

Pasternak지반 위에 놓인 면내력을 받는 변단면 후판의 진동해석 Vibration Analysis of Tapered Thick Plate Subjected to Static In-plane Stress on Pasternak Foundation

정진택* · 이용수† · 오숙경**

Cheong Jin Taek, Lee Yong Soo and Oh Soog Kyoung

(2004년 10월 2일 접수 ; 2005년 3월 14일 심사완료)

Key Words : Finite Element Method(유한요소법), Natural Frequency(고유진동수), Taper Ratio(변단면율), Tapered Thick Plate(변단면 후판)

ABSTRACT

This paper has the object of investigating natural frequencies of tapered thick plate on Pasternak foundation by means of finite element method and providing kinetic design data for mat of building structures. Vibration analysis for tapered thick plate subjected to in-plane stress is presented in this paper. Finite element analysis of rectangular plate is done by use of rectangular finite element with 8-nodes. Analysis conditions of tapered thick plate are as follows each. The ratio of in-plane stress to critical load is varied with $0.2\sigma_{cr}$, $0.4\sigma_{cr}$, $0.6\sigma_{cr}$. The Winkler parameter is 0, 10, 100, 1000, the shear foundation parameter is 0, 10 and the taper ratio is 0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8.

기 호 설 명

$2a \times 2b$: 요소의 크기

α : Taper ratio

A : 판 요소의 단위 폭 당 단면적

$\bar{a} \times \bar{b}$: 전체 판의 크기

D : 판의 단위폭당 휨강성

D_0 : 최소두께에 대한 판의 단위폭당 휨강성

σ : 면내응력

E : 탄성계수

G : 전단탄성계수

h_0 : 판의 최소두께

h_0' : 판의 최대두께

K_e : 판 요소의 휨 전단강성

K_f : 판 요소의 전단지반 강성

K_g : 판 요소의 기하강성행렬

k_g : 전단지반강성

k_w : Winkler 지반강성

M_e : 판의 요소질량

ν : 푸아송비

ω : 면내응력을 받지 않는 후판의 횡진동 고유진동수

$\bar{\omega}$: 면내응력을 받는 후판의 횡진동 고유진동수

P_x : x 축에 작용하는 면내력

ρ : 단위 체적당 질량

SFP : 전단지반 파라미터

θ_x : x 방향 회전각

θ_y : y 방향 회전각

w : 수직치침

WFP : Winkler지반 파라미터

† 책임저자 : 정회원, 원광대학교 건축학부
Tel : (063) 850-6709, Fax : (063) 843-0782
E-mail : struct@wonkwang.ac.kr

* 정회원, 원광대학교 대학원 건축공학과

** 정회원, 원광대학교 건축학부

1. 서 론

현대 건축물은 고층화, 대형화 되어가고 있으며 건축물이 요구하는 기능에 따라 다양한 기하학적 형태를 나타내고 있다. 건축물이 대규모화 되고 형태도 다양해짐에 따라 지하구조물의 형상도 다양해지고 있으며 지하구조물의 경제성과 역학적인 효율성을 높이기 위해 변단면으로 시공되기도 한다. 건축구조물의 온통기초(mat foundation)는 이 연구에서 다루는 후판으로 이상화 할 수 있으며 최근 우리나라에서 지진의 발생 빈도가 점차 증가됨에 따라 지진 등의 외력에 의한 진동을 방지 또는 억제하기 위한 연구의 필요성이 증대되고 있다. 현재까지 변단면 후판에 관한 연구를 살펴보면 다음과 같다. 1950년대 D. Young⁽¹⁾, G. B Warburton⁽²⁾, A. W. Leissa⁽³⁾에 의해 등방성 판의 자유진동에 대한 연구가 시작된 이후 1996년 A. R. Kukreti와 J. Farsa와 C. W Bert⁽⁴⁾는 미분구적법과 Rayleigh-Ritz method를 이용하여 단순지지된 변단면 후판의 진동에 관한 연구를 시행하였으며 Y. K. Cheung과 D. Zhou⁽⁵⁾는 2003년에 Timoshenko beam function을 이용한 변단면 후판의 진동해석을 시행하였다. 국내에서 아직 후판에 관한 연구는 활발하지 않은 상태이며 후판에 관한 연구를 살펴보면, 1997년 이용수 등⁽⁶⁾은 탄성보에 의해 지지된 등변분포 면내력을 받는 보강판의 좌굴해석을 하였으며, 1999년 이용수 등⁽⁷⁾은 탄성 스프링으로 지지된 보강판의 좌굴 및 진동해석을 시행하였고, 2003년 이용수, 이병구, 김일중, 이태은 등⁽⁸⁾은 비균질 Pasternak 지반 위에 놓인 집중질량을 갖는 판의 자유진동해석을 수행하였다. 이 연구에서는 면내력을 받는 변단면 후판의 진동해석을 하였으며 이와 같은 변단면을 갖는 기초 구조물의 동적 거동 특성을 파악함으로써 변단면 구조물의 공진 현상을 방지 또는 억제할 수 있도록 하는데 그 목적이 있다. 변단면 후판의 진동해석 시 Mindlin판 이론을 적용하고, 8절점 Serendipity 요소계를 이용한 유한요소 해석을 하였다.

2. 유한요소해석

후판요소의 변형 에너지, 운동 에너지와 면내력이 가해진 경우 외력의 일을 구하고 가상일의 원리를 이용하여 이들 변분을 값으로 놓아 고유치 방정식을 유도한다.

2.1 변단면 후판의 진동해석

(1) 후판요소

Fig. 1과 같이 선형 변단면 후판의 두께 h 는 길이에 따라 변하므로 함수로 나타내면 다음과 같다.

$$h = h_0 f\left(\frac{x}{a}\right) \quad (1)$$

여기서, h_0 는 $x = 0$ 일 때 판의 두께, $f\left(\frac{x}{a}\right) = 1 + \alpha \frac{x}{a}$

$$\text{Taper ratio는 판 전체에서 } \alpha = \frac{h_0' - h_0}{h_0}$$

변단면 후판의 휨 강성은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$D = D_0 f\left(\frac{x}{a}\right)^3 \quad (2)$$

여기서, $D_0 = Eh_0^3 / [12(1 - \nu^2)]$

판 요소의 크기를 $2a \times 2b$ 로 정의할 때 무차원 좌표계는 Fig. 2와 같다.

$\xi = (x - x_c) / a$, $\eta = (y - y_c) / b$ 를 이용한 8절점

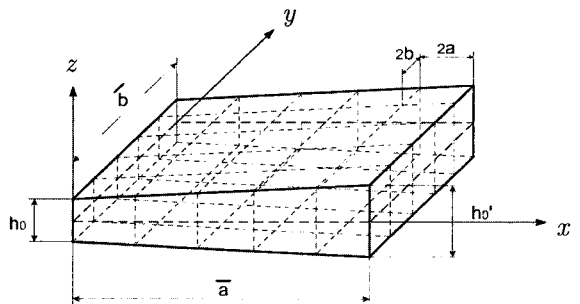


Fig. 1 Coordinate system of tapered thick plate

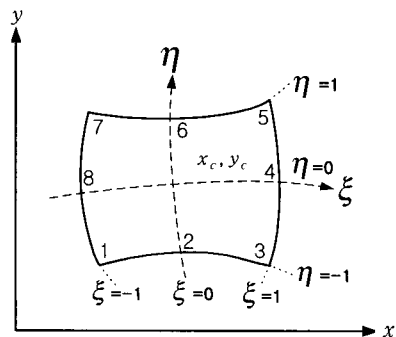


Fig. 2 8-nodes serendipity element system

위치에 대한 변위를 행렬형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = [N] \{\delta_e\} \quad (3)$$

여기서, w : 판 요소의 수직변위

θ_x : 판 요소의 x 방향 회전각

θ_y : 판 요소의 y 방향 회전각

$$\{\delta_e\} = [w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ w_2 \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ \dots \ w_8 \ \theta_{x8} \ \theta_{y8}]^T$$

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix}$$

이 경우 8절점 요소계의 형상함수는 다음과 같다.

$$N_i = \frac{1}{4} \xi_i^2 \eta_i^2 \xi \eta (\xi + \xi_i)(\eta + \eta_i) + \frac{1}{4} (1 - \xi_i^2)(1 + \eta_i)(1 - \xi^2) + (1 - \eta_i^2)(1 + \xi\xi)(1 - \eta^2) \quad (i=1, 2, \dots, 8)$$

(2) 후판의 진동해석

후판의 진동을 해석하기 위해 8절점 serendipity 요소계를 사용하였으며 판 요소의 운동에너지 T_e , 변형에너지 U_e 와 외력의 일 W_p 를 구하여 각 요소를 조합하고 이들의 변분을 쫓으로 놓아 고유치 방정식을 얻을 수 있다.

후판요소의 운동에너지 (T_e)는 정리하면 다음과 같다.

$$T_e = \frac{1}{2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \rho (hw^2 + \frac{h^3}{12} \theta_x^2 + \frac{h^3}{12} \theta_y^2) dA \quad (4)$$

여기서, ρ : 단위 면적당 후판의 질량

식 (4)에 식 (3)을 대입하여 정리하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$T_e = \frac{1}{2} \{\delta_e\}^T [M_e] \{\delta_e\} \quad (5)$$

여기서, $\{\delta_e\}$: 시간에 따른 판 요소의 절점변위 변화율

$[M_e]$: 판 요소의 질량행렬

Winkler지반 강성과 전단지반 강성을 고려한 후 판 요소의 변형에너지 U_e 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$U_e = \frac{1}{2} \int_A [M]^T \{\chi\} dA + \frac{1}{2} \int_A [Q]^T \{\psi\} dA + \frac{1}{2} \int_A k_w w^2 dA + \frac{1}{2} \int_A k_g [(\frac{\partial w}{\partial x})^2 + (\frac{\partial w}{\partial y})^2] dA$$

여기서, k_w : Winkler 지반강성, k_g : 전단지반강성

w : 판의 수직치짐 dA : $dx \cdot dy$

$$\{\chi\} = \left[-\frac{\partial \theta_x}{\partial x} - \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial y} - \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right]^T : \text{곡률}$$

$$\{\psi\} = \left[-\psi_y + \frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x + \frac{\partial w}{\partial y} \right]^T : \text{전단변형}$$

$$[M] = [M_x \ M_y \ M_{xy}]^T : \text{모멘트}$$

$$[Q] = [Q_x \ Q_y]^T : \text{전단력}$$

식 (6)에 모멘트, 곡률, 절점변위와의 관계, 그리고 전단력과 전단변형과의 관계 및 식 (3)의 변위 형상함수를 대입하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$U_e = \frac{1}{2} \{\delta_e\}^T [K_e] \{\delta_e\} + \frac{1}{2} \{w_e\}^T [K_f] \{w_e\} \quad (7)$$

여기서, $[K_e]$: 판 요소의 휨·전단 강성행렬

$[K_f]$: 판 요소의 지반강성 행렬

$\{w_e\}$: $[w_1, w_2, \dots, w_8]^T$: 요소변위 행렬

외력에 의한 일은 x 축 방향으로 1방향 압축만 고려하면 다음과 같다.

$$W_p = \frac{1}{2} \int_A P_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dA \quad (8)$$

식 (3)과 면내력 $P_x = \sigma h$ 를 식 (8)에 대입하면 다음과 같다.

$$W_e = \frac{1}{2} \{w_e\}^T [K_g] \{w_e\} \quad (9)$$

여기서, $[K_g]$: 판 요소의 기하강성 행렬
 σ : 면내응력
 h : 판의 두께

가상일의 원리에 의해 구한 요소의 운동에너지와 변형에너지 및 외력에 의한 일을 행렬형태로 구성하고 변분을 취하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \delta T_e &= \{\delta_e\}^T [M_e] \{\delta_e\} \\ \delta U_e &= \{\delta_e\}^T [K_e] \{\delta_e\} + \{\delta_e\}^T [K_f] \{\delta_e\} \\ \delta W_e &= \{w_e\}^T [K_g] \{w_e\} \end{aligned} \quad (10)$$

여기서,

$$[M_e] = \int_A \rho [N]^T \begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^3}{12} \end{bmatrix} [N] dA : \text{질량행렬}$$

$[K_e] = [K_p] + [K_s]$: 후판요소의 휨 강성행렬

$$[K_p] = \int_A \frac{h^3}{12} [B^p]^T [D] [B^p] dA : \text{휨 강성행렬}$$

$$[K_s] = \int_A \chi^2 \cdot h [B^s]^T [D^s] [B^s] dA : \text{전단강성행렬}$$

$$[K_f] = \int_A [N]^T \begin{bmatrix} k_w & 0 & 0 \\ 0 & k_g & 0 \\ 0 & 0 & k_g \end{bmatrix} [N] dA$$

: 탄성지반의 기하강성행렬

$$[K_g] = h \cdot \int_A [N]^T [\sigma_r] [N] dA$$

: 후판요소의 기하강성행렬

$$[B^p] = B_1^p \ B_2^p \ \dots \ B_8^p$$

$$0 \quad 0 \quad -\frac{\partial N_i}{\partial x}$$

$$[B_i^p] = 0 \ \frac{\partial N_i}{\partial y} \quad 0 \quad : i=1, 2, \dots, 8$$

$$0 \ \frac{\partial N_i}{\partial x} \quad -\frac{\partial N_i}{\partial y}$$

$$[B^s] = B_1^s \ B_2^s \ \dots \ B_8^s$$

$$[B_i^s] = \begin{bmatrix} -\frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & N_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & -N_i & 0 \end{bmatrix}$$

$$[D] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$[D_s] = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

식 (10)에서 판 요소의 운동에너지와 변형에너지 및 외력에 의한 일을 전체 판에 대한 것으로 조합하면 식 (11)과 같은 고유치 방정식을 얻을 수 있다.

$$[K_E] - \sigma [K_G] - \omega^2 [K_M] = 0 \quad (11)$$

여기서, $[K_E]$: $[K_e]$, $[K_f]$ 를 판 요소 전체에 대해 조합한 전체 요소강성행렬

$[K_M]$: $[M_e]$ 를 판요소 전체에 대해 조합한 전체 질량 매트릭스

$[K_G]$: 면내응력이 1인 경우 전체 판 요소의 기하강성 행렬

ω : 후판의 횡진동 고유진동수

이 식에서 $\sigma=0$ 인 경우 후판의 Pasternak지반에 지지된 후판의 자유진동 문제를 다루는 식이 되며, $\omega=0$ 로 놓으면 Pasternak 지반에 지지된 후판의 정적 안정성 문제를 다루는 식이 된다.

식 (11)에서 좌굴응력보다 작은 면내응력 σ 를 기지값으로 하면 다음과 같은 고유치 방정식을 얻을 수 있다.

$$\{[K_E] - \sigma [K_G]\} - \bar{\omega}^2 [K_M] = 0 \quad (12)$$

식 (12)에서 좌굴응력 이하의 면내력을 받는 후판의 횡진동 고유진동수 $\bar{\omega}$ 를 구할 수 있다.

3. 비교 분석 및 적용

3.1 검 증

이 연구에서 유한요소해석 프로그램을 개발하고 기존 이론해와 비교하여 정확성을 검토 하였다.

비교분석을 위해 판의 제 계수들은 기존해의 조건과 동일하게 하였다.

Table 1은 전단지반파라미터 $SFP (= K_g \bar{a}^2/D)$

가 10일 때 Winkler지반파라미터 $WFP (= K_w \bar{a}^4/D)$ 의 변화에 따라 두께가 일정한 후판의 고유진동수를 산출하여 기존해와 비교한 것으로 이 연구해가 기존해에 대해 최대 0.25%의 오차를 보였다. Table 2는 두께가 일정한 후판에 면내응력이 작용할 때 진동수와 작용하지 않을 때의 진동수 비를 비교한 것으로 이 연구해가 기존해에 대해 최대 0.089%의 오차를 보였다. Table 3은 변단면율에 따른 후판의 고유진동수를 구하여 기존해와 비교한 것으로 R.R.M의 경우 최대 -1.11% 오차를 나타내었고, D.Q.M의 경우는 최대 2.02%의 오차를 보였으며 기존 F.E.M해와의 비교에서는 최대 0.56%의 오차를 보였다.

이상의 결과로 이 연구해가 기존해와 잘 일치함을 알 수 있었다.

3.2 면내력을 받는 변단면 후판의 진동해석

이 연구에서 개발한 프로그램을 이용하여 변단면

Table 1 Comparison of natural frequency according to variation of foundation parameter
 $(\lambda^2 = \omega \bar{a}^2 \sqrt{\rho/D_0})$

WFP	This solution	Reference ⁽⁹⁾	Error(%)*
0	22.2518	22.2117	0.18
10	22.4657	22.4104	0.25
10 ²	24.3068	24.2698	0.15
10 ³	38.0923	38.0638	0.08
10 ⁴	99.6619	99.4473	0.20

Error(%)* = | This solution - reference | × 100 / Reference

Table 2 Natural frequency ratios of non-tapered plate subjected to in-plane stress

	This solution ($\bar{\omega}/\omega$)	Reference ⁽¹⁰⁾	Error(%)*
0	1	1	-
0.2σ _{cr}	0.8952	0.8944	0.089
0.4σ _{cr}	0.7750	0.7746	0.052
0.6σ _{cr}	0.6326	0.6325	0.016

Error(%)* = | This solution - reference | × 100 / Reference

$\bar{\omega}$: Frequency of in-plane stress

ω : Natural frequency

후판에 면내력이 가해졌을 경우의 natural frequency ($\lambda^2 = \omega \bar{a}^2 \sqrt{\rho/D_0}$)를 산정하였다.

해석을 위한 판의 제 계수들은 다음과 같다.

탄성계수 (E) : 2.1 × 10¹¹ N/m²

푸아송비(ν) : 0.3

판의 크기 : 1m × 1m

면내응력 : 0.2σ_{cr}, 0.4σ_{cr}, 0.6σ_{cr}

판 지지상태 : 4변 단순지지

전단지반파라미터 (SFP) : 0, 10

Winkler지반파라미터(WFP) : 0, 10, 10², 10³

Table 3 Comparison of natural frequency tapered plate according to F.E.M, differential quadrature method and Rayleigh-Ritz method
 $(\lambda^2 = \omega \bar{a}^2 \sqrt{\rho/D_0})$

	α			
	0.2	0.4	0.6	0.8
This solution	21.5889	23.4518	25.2934	27.0804
R.R.M ⁽⁴⁾	21.6506	23.4203	25.0490	26.5440
D.Q.M ⁽⁴⁾	21.7025	23.6239	25.5177	27.3845
F.E.M ⁽⁴⁾	21.5905	23.5486	25.3784	27.0804
Error(%)*	-0.29	0.13	0.98	2.02
Error(%)**	-0.53	-0.73	-0.89	-1.11
Error(%)***	-0.01	-0.19	-0.33	-0.56

R.R.M : Rayleigh-Ritz method

D.Q.M : Differential quadrature method

F.E.M : Finite element method

Error(%)* = | This solution - R.R.M | × 100 / R.R.M

Error(%)** = | This solution - D.Q.M | × 100 / D.Q.M

Error(%)*** = | This solution - F.E.M | × 100 / F.E.M

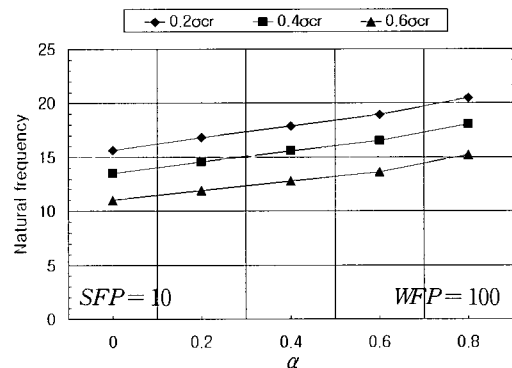


Fig. 3 Variation of natural frequency versus variation of in-plane stress and α

Fig. 3은 $SFP=0$, $WFP=0$ 인 상태에서 α 와 σ_{cr} 의 변화에 따른 변단면 후판의 고유진동수를 그래프로 나타낸 것이다. 면내력이 작용하는 변단면 후판의 α 가 증가함에 따라 고유진동수가 일정하게 증가하다가 α 가 0.6에서 0.8로 증가할 때 고유진동수의 증가율이 소폭 상승하는 것을 볼 수 있다. 지반에 지지된 판은 지반강성의 영향이 커 변단면율의 증가에 따른 고유진동수가 선형에 가까운 증가를 보이나 지반에 지지되지 않은 판의 고유진동수는 변단면율 α 가 커짐에 따라 선형으로 증가하다가 α 가 0.8일 때 즉, h_0' 이 h_0 의 1.8배가 될 때 비선형 형태의 증가를 보인다. Fig. 4와 Fig. 5의 SFP 는 모두 10이고 WFP 는 각각 10, 100일 때 변단면 후판의 고유진동수를 나타

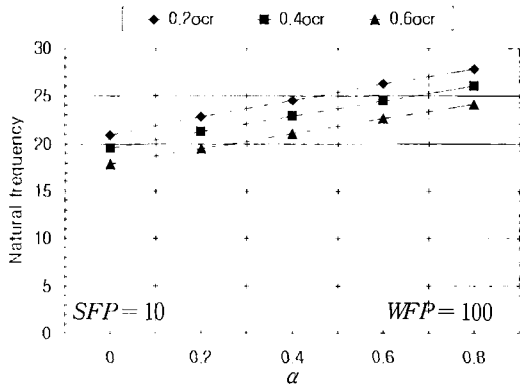


Fig. 4 Variation of natural frequency versus variation of in-plane stress, α and foundation parameters

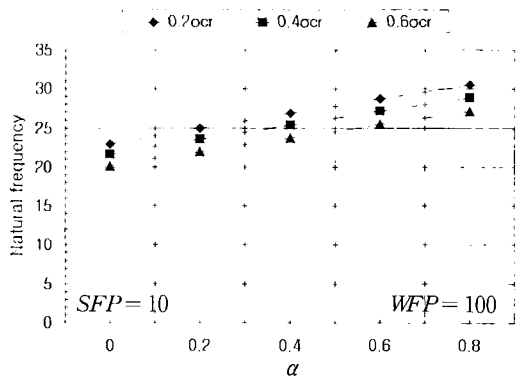


Fig. 5 Variation of natural frequency versus variation of in-plane stress, α and foundation parameters

낸 것이다. 이 경우 α 와 지반의 강성이 증가할수록 고유진동수가 선형에 가깝게 증가하는 것을 볼 수 있어 지반에 지지된 판은 지반강성의 영향이 커 변단면율의 증가에 따른 고유진동수가 선형에 가까운 증가를 보인다.

Fig. 6은 $0.4\sigma_{cr}$ 의 면내력이 작용할 때 $SFP=10$ 으로 일정하고 $WFP=10, 10^2, 10^3$ 일 경우 α 의 변화에 따른 변단면 후판의 고유진동수를 나타낸 것이다. 이 경우 α 가 커질수록 고유진동수가 선형에 가깝게 증가하는 것을 알 수 있다.

Fig. 7은 면내력이 $0.6\sigma_{cr}$ 로 작용할 때 WFP 와 α 의 변화에 따른 변단면 후판의 고유진동수를 나타낸 것이다. 이 경우 α 가 커질수록 고유진동수가 선형에 가깝게 증가함을 알 수 있다.

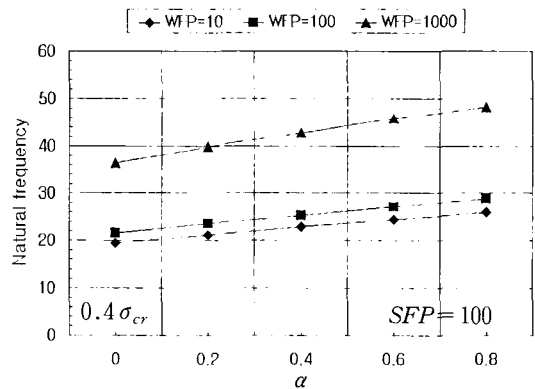


Fig. 6 Variation of natural frequency versus variation of α and foundation parameters

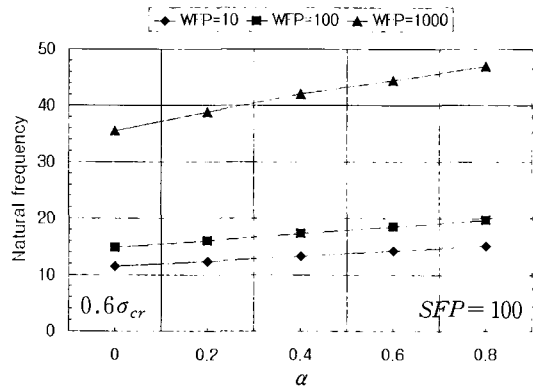


Fig. 7 Variation of natural frequency versus variation of α and foundation parameters

4. 결 론

이 연구는 Pasternak지반위에 놓인 면내력을 받는 변단면 후판의 진동에 관한 것이다. 변단면 후판의 지반은 지반의 연속성을 고려한 Pasternak 지반으로 모형화 하였다. 판의 해석은 Mindlin 판 이론을 적용 하였다.

이 연구의 결과로 다음과 같은 결론을 얻었다

(1) 이 연구에서 얻어진 지반이 없는 변단면 후판의 고유진동수는 기준해와 최대 2.02%의 오차를 보였다.

(2) 지반에 지지된 변단면 후판의 경우 면내응력의 크기나 지반강성 파라미터와 관계없이 변단면율의 증가에 따라 선형에 가까운 고유진동수의 증가를 보였다.

(3) 지반에 지지되지 않은 후판의 경우 α 가 증가함에 따라 고유진동수가 선형으로 증가하다가 α 가 0.6에서 0.8로 증가할 때 고유진동수의 증가율이 다소 커짐을 알 수 있었다.

후 기

이 연구는 원광대학교 2004년도 교내 연구비 지원에 의해 수행되었습니다.

참 고 문 헌

(1) Young, D., 1950, "Vibration of Rectangular Plates by the Rayleigh-Ritz Method," J. Appl. Mech, Vol. 17, pp. 448~453.

(2) Warburton., G. B., 1953, "The Vibration of Rectangular Plates," Proc. Institute of Mechanical

Engineers, pp. 371~384.

(3) Leissa., A. W., 1969, "Vibration of Plates," NASA SP-160, pp. 269~281.

(4) Kukreti, A. R., Farsa, J. and Bert., C. W., 1996, "Differential Quadrature and Rayleigh-Ritz Method to Determine the Fundamental Frequencies of Simply Supported Rectangular Plates with Linearly Varying Thickness," J. Sound and Vibration, pp. 103~122.

(5) Cheung, Y. K. and Zhou., D., 2003, "Vibration of Tapered Mindlin Plates Terms of Statics Timoshenko Beam Functions," J. Sound and Vibration, pp. 693~709.

(6) 이용수, 김일중, 오숙경, 김성용, 1997, "탄성보에 의해 지지된 등변분포 면내력을 받는 보강판의 좌굴해석," 대한건축학회 춘계학술발표회논문집, 제 17 권, 제 1 호.

(7) 이용수, 1999, "탄성스프링으로 지지된 보강판의 좌굴 및 진동해석에 관한 연구," 추계학술발표대회 한국전산구조공학회논문집, 제 12 권, 2집 통권 제 23 호, pp. 35~42.

(8) 이용수, 이병구, 김일중, 이태은, 2003, "비균질 Pasternak 지반 위에 놓인 집중 질량을 갖는 후판의 자유진동해석," 한국소음진동공학회논문집, 제 13 권, 제 4 호, pp. 281~289

(9) Hiratoki Matsunaga., 2004, "Vibration and Stability of Thick Plates in Elastic Foundations," J. Eng. Mech, pp. 27~34.

(10) Hearmon., R. F. S., 1959, "The Frequency of Flexural Vibration of Rectangular Orthotropic Plates with Clamped or Supported Edge," J. appl. Mech, Trans ASME, pp. 537~540.