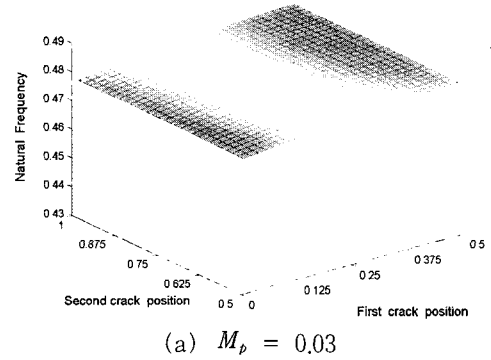


(a) $M_p = 0.03$

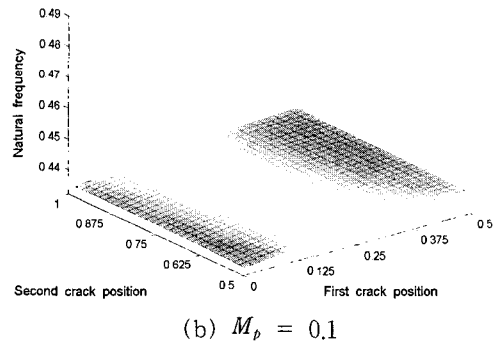


(b) $M_p = 0.1$

Fig. 9 Contours of natural frequency of double-cracked pipe due to tip mass and crack severity (1st mode, $\xi_{c1} = 0.3, \xi_{c2} = 0.6$)



(a) $M_p = 0.03$



(b) $M_p = 0.1$

Fig. 10 Contours of natural frequency of double-cracked pipe due to tip mass and crack position (1st mode, $\theta_1^* = \theta_2^* = 0.15$)

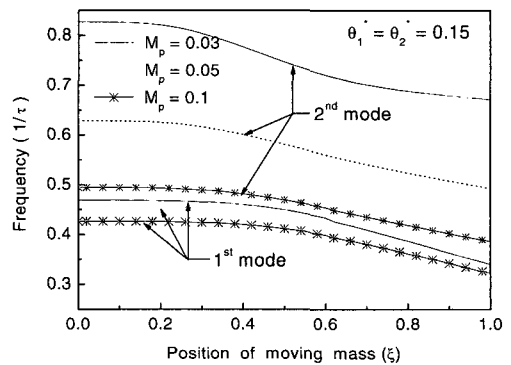


Fig. 11 Frequency of double-cracked pipe with moving mass according to tip mass ($\xi_{c1} = 0.3, \xi_{c2} = 0.6$)

Fig. 9와 Fig. 10은 이동질량이 없는 경우, 첫 번째 크랙과 두 번째 크랙의 크기와 크랙의 위치변화에 따른 외팔 파이프의 제 1차 모드고유진동수에 미치는 끝단질량의 영향을 각각 표현한 것이다.

Fig. 9는 각 크랙의 크기에 따른 외팔 파이프의 고유진동수 변화이며, Fig. 10은 각 크랙의 위치 변화에 따른 외팔 파이프의 고유진동수 변화를 끝단질량의 크기에 따라 도시한 것이다. Fig. 9와 Fig. 10에서 전체적인 경향을 살펴보면, 크랙의 영향에 관계없이 끝단질량의 크기와 외팔 파이프의 고유진동수는 서로 반비례적인 경향을 보이며, 끝단질량이 존재하지 않는 외팔 파이프의 경우와 마찬가지로 외팔 파이프의 고유진동수에 미치는 영향은 두 번째 크랙의 영향에 비하여 첫 번째 크랙의 영향이 더 크다는 것을 확인할 수 있다. 또 외팔 파이프의 고유진동수에 미치는 영향은 크랙의 위치에 의한 영향보다는 끝단질량의 영향이 더 크며, 끝단질량의 영향에 비해서는 크랙의 크기에 의한 영향이 더 크다는 것을 알 수 있다.

Fig. 11은 이중 크랙을 가지는 외팔 파이프의 진동수 변화를 이동질량의 위치변화에 따라 2차 진동모드까지 나타낸 것이다. 1차 진동모드에 비하여 2차 모드에서 끝단질량의 크기에 따른 진동수 변화가 더 크며, 제 1, 2차 모드에서 전반적으로 이동질량이 파이프의 끝단으로 이동할수록 파이프의 진동수가 점점 작아지는 경향을 보인다.

4. 결 론

이동질량과 끝단질량을 가지는 외팔 파이프 구조물에 이중크랙이 존재할 때 외팔 파이프의 진동특성에 미치는 이동질량과 크랙의 영향을 수치해석 하였다. 이동질량을 가진 외팔 파이프에 2개의 크랙이 존재하는 경우, 크랙의 크기 변화에 따른 외팔 파이프의 진동특성에 미치는 영향은 이동질량의 영향에 관계없이, 첫 번째 크랙의 영향이 두 번째 크랙의 영향보다 더 크다는 것을 알 수 있다. 끝단질량의 크기와 외팔 파이프의 진동수는 서로 반비례적인 경향을 보이며 이동질량이 파이프의 후반부에 위치할수록 진동수 변화가 더 적다. 이 연구결과를 통하여 이동질량과 이중 크랙이 존재하는 외팔 파이프에서 각 크랙의 크기 및 위치에 대한 고유진동수 변화를 도시한 그래프만을 가지고 각 크랙의 위치 및 크기에 따른 외팔 파이프

의 고유진동수를 쉽게 예측할 수 있음을 보였다. 또, 실제 구조물에 발생할 수 있는 이중크랙과 이동질량을 가진 계에 대한 수학적 모델링 및 수치해석에 적용하여 결과를 도출함으로써, 이동질량과 다중크랙이 존재하는 계로 확장하여 해석할 수 있는 근거를 제시하였다.

참 고 문 헌

- (1) Suzuki, S. I., 1977, "Dynamic Behaviour of a Finite Beam Subjected to Travelling Loads with Acceleration," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 55, No.1, pp. 65~70.
- (2) Lee, H. P., 1996, "Dynamic Response of a Beam with a Moving Mass," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 191, No. 2, pp. 585~591.
- (3) Ruotolo, R., Surace, C., Crespo, P. and Storer, D., 1996, "Harmonic Analysis of The Vibrations of a Cantilevered Beam With a Closing Crack," *Computers and Structures*, Vol. 61, No. 6, pp. 1057~1074.
- (4) Chondros, T. G., Dimarogonas, A. D. and Yao J., 1998, "A Continuous Cracked Beam Vibration Theory," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 215, No. 1, pp. 17~34.
- (5) Takahashi, I., 1999, "Vibration and Stability of Non-uniform Cracked Timoshenko Beam Subjected to Follower Force," *Computers and Structures*, Vol. 71, pp. 585~591.
- (6) Mahmoud, M. A. and Abou Zaid, M. A., 2002, "Dynamic Response of a Beam with a Crack Subject to a Moving Mass," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 256, No. 4, pp. 591~603.
- (7) 윤한익, 손인수, 2002, "이동질량을 가진 유체유동 외팔 파이프의 동특성," *한국소음진동공학회 논문집*, 제 12 권, 제 7 호, pp. 550~556.
- (8) Yoon, H. I. and Son, I. S., 2004, "Dynamic Behavior of Cracked Pipe Conveying Fluid with Moving Mass Based on Timoshenko Beam Theory," *KSME International Journal*, Vol. 18, No. 12, pp. 2216~2224.
- (9) 윤한익, 손인수, 2004, "크랙과 이동질량을 가

진 유체유동 외팔 파이프의 동특성에 관한 연구 (II).” 한국소음진동공학회논문집, 제 14 권, 제 12 호, pp. 1304 ~ 1313.

(10) Ostachowicz, W. M. and Krawczuk, M., 1991, “Analysis of the Effect of Cracks on the Natural Frequencies of a Cantilever Beam,” Journal of Sound and Vibration, Vol. 150, No. 2, pp. 191 ~ 201.

(11) Sekhar, A. S., 1999, “Vibration Characteristics of a Cracked Rotor with Two Open Cracks,” Journal of Sound and Vibration, Vol. 223, No. 4, pp. 497 ~ 512.

(12) Douka, E., Bamnios, G. and Trochidis, A., 2004, “A Method for Determining the Location and Depth of Cracks in Double-cracked Beams,” Applied Acoustics, Vol. 65, pp. 997 ~ 1008.

부 록

A.1. 끝단질량을 가진 외팔 파이프의 특성방정식

식 (2) 의 λ_i 는 다음 식 (17) 을 이용하여 구할 수 있으며, 끝단질량과 끝단질량의 관성모멘트의 크기에 따른 값을 구하여 Table 2 에 2 차 모드까지 나타내었다.

$$\begin{aligned} & \frac{m_p \lambda_i}{m} \frac{J_o \lambda_i^3}{m} - \left(\frac{m_p \lambda_i + J_o \lambda_i^3}{m} \right) \cosh(\lambda_i L) \sin(\lambda_i L) \\ & - \frac{m_p \lambda_i}{m} \frac{J_o \lambda_i^3}{m} \sin(\lambda_i L) \sinh(\lambda_i L) \\ & + \left(\frac{m_p \lambda_i - J_o \lambda_i^3}{m} \right) \cos(\lambda_i) \sinh(\lambda_i) \\ & + \cos(\lambda_i L) \cosh(\lambda_i L) + 1 = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Table 2 Frequency parameters of a cantilever pipe with tip mass and its moment of inertia for 1st and 2nd mode

M_p	0.03	0.05	0.1	0.15	0.2	0.3
$J_o^* = 0$						
λ_1	1.8226	1.7912	1.7227	1.6654	1.6164	1.5361
λ_2	4.5743	4.5127	4.3995	4.3226	4.2671	4.1923
$J_o^* = 0.01$						
λ_1	1.7911	1.7619	1.6980	1.6442	1.5978	1.5214
λ_2	3.7615	3.7504	3.7285	3.7122	3.6998	3.6820
$J_o^* = 0.05$						
λ_1	1.6734	1.6525	1.6052	1.5640	1.5274	1.4653
λ_2	2.8848	2.8828	2.8787	2.8755	2.8728	2.8689
$J_o^* = 0.1$						
λ_1	1.5548	1.5407	1.5078	1.4780	1.4508	1.4027
λ_2	2.6335	2.6249	2.6064	2.5914	2.5790	2.5599