대한수학교육학회지 <학교수학> 제 7 권 제 1 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.7, No.1, 55-75. Mar 2005

초등학교 저학년의 수학적 상징화 방법의 발전 과정과 특징에 관한 연구

김 남 균*

수학 기호를 학습함에 있어서 '기성의 기호'를 그대로 받아들이기보다 '기호를 형성하는 과정'에 대한 경험을 제공해주면 수학 기호로 인한 학습의 장애를 줄일 수 있다. 학생들이 수학적 의미에 맞는 기호화 방법을 발명해가야 한다는 '표현적 접근법(expressive approach)'은 학생들에게 수학 기호를 발명하고 다듬어가는 경험을 제공하는데 적합한 수업 모델이라 생각된다. 표현적 접근법으로 수학 기호를 지도하기 위해서는 특정한 수학 내용을 학습할 때 학생들의 수학적 상징화 방법의 발전 과정과 수학적 상징화 과정의 교수학적 특징에 대한 분석이 필요하다. 이에 본 연구에서는 초등학교 1학년 학생에게 수학적 상징화 활동 즉, 표현적 접근법에 의거한 교수실험을 실시하여 수학적 상징화 방법의 발전 과정과 그 특징을 분석하였다.

Ⅰ. 서 론

수학의 발전 과정에서 상징체계(symbolic system)는 수학적 사고를 촉진하며 수학적 의사소통을 가능하게 하는 수단으로 매우 중요시되어 왔다. 수학의 중요한 특성인 형식성과 추상성은 이러한 수학적 상징체계와 밀접히 관련된다. 상징체계는 기존의 수학적 공동체에서 널리 받아들여지고 있는 수학적 기호와 용어 뿐 아니라 학생들이 자신의 수학적 사고를 나타내기 위해 고안한 비관습적 기호와 형상 등의 상징물이 모두 포함된다.

전통적으로 학교수학은 학생들이 기존에 개발된 수학적 기호와 용어를 명확히 사용하는 것을 주요 목표로 생각하여 왔다. 즉, '수학의 용어와 기호 사용에 대한 뜻'을 이해하는 것을 교육과정 목표를 도달하는 중요한 방법으로 간주하고 있다. 그럼에도 불구하고 여전히 학생들이 수학적 기호화를 어려워하며 이로 인하여 수학 학습 특히, 비형식적 수학에서 형식적 수학으로의 이행에 어려움을 겪고 있다는 연구들(Hughes, 1986; Walkerdine, 1988; 유현주, 1995; 류성림, 1998; 서동엽, 1999)이 많이 보고되고 있다.

이와 같은 문제점에 대한 대안으로 학생들에게 형식화되고 관습화된 수학적 기호와 용어를 설명하고 정확히 사용하도록 요구하기보다는 학생들이 수학적인 경험을 바탕으로 적절하게 수학적으로 기호화할 수 있게 해주어야 한다는 견해가 많다. 최근 연구(Yackel, 2000)를 보면 관습적인 언어-대수적 기호에서 관습적 文語, 비표준화된 기호, 물리적 자료, 그림, 다이어그램, 컴퓨터 상의 그림, 언어 표현까지 기호의

* 청주교육대학교(ngkim@cje.ac.kr)

범위를 확장하기도 하는데, 이는 학생들이 수학적 사고의 발전과 함께 자연스럽게 수학적으로 기호화해 나가도록 하려는 의도로 볼 수 있다.

수학 기호를 지도하는데 있어서 전통적인 접근법은 교사가 기호를 약속으로 정의하고 학생의 이해와 기호의 의미에 대한 토론이 동반되지 않은 채 사용하는 것을 말한다. 전통적인 접근법 하에서 학생들은 자신의 수학적인 사고를 기호로 표현하거나 교과서와 교사가 사용한 수학적인 기호의 의미를 이해할 수 없는 경우가 흔히 일어난다. 전통적인 접근법의 대안으로 다음의 두 가지 방법이 있다. 먼저 수학 기호를 제시하고 그 의미와 기호의 용법을 탐구하도록 하여야 한다는 '탐구적 접근법(exploratory approach)'과 학생들이 수학적 의미에 맞는 기호화 방법을 발명해가야 한다는 '표현적 접근법(expressive approach)'이 그것이다(Gravemeijer, et al., 2000). 탐구적 접근법은 주로 기성의 수학기호와 그래프, 수학 소프트웨어로 수업하는 경우에 적합하고, 표현적 접근법은 학생들에게 수학 기호를 발명하고 다듬어가는 경험을 제공하는데 적합한 수업 모델이라 생각된다. 본 고에서는 기성의 대수-언어적 기호, 그래프, 컴퓨터 상의 그래프와 기호를 강조하는 탐구적 접근에서의 수학 기호의 학습을 '수학적 기호화'라 하고 학생들이 일상 언어, 비관습적 수학 기호, 일상 기호, 그래프, 물리적 자료 등으로 수학 기호를 발명해 보게 하고 그 후에 규약적인 기호를 서로 협상하게 하는 방법 즉, 표현적 접근법에 근거한 수학 기호 학습을 '수학적 상징화'라고 구분한다.

두 접근법은 학생들이 자신의 발달과정과 적절하게 지적활동과 표현활동을 연결지으면서 수학적으로 기호화해 나가게 하고 수학 기호로 인한 어려움을 감소해주어야 한다는 데는 이견이 없지만, 지도 방법적인 면과 학교수학에서 의미있는 수학기호의 범위에 대해서는 혼선을 준다. 예를 들어, 탐구적 접근법으로 수학 기호를 지도하거나 수학 기호를 약속으로 보고 기호와 기호화 방법을 소개하고 익히도록 하는 일반 수학교실(전통적 접근법)에서는, 비관습적 기호나 학생들이 만든 기호까지 수학 기호로 보지 않을 것이며 표현적 접근법은 수학 교실을 잘 모르는 이상적인 접근법으로 여겨질 것이다.

하지만 초등학교 학생들은 일상에서 획득한 비형식적 수학 지식을 지니고 형식적인 학교수학에 입문하는 시기에 있으며, 이 시기에 어떤 수학적 기호화 경험을 하느냐에 따라 이후 수학 학습에서 수학적 기호화에 대한 신념과 수학적 기호화의 능력에 영향을 크게 미친다. 수학 학습에서 수학화의 경험이 중요하듯이 수학 기호를 학습함에 있어서 '기성의 기호'를 그대로 받아들이기보다 '기호를 형성하는 과정'에 대한 경험을 제공해주어 수학 기호로 인한 학습의 장애를 줄여주어야 한다.

수학적 상징화 활동을 강조하기 위해서 즉, 표현적 접근법으로 수학 기호를 지도하기 위해서는 특정한 수학 내용을 학습할 때 학생들의 수학적 상징화 방법의 발전 과정과 수학적 상징화 과정의 교수학적 특징에 대한 분석이 필요하다. 따라서 본 연구에서는 초등학교 1학년 학생에게 수학적 상징화 활동 즉, 표현적 접근법에 의거한 교수실험을 실시하여 수학적 상징화 방법의 발전 과정과 그 특징을 분석하고자 한다.

다음에서는 먼저 문헌 연구를 통해 수학적 상징화 과정의 의미와 특징을 추출하였다. 특징이 잘 드러나도록 노력한 교수실험의 계획과 실행에 대해 설명하고 나서, 교수실험의 결과를 수학적 상징화 방법의 발달과 수학적 상징화 과정의 특징으로 나누어 분석하였다. 특히 문헌 검토에서 드러나지 않았던 교수-학습 과

정으로서의 수학적 상징화 과정의 특징을 분석하여 논의한다.

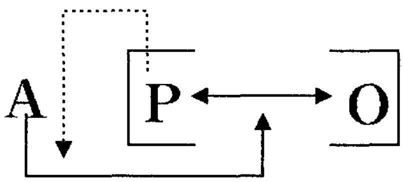
II. 이론 탐색 : 수학적 상징화의 의미와 특징

본 고에서는 기성의 수학 기호가 지닌 수학적 개념을 이해하고 자신의 사고를 수학 기호로 표현하는 것을 수학적 기호화라하고, 학습자의 수학적 사고 과정에 적합한 다양한 수학적 상징을 발명하고 이를 세련시켜가면서 표준적 기호로 발전시켜 가는 것을 수학적 상징화라 한다. 그러나, 학생들에게 유의미한 수학적 상징화는 단순히 수학 기호에 대한 표현적 접근법 이상을 의미하는 것 이상의 과정이 포함되어 있어야 한다. Van Oers(2000)의 '기호적 활동(semiotic activity)'과 Freudenthal(1983)의 '개념화(conception)'가 그것이다.

Van Oers(2000)는 기호를 매개로 이루어져왔던 인간의 지적 활동인 '기호적 활동'에 기반을 두어 수학적 상징화가 이루어져야 한다고 본다. 그는 기호적 활동을 다음과 같이 정의한다.

> 나는 의미와 상징적 수단(기호, 비표준적 상징, 다이어그램, schemes, 모델, 행동 같은)을 (다시) 만들려는 사회인지적 노력을 기호적 활동이라고 지칭한다. 기호적 활동은 기호(의 변화)와 대응하는 의미(의 변화) 사이의 상호 관계를 반성함으로써 의미와 기호를 창조하며 기호와 의미를 적절하게 조정하는 정신 사이의 활동이나 정신 내부의 활동이다(p.147).

Van Oers의 '기호적 활동'에서 주목할 점은 유의미한 수학적 상징의 범위, 기호와 의미의 발전 과정, 개인 간의 상호작용 강조, 기호적 활동을 학습으로 본다는 점이다. 기호적 활동에서는 기성의 기호 뿐 아니라 기호, 비표준적 상징, 다이어그램, 구조도, 모델, 행동을 포함되는 바, 수학적 상징으로 기성 수학적 상징과 학습자가 구성한 비관습적인 상징 모두 유용하게 활용되어야 한다. 기호적 활동은 '기호'와 '의미'의 상호관계를 반성하는 것과 기호를 발전시켜가는 과정에서 '기호의 변화'와 '의미의 변화'의 상호관계를 반성하여 기호와 의미를 조정하는 활동으로, 수학적 상징화 과정도 '상징'과 '의미'를 변증법적 발전 과정이어야 한다. Van Oers는 기호적 활동을 '사회인지적 노력'과 '개인 사이의 활동'으로 간주하고 있는데, 비관습적 상징에서 관습적 상징으로 발달하는 수학적 상징화 활동에는 학습 공동체의 상호작용과 합의가 필수적이라 할 수 있다. Van Oers는 기호적 활동을 상징을 새로 구성하거나 기성의 수학 기호를 다시 만들어 가는 사회인지적인 노력이라고 보는데서 더 나아가 학습의 과정이자 결과로 보고 있다. 학습의 대상(O)인 수학적 상징, 학습자(P), 사회적 환경인 성인(A)이 서로 상호작용하며 상징으로 표현하는 방식과 의미 해석 과정을 발전시켜가며, 성인이 기호와 아동의 상호작용에 결정적인 영향을 미치는 학습 과정으로 여긴다([그림 II-1] 참고).



[그림 II-1] 학습 과정으로서 기호적 활동
(Van Oers, 2000)

학생들에게 수학적 상징화의 전 과정을 맡기고 표준적인 기호로 발전해가기를 기대할 수 없다. 수학적 상징화는 기호적 활동과 마찬가

지로 학습자, 교사, 또래, 수학적 상징이 서로 상호작용하는 교수학습 과정에서 이루어져야 한다.

즉, 교사는 아동과 수학적 상징과의 상호작용을 중재해 주고, 아동의 반응에 영향을 받아 중재의 양상을 변화시켜, 아동이 교사의 중재를 도움으로 수학적 상징을 매개로 행동(외적 행동인 수학적 상징화 방법과 내적 행동인 수학적 사고 방법과 개념 이해)이 질적으로 변화가 일어나도록 지도해야 한다.

수학적 상징화 과정에는 아동의 상상력, 상징적 표현 과정이 중요하다. 수학 교수학습에서 심상의 중요성을 강조한 수학교육자로 Freudenthal(1983)을 들 수 있다. Freudenthal(1983)은 개념의 경우 개념 획득(concept acquisition)이 아니라 개념화(conception)이고 수학적 구조의 획득이 아닌 구조화, 형식이 아닌 형식화, 수학화를 경험해야 한다고 주장한다. 개념 획득과 개념화의 주요한 차이는 학습-지도 방향과 연결된다.

개념 획득은 전문학자의 관점에서 본 수학적 구조의 지도에 중점을 두고 그것을 초등화한 것으로부터 출발하여 곧장 공식화와 형식화로 이어진다. 이에 비해 개념화는 그 개념의 정의에 앞서서 그것이 발생하는 맥락의 경험을 통해 개념의 조작적 이해로부터 그 개념에 대한 심상(mental image)을 구성시키고 거듭되는 사고의 비약을 통해 그 개념의 본질과 내용이 점차 형식화, 도식화되어가는 수학화의 과정을 밟게 되는 것이다(유현주, 1995). 개념을 이해하는 것은 개념 획득을 통해서가 아니라 심상의 구성에 의한 것이며 심상의 구성이 개념 획득에 선행해야 한다고 본다.

프로이덴탈의 개념화와 마찬가지로 '상징의 획득'과 '상징화'를 구분지을 수 있다. 상징 획득은 교사나 수학자의 관점에서 수학 기호를 초등화한 방법을 제시하고 바로 기호 의미와 용법을 정리 · 전달해 주는 것으로 전통적으로 수학 기호의 지도가 이루어지는 방법이다. 이에 반해 수학적 상징화는, 표준적인 수학 기호를 도입하고 그 의미를 정의해 줌에 앞서 기호에 대한 심상을 자극할 수 있는 상황을 주어 심상을 구성시키고 거듭되는 발전 과정을 통해 상징의 표현과 의미가 점차 형식화 즉, 형식적인 기호화되는 것을 말한다. 개념화에서 '개념 형성의 근원, 즉 현실 속에서 직관적 관념을 개발하거나 심상을 구성하기 위한 근원을 찾는 것'이 중요한 것처럼 수학적 상징화 과정에서도 아동이 학습하는 현실 속에서 상징에 대한 심상을 쉽게 구성할 수 있는 근원을 찾아 제공하는 것이 중요하다.

Van Oers의 기호적 활동과 Freudenthal의 개념화 이론에서 수학적 상징화의 의미를 이론적으로 탐색한 결과 수학적 상징화에는 비관습적 상징으로 수학적 상징의 범위 확대, 기호와 의미의 변증법적 발전, 개인 간의 상호작용 강조, 교사와 상징을 매개로 하는 학습 과정, 심상의 구성을 특징으로 추출할 수 있다.

III. 교수 실험

1. 교수실험의 개요

교수실험의 목적은 학생들의 수학적 상징화 과정과 특징을 분석하고 표현적 접근법의 실행 가능성을 탐색하기 위한 것이다. 따라서 이론에서 추출한 수학적 상징화 과정의 특징을 살리면서 표현적 접근법으로 수학 기호를 학습하는 것 즉, 학생들의 수학적 상징화 활동에 초점을 두고 교수실험을 구성하고 실행하였다.

교수 실험을 시작하기 전에 전체 실험의 계획(가상적인 수업 흐름 HLT[1])을 세우고, 교수

실험을 한 차시 한 차시 진행하면서 실제 이루어진 수업 결과(ALT[2])에 따라 다음 차시의 HLT을 다시 수정해 가면서 교수실험을 발전시켜나갔다. 교수실험은 사고실험과 교실기반 연구의 상호과정으로 형성되어 갔다. 교실 기반 연구를 통하여 교수-학습 활동을 실시하고 그 차시의 ALT을 구성하여 분석결과를 토대로 다음 차시의 수업 개발의 HLT을 구성하였다. 따라서 초안을 잡았던 교수-학습 활동은 수업이 반영된 참여교사와 참여아동의 상호구성적이며 출현적인 교수-학습 활동을 반성한 사고실험을 통해 변형되고 교수실험이 이루어졌고, 교수실험한 결과는 다시 사고실험에 반영되는 순환적인 과정을 거치며 교수실험이 이루어졌다. 연구과정의 기술에서는 교수 실험이 전면에 나오지만 교수 실험의 실시와 그 분석에서는 연구자와 참여교사의 사고실험이 교수 실험 못지않게 큰 몫을 차지하였다. 사고실험과 교수 실험은 순서상으로 순환적인 과정을 겪을 뿐 아니라 연구 구성 상에서도 상보적으로 발전하고 형성되는 순환적인 관계에 있다. 다음에서는 최초의 교수 실험의 실행 계획과 실행 과정을 간단히 소개한다.

가. 참여 학생

교수실험에 참여한 학생은 초등학교 1학년 8명이다. 참여 학생은 학원에 다니거나 선행학습으로 덧셈과 뺄셈을 배우지 않았으며, 자발적으로 참여의사를 보이고 학부모가 동의한 학생으로 자신의 사고과정과 해결방법을 설명하는데 적극적인 아이를 담임교사에게 추천으로 선발하였다.

참여학생은 남학생 2명(준○, 현○)과 여학생 6명(상○, 희○, 채○, 민○, 혜○, 소○)이었다. 교수실험을 진행하면서 관찰한 결과 남학생들과 여학생 중 혜○은 덧셈과 뺄셈에 대한 선행학습을 한 경험이 있었다. 그러나, 덧셈식과 뺄셈식을 완전히 세우면서 덧셈과 뺄셈을 능숙하게 하는 수준은 아니었다. 두 수의 덧셈식과 뺄셈식을 약간 이해하고, 간단한 문장제를 풀 수 있는 정도였다. 다른 학생들은 식을 이해하거나 세울 수는 없었지만, 이야기나 일상 생활 소재로 문제를 제시하면 간단한 덧셈과 뺄셈을 해결할 수 있었다.

나. 학습 주제와 문제 상황

교수실험은 1-가 '5. 더하기와 빼기' 단원에 해당되는 내용 수준에서 출발하였다. 이 단원은 형식적인 덧셈과 뺄셈과 그리고 덧셈식과 뺄셈식의 지도가 처음 이루어지는 단원이다. 교과서에서 다루는 수의 범위는 9까지의 덧셈과 뺄셈이지만 교수 실험에서는 20까지의 덧셈과 뺄셈 내용으로 다루는 수의 범위가 크다. 그리고, 두 수의 덧셈과 뺄셈에만 국한되지 않고 세 수 이상의 연산과 혼합계산도 다룬다. 학생들에게 익숙하면서 표기법을 발달시킬 필요성을 느낄 수 있는 상황(Bednarz et al., 1993; Gravemeijer, 1994)인 시내버스상황을 소재로 한다. 예를 들면 학생들이 학교(또는 학원)를 가면서 친구들이 버스에 몇 명씩 타고 내리는 상

1) HLT(Hypothetical Learning Trajectory)는 Simon(1995)이 구성주의적 학습 관점에서 수업을 구성하는데 사용한 개념으로, '학생들이 참여하게 될 활동의 학습목적, 학습활동, 학생의 사고와 학습을 예상하여 논 것(p. 133)'이다. 본 연구에서는 실험 전에 전체 교수실험의 얼개구상하고 개개 차시의 계획을 세우고, 이를 첫 차시 부터 실험하면서 변경하고 조정하여 실험해 나갔다. 교수실험 전의 전체 실험 계획과 다음 차시의 교수실험 계획 모두를 HTL이라고 칭한다.

2) ALT(Actual Learning Trajectory(Gravemeijer, 2000))은 HTL에 따라서 실행된 수업의 변화를 기술한 것이다. ALT에는 실험교실에서 실현된 교수-학습 활동 즉, 학생들의 상징화 내용, 토의, 상호작용 등을 기록하였다. ALT의 내용에 따라 바로 다음 차시의 HLT를 수정하여 교수 실험을 실행하였다.

황에서 학습한다. 시내버스 상황을 지루해하거나 흥미 없어하게 되면 상황을 바꾸어 엘리베이터 상황 등 유사한 상황으로 바꾼다. 자세한 문제 상황과 문제의 특징은 <표 Ⅲ-1>과 같다.

실험이 진행되는 동안 문제 상황은 매우 다양하게 변화하였고, 문제의 특징도 한 차시에 하나씩 이루어진 것이 아니라 여러 차시에 나누어 중복되거나 반복되었다. 하지만 문제의 특징은 대체로 아래의 표에 제시된 순서에 따라 변천해 갔다.

다. 활동 방법

교수 실험은 아동이 상호작용하여 수학적 상징화 활동을 발전시키도록 하는데 목적이 있다. 이를 위하여 학생들이 활발히 참여할 수 있는 놀이와 게임 요소와 이야기 만들기 활동을 위주로 구성하였다. 교수-학습 활동은 실제 교수 실험의 과정에서 많은 변화가 있었다. 처음에 계획한 수학적 상징화 활동은 다음과 같다. 교사가 상황을 하나 이야기 해줄 동안 각 조에서 학생 1명은 교실 밖으로 나가 있게 되고 따라서 교사가 이야기 해준 상황을 들을 수 없다. 각 조의 나머지 세 학생들은 교사가 들려준 이야기를 적절한 상징화 방법을 이용하여 기록한 후 나머지 1명의 학생이 들어오고 나서 그 학생에게 설명해주어야 한다. 그 설명을 듣고 나가있던 1명은 단지 답을 구하는 것이 아니라 중간의 모든 상황을 정확하게 설명하여야 한다. 교사는 학생들에게 상징화 방법을 설명해 주지 않으며 학생들이 주어진 다양한 자료 중에서 적당한 자료를 선택하여 상징화하며 연산을 해 나갔다.

라. 자료 제공 방법

참여 학생들에게 교과서에서 많이 접하였던 조작물과 함께 종이와 연필을 같이 제공하고

<표 Ⅲ-1> 교수 실험의 문제 상황

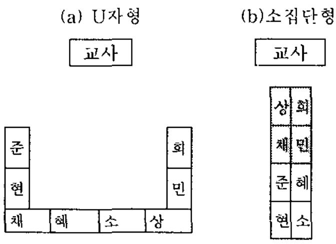
문제 상황	문제의 특징
《상황1》 학원버스가 학원을 출발하여 학생들을 태우고 다시 학원으로 돌아옵니다. 버스는 첫 번째 정류장에서 3명을 태우고, 두 번째 정류장에서는 2명을 태웠습니다. 3번째 정류장에서는 4명을 태웠습니다. 3번째 정류장을 지난 후 버스에는 학생이 몇 명 있겠습니까?	연속적인 덧셈
《상황2》 방과 후 학생들이 집으로 돌아갑니다. 9명의 친구들이 버스를 타고 출발하였습니다. 첫 번째 정류장에서 2명이 내렸습니다. 두 번째 정류장에서 3명이 내렸습니다. 두 번째 정류장을 지난 후 버스에는 학생이 몇 명 남아있겠습니까?	피감수가 주어진 연속적인 뺄셈
《상황3》 학생 10을 태우고 버스가 학교를 출발하였습니다. 첫 번째 정류장에서 학생을 내려주고 나니 학생이 7명 남았습니다. 두 번째 정류장을 지나고 나서는 학생 2명이 남았습니다. 버스는 첫 번째 정류장과 두 번째 정류장에서는 각각 몇 명이 타고 몇 명이 내렸습니까?	피감수와 차가 주어진 연속적인 뺄셈
《상황4》 시내버스가 있습니다. 이 버스가 출발지에서 출발할 때 승객은 12명이었습니다. 첫 번째 정류장에서 2명이 내리고 3명이 탔습니다. 두 번째 정류장에서는 2명이 내렸습니다. 3번째 정류장에서는 3명이 타고 1명이 내렸습니다. 4번째 정류장에서는 4명이 내렸습니다. 그리고 그 다음 정류장에서는 2명이 탔습니다. 지금 이 버스에는 승객이 몇 명 타고 있습니까?	연속적인 덧셈과 뺄셈의 혼합산

자유롭게 선택하여 사용하도록 하였다. 각 조별로 산가지(나무젓가락), 바둑돌, 색종이, 스티커, 가위, 풀, 종이와 연필을 제공하였다. 교수실험이 진행되면서 아동들이 사용하는 자료가 변화하였다. 예를 들어 3차시 이후에 색종이, 가위, 풀은 거의 사용하지 않았다. 이런 경우는 학습에 방해가 되지 않도록 책상에서 치워 교실 한 구석에 놓았다.

마. 교수 실험 환경

교수 실험에는 교사 1명과 학생 8명이 참여하였다. 교수실험은 방과 후 교실에서 책상을 뒤로 미루고 교실의 앞부분에 [그림 Ⅲ-1]처럼 자리를 만들어 활동하였다.

교수 실험의 수업 형태는 전체 활동과, 4인 1조의 소집단 활동의 두 가지였다. 학생들은 따라 U자형 자리 배치(처음 2차시)에서 4명씩의 소집단형 자치배치(나머지 4차시)로 변형하여 수업하였다. 교수실험에 참여한 아동의 자리배치는 [그림 Ⅲ-1]와 같다.



[그림 Ⅲ-1] 교수 실험의 자리배치3)

소집단 형 위치에서 교사에 가까운 4명(회색 부분)은 학생들끼리 '토끼 모둠'이라고 이름을 붙여 함께 활동하였다. 토끼 모둠은 덧셈과 뺄셈의 선행학습 경험이 거의 없다. 나머지 4명(흰색 부분)은 '호랑이 모둠'으로 활동하였다. 호랑이 모둠 중 2명(덧셈과 뺄셈의 선행학습 경험이 있는 아동이다. 모둠끼리 따로 떨어져 앉지는 않았지만, 모둠끼리 전혀 다른 활동을 해야 했고, 저학년인 관계로 두 모둠이 각각 자신의 모둠 내에서 협동하면서 활동할 수 있었다.

바. 연구자의 역할

일반 수업 관찰에서 연구자는 관찰자였다. 수업을 비디오 촬영과 현장 기록을 하고 수업에 참여하지 않았다. 그러나 교수 실험에서 연구자는 전체적인 교수-학습 활동의 초안을 구성하고 참여교사와 협의하여 HLT을 구성하며 수업 중에 출현하게 될 상황과 대처 방안을 고안하였다. 연구자는 수업 중 학생의 활동에 개입하지 않았지만, 예상치 못한 경우가 생기면 참여교사와 협의를 하여 교사의 수업을 도왔다. 참여교사에게 개입한 이유는 관습적인 상징을 점유해 가는 과정을 일반 수업에서의 상황과 유사하게 연출하려는 의도에서였다. 참여교사가 수업의 흐름을 놓치거나 아동의 수학적 상징화 과정에서 주목하지 못한 부분이 있을 때, 최소한으로 수업에 관여하였다. 수업이 끝난 후 연구자는 학생과 참여교사의 활동을 분석(ALT)하고 참여교사와의 면담을 통하여 다음 차시 교수 실험의 교수-학습 HLT을 구성하였다.

2. 교수실험의 발전 과정

참여한 교사와 학생의 상호작용, 그리고 연구자와 참여교사의 상호작용에 의해 교수 실험은 계속 변화하면서 발전하였다. 아래에서는 교수실험이 발전한 과정을 학생들의 활동 유형과 수학적 상징화에 따라 세 단계로 구분하였다. 이 단계는 연구의 계획 단계에서 정한 대

3) 교수실험에 참여한 아동의 이름 첫 글자를 그 아동이 앉은 위치에 써서 앉은 자리를 표시하였다. 예를 들어, 최준○의 자리는 '준'으로 나타내었다.

로 교수 실험을 실행한 결과로서의 단계가 아니라, 교수실험을 수행하면서 수정되면서 발전되어온 교수 실험을 특징에 따라 분류한 것이다. 각 단계를 활동 유형, 수학적 상징화의 발전, 특히 표기법의 발전에 따라 정리하면 다음 표와 같다.

<표 Ⅲ-2> 교수 실험의 발전 과정

단계	활동 유형	수학적 상징화 과정
1	개별활동 및 전체토의	• 표기의 필요성 인식 못함 • 구체물을 이용한 상징화 활동 • 표기법의 출현과 필요성 인식
2	소집단 협동학습 및 전체토의	• 표기법의 출현과 필요성 인식 • 비표준적 표기법의 발명 및 정교화 • 관습적인 상징 즉, 표준적인 표기법의 도입
3	개별활동 및 전체토의	• 표준적인 표기법의 숙달과 분화

교수 실험의 첫 번째 단계는 처음 3차시 동안의 수업으로 참여 학생들은 개별적으로 활동하면서 교사와 다른 학생들과 상호작용하였다. 이 단계에서 참여 학생들은 문제를 해결하는데 표기법이 필요함을 인식하였으며 몇몇은 비형식적인 표기법을 발달시켰다.

두 번째 단계에서 참여 학생들은 4명씩 소집단으로 집단원끼리 수학적 표기법을 발전시키며 의사소통 하였다. 참여 학생들은 비표준적 표기법에서 많은 발달을 보여 표준적 표기법으로 근접하였으며, 교사는 학생들의 상징화 활동에서 출현한 의미와 연결지어 관습적인 상징을 소개할 수 있을 정도로 연산의 의미와 표기법을 발달시켰다. 네 번째와 다섯 번째 교수 실험이 이 단계에 속하며 교사는 다섯 번째 시간에 학생들과 함께 의미를 협상하면서 관습적인 기호를 도입하였다.

세 번째 단계는 관습적인 상징의 사용 즉, 표준적인 표기법을 숙달하는 단계로 교수 실험의 마지막 시간이다. 학생들은 표준적인 표기법을 숙달함과 동시에 그림과 수식이 같이 나타나던 수학적 상징화의 혼용에서 이들을 따로 분화시켜 사용하였다.

Ⅳ. 수학적 상징화 과정과 특징 분석

1. 수학적 상징화 방법의 발전 과정

연구자와 참여교사가 교수-학습 과정을 계획하였지만 교수-학습 과정은 참여한 교사와 학생이 공동으로 발전시킨 것이며, 각각의 교수-학습 활동은 다음 교수-학습 과정을 계획하는 기반이 되어 학습과정에는 어떤 패턴을 보이지만 반복적으로 적용되는 것이 아니라 계속적으로 진보하는 양상을 띠었다. 교수-학습을 하면서 참여 학생들은 다양한 상징화 방법을 선택하였으며, 각 그 상징화 활동을 통하여 그 상징화 방법의 의미를 협상하고 상징화 방법도 발전시켜갔다. 그 양상은 비형식적 상징화에서 기호화 즉, 표준적인 표기법의 발달로 정리할 수 있다. 학생들의 수학적 상징화 방법의 발전 과정을 정리하면 다음과 같다.

가. 표기법의 필요성을 인식하지 못함

학생들에게 교사가 들려주는 문제를 듣고 난 후, 문제와 답을 모두 설명하게 하였다. 처음에 학생들은 기억과 암산에 의해 문제를 해결하고 (발췌문1) 계산과정과 결과를 말하였다. 문제를 기록하라고 권하자 바둑돌(발췌문2), 산가지, 색종이 오려 붙이기 등을 이용하여 기록하였다. 종이 위에 기록한 경우는 이야기를 그대로 문장으로 쓰는 경향이 강하였다[그림 Ⅳ-1]. 교사가 들려주는 문제를 들으면서 표기하려 하지

않았으며, 간편한 방법으로 표기하지 않고 문장을 그대로 썼다. 이는 학생들이 표기의 필요성을 느낄만한 활동의 구조가 없고 계산을 하거나 기록하면서 문제를 해결할 만큼 문제가 어렵지 않았기 때문으로 보인다.

발췌문 1

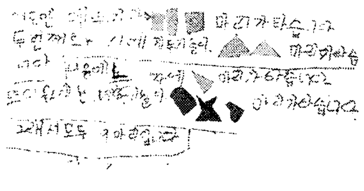
2 상○ : 네 마리.
3 교사 : 네 마리야?
4 상○ : (손가락을 펴고) 자 보세요 9,,처음에 하나 뺐죠. 세 개 빼죠.
그래서 4 맞잖아요.

[Y0510, 2-4]

발췌문 2

49 교사 : 처음에... 두 마리? 세 마리? 세 마리를 어떻게 표시 할건데?
아~ 흰 바둑돌로다 세 개 놓은 거구나? 자 혜인이는 이런 식으로 하는구나. 그 다음은 어떻게 했을까? 아 색깔로 구분되네! 어 또....
50 혜○ : 예.. 그림

[Y0510, 49-50]



[그림 Ⅳ-1] 글과 색종이로 기록

나. 표기의 출현과 필요성을 인식함

문제 상황을 점차 연속인 덧셈, 연속적인 뺄셈으로 복잡하게 해나갔다. 그러자 학생들은 문제를 들으면서 교사가 요구하지도 않았는데 스스로 기록하였다(발췌문3). 구체불로 표시하거나 문장을 쓰려고 하는 경우도 있었지만 간략하게 수를 기록하는 초보적인 표기의 형태가 나타났다. 그 다음에는 학생들이 기록을 하고 그 기록을 정확하게 해석하는 소집단 협동 학습을 하였다. 문제 상황이 간단한 것임에도 불구하고 학생들은 스스로 기록하려고 하였다. 구체물을 사용하지 않고 그들만의 표기법을 발달시켜갔다. 참여 학생이 수와 그들이 알고 있던 또는 교수 실험에서 알게 된 관습적인 상징, 그리고 학생들이 만들어 낸 상징(정거장 표시)을 이용하여 표준적인 표기법과 유사한 과도기적인 표기법을 만들어냈다. 소집단 활동을 하면서 표기의 필요성을 느낌은 물론이고 자신들이 알고 있는 최대한을 이용하여 수학적으로 표기법을 발달시키려 노력하였다.

발췌문 3

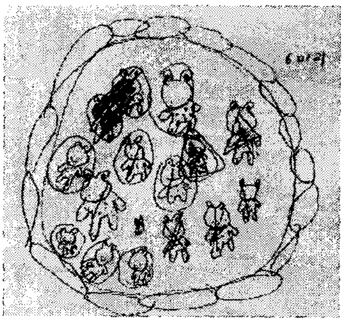
117 교사 : 자 그 다음 드디어 두 번째 정거장이 보이기 시작하네. 두번째 정류장에서는 두 명이 내렸어요. 다음 사람을 태우고 버스가 '부~웅 부~웅' 달려갔다. 세 번째 정류장 드디어 왔습니다. 세 번째에서는 세 명이 올라 타고 한 명이 내렸어요. (상○이 종이로 숫자를 적으면서 듣는다)
118 학생 : 다시 얘기 해줘요.
119 교사 : 세 번째 정류장? 세 번째 정류장에서는 세 명이 올라타고 한명이 내렸어요. 자~ 또, 버스가 사람들이 "좀 빨리 가요. 늦었어요" 해 가지고 '부릉'하며 갔다. 네번째에서는 사람들이 네 명이 내렸어요. 그리고 그 다음 정류장에서는 두 명이 더 내렸어요. 그러면 버스에 남아 있는 사람은 전체 몇 명이 될까요? (상○이 연필로 수를 계속 적는다-빨간 색종이 위)

[Y0511, 117-119]

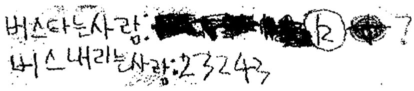
다. 비표준적 표기법의 발달

소집단 활동이 진행됨에 따라 학생들은 다양한 상징화 방법 즉, 다양한 표기 방법을 개발

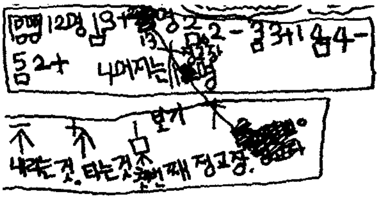
하였다. 그림과 표식을 이용하기도 하고([그림 Ⅳ-2]) 수를 분류하기도 하였으며([그림 Ⅳ-3]) 관습적인 상징(+, -)을 사용한 과도기적 표기법을 발명하기([그림 Ⅳ-4])도 하였다. 학생들은 점차 과도기적 표기법을 표준적인 표기법으로 발달시켜갔다. 즉, 점차로 그림이나 표식을 간단히 하고, 수를 분류하여 표현하다가 더하기 빼기의 의미로 상징을 첨가하거나 표준적인 상징을 흉내 내어 상징화하였다.



[그림 Ⅳ-2] 그림과 표식을 이용한 표기법



[그림 Ⅳ-3] 수를 분류하여 정리한 표기법



[그림 Ⅳ-4] 과도기적 표기법

라. 표준적 표기법의 도입

학생들이 표준적인 표기법과 유사한 표기법을 만들면서 의미를 발달시켜 가게 되자, 교사는 학생들이 문제를 해결하면서 만든 과도기적 표기법에 대해서 서로 토론하면서 기호의 의미를 묻고 설명하였다. 학생들은 그 이전에 교사의 직접적인 설명이 없었는데도 불구하고 연산기호와 등호의 의미를 말하였다. 이 때 교사는 간단한 문제 상황에서 표준적인 표기법을 도입하여 설명하였다. 학생들이 표기하려고 노력하던 수학적 상징화 활동을 기반으로 하여 즉, 학생들이 발명한 과도기적인 표기법들에 대해서 서로 이야기하면서 수학적 상징의 의미와 그 사용법에 대해서 반성하면서 학생들이 발달 가능한 범위에서 교사의 주도 하에 관습적인 상징과 표준적인 표기법을 도입하였다(발췌문4).

<u>발췌문 4</u>

144 혜○ : 희○이 꺼요. 희○이 꺼요 잘 해 가지구요 잘 한 거 같아요.

145 교사 : 어? 선생님이 지금 반마다 떠들어서 잘 안 들려, 크게 좀 얘기해줘.

146 혜○ : 희○이 꺼요. 처음엔 채○이 껄로 했는데요. 희○이꺼, 채○이께 잘 안 되서 희○이 껄로 바꿨잖아요. 바꿨는데 희○이께 알아보기 쉽구요. 잘한 거 같애요.

147 교사 : 아 지금 그럼 혜○이 얘기 들었니? 여기 해놓은 채○이꺼 보다는 여기 위에 있는 희○이께 더 알아보기가 쉬웠다 이 말이지? 하나 물어 볼께. 왜 알아보기 쉬웠어? 혜○이는...

148 혜○ : 채○이는 지저분하고, 희○이는 깨끗하고..

149 교사 : 채○이꺼는 지저분하고, 그 다음에 희○이꺼는 깨끗하단 말이 었어? 어~그러면..그 다음에 다른 친구. 채○이 보다는 희○ 이께 좀 더 깨끗하다는....
현○ 손들었네!!! 한번 일어나 보자. 오늘 발표 열심히 잘하네 우리 친구들...

150 현○ : 맨 위에 꺼요.

151 교사 : 맨 위에 꺼. 맨 위에 꺼면 어 희○이꺼, 왜 알아보기 쉬운 이유는?

152 현○ : 더하기하구 빼기가 있어서요
153 교사 : 어? 뭐래?
154 혜○ : 더하기 빼기가 있어서 알아보기 쉬웠대요.
155 교사 : 와~~ 더하기 빼기가 있어서 알아보기가 쉬웠어? 그러면 현○는 하나 물어볼게. 물어봐도 돼? 더하기는 뭐라고 생각하니 너는? 지금 문제에서? 아까 니가 받은 문제에서 더하기는 뭐를 의미하는 걸까? 버스에서 더하기는 무얼 의미하는 걸까요? 버스에 사람이 있었는데 ....
156 현○ : 올라타 많이 생기는 거.
157 교사 : 많이 생기는 거? 그 다음에 그럼 반대로 빼기는 뭘까?
158 현○ : 줄어드는 거.
159 교사 : 줄어드는 거? 와~~~(박수) 다른 친구도 그렇게 생각하는 사람 한 번 얘기해볼래요? 지금 현○가 더하기 빼기라는 얘기를 했거든 누가 나두 선생님 더하기 이렇게 생각해요, 빼기 이렇게 생각해요 하는 사람 이런 게 편리해요 하는 사람...
160 혜○ : 선생님! 근데요... 다요 더하기 빼기 들어가는데요.
161 교사 : 다 더하기 빼기가 들어갔어? 어~혜○이도 좋은 의견이다. 또 그 다음에 채○이. 채○이가 또 할 얘기가 있나봐,
162 채○ : 더하기 하구 빼기는 쓰는데 너무 길구. 글자를 많이 쓰지 않구. 그냥 그것만 써서도 알아보기 쉽게 해요
163 교사 : 와~~~ 지금 더하기와 빼기를 쓰면은 긴 거 보다는, 더하기 빼기라는 걸 쓰면 알아보기 쉽대요. 그 말 맞아? 선생님이 생각한 걸 정리한 거 맞아?
164 채○ : 네!!
165 교사 : 자 그러면 여러분 보자. 문제에서 문장이 길어질 때 여러분들이 더하기와 빼기라는 걸 사용하면 편리한 거 알겠어요?
166 학생 : 네!!!
167 교사 : 어 선생님 궁금한 게 있어. 자 이거는 뭐라고 하는 걸까? 그럼 이거는....
선생님이 이해가 됐어, 우리 친구들이 빼기랑 더하기랑 선생님 그거는 무얼 나타내서 아주 간단해요 알았거든. . 근데 궁금해 이거 아직...
우리 상○이 한번 얘기 해 보자 상○이도 할 얘기 있대. 어 상○아는 어떻게 생각하니?
168 상○ : 이거는요. 몇 개냐고 그럴 때 쓰는 거에요.
169 교사 : 아! 여기 지금 이렇게 쭉 내용이 왔을 때 남은 게 몇 개다. 라고 알려주는 거라고?
170 상○ : 네!!
171 교사 : 어~ 그래, 자 그럼 누가 또 한번 보충해 볼 사람?
172 희○ : 선생님 저는 요거에 대해서 상○이 얘기도 좋지만 제 얘기 또 다른 것도 있어요. 지금 상○이 얘기가 참 잘해 줬어요. 남아있는 전체 수를 말하는 거래요 또 다른 사람...요거에 대해서.. 아까 혜○이랑 채○이가 빼기랑 더하기는 내리고, 올라타서 간단하게 표현된다고 했잖아요.
173 교사 : 그치? 그럼 요거는 뭐라고 선생님한테 설명해줄까? 민○이가 한 번 할 수 있을까? 요거는 뭐꺼 같애요? 앞에 내용을 쭉 봤을 때...옳지 그래 혜○이...
174 혜○ : 더하기랑 빼기랑 헤깔리지 않게....
175 교사 : 더하기랑 빼기랑 헤깔리지 않게? 어~~ 그러면 요렇게 쓰면, 그러니까 요렇게 쓰면 부호가 다르단 말이니 모양이 다르단 얘기니? 아니면 답이 다르단 얘기니? 헤깔리지 않는다는 말이 무슨 말이야?
176 혜○ : 더하기랑요 빼기는요 근데요 뭐하는지 몰라서요....
177 교사 : 선생님이 잘 안들려서... 누가 한번 얘기 해 볼 사람.. 혜○이가 지금 한 얘기..그래 채○이가 다시 한번

더 얘기 해 보자.

178 채○ : 더하기하구 빼기는 많이 헷갈리는데 빼기 같은 게 하나 더 있으면 혼동되지 않아요.

179 교사 : 혼동되지 않는다구? 빼기 같은 게 있으면 이 빼기랑 혼동되지 않는다구? 그러면 이 끝에 있는 식은 뭘 의미하는 걸까? 마지막 문제... 여기 쭉 내용을 보고 마지막 10이라는 문제... 이거는 빼기는 내린 거라고 했지? 그러면 더하기는 오른 거라고 했죠? 그러면은 전체가 몇 명이라고 했지?

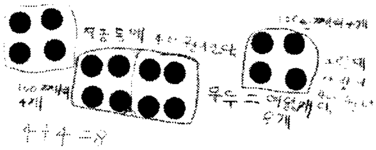
180 희○ : 12명

[Y0517, 144-180]

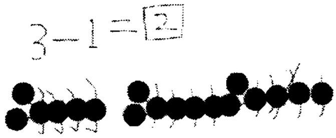
마. 표준적 표기법의 숙달 단계

교수실험의 끝부분에 학생들은, 자유롭게 문제를 만들어 그림으로 표현하고 표준적인 덧셈식과 뺄셈식으로 써보는 활동을 하였다. 학생들은 이전의 과도기적인 표기법과는 다르게 그림과 식을 분리하고 표준적인 표기법인 식을 사용하였다. 전반적으로 그림 표현이 점차로 간략해지고 있었지만 여전히 문제의 상황을 구체적으로 묘사하는 그림과 수학교과서 상의 그림으로 표현처럼 간략한 그림 등 다양한 표현이 이루어졌다. 그러나, 복잡한 그림이 아니라 문제에 있는 수와 연산을 상징적으로 간략하게 잘 표현하였으며, 그림보다 식을 정확히 쓰는 데 치중하였다([그림 Ⅳ-5, 6, 7]).

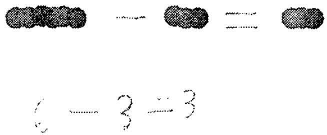
교수 실험의 초반에는 표준적인 표기법과 연산에 미숙하였던 학생 중 다른 학생들보다 더 복잡한 문제 상황을 만들어 간단히 표시하고 식으로 나타내려고 노력하는 학생까지 나타났다. 그리고, 학생들은 표기법을 발달시키는데 있어서 수와 연산의 복잡도를 조절하였는데 이는 단순히 문장제를 식으로 하나씩 번역하는 것이 아니라 문제 상황, 수, 연산의 의미를 알고 표기법이 발달함을 시사한다.



[그림 Ⅳ-5] 혜○의 그림과 식



[그림 Ⅳ-6] 희○의 그림과 식



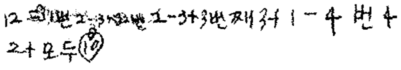
[그림 Ⅳ-7] 상○의 그림과 식

2. 수학적 상징화의 특징

가. 수학적 상징화 과정의 조절과 합의

교수실험 3차시에 구성된 두 소집단 호랑이 모듬과 다람쥐 모듬은, 학생들이 표준적인 표기법을 알고 있는 수준에서 차이가 있었다. 따라서 이 두 소집단의 활동에서 나타나는 표기법의 발달 양상도 달랐다. 표준적인 표기법을 많이 알고 있는 학생들이 있었던 호랑이 모듬의 경우, 처음에는 표준적인 표기법을 사용하였지만 이 표준적인 표기법을 모르는 학생이 있어 소집단에서 공유될 수 없었다. 나중에 이 모듬은 그림이 혼합된 표준적인 표기법에 거의 가까운 과도기적 표기법을 만들어 내어, 그 집단에서 공유할 수 있는 표기법으로 이행하였다. 표준적인 표기법을 상위라고 하고 비표준적인 표기법을 하위라고 한다면, 이들의 수학

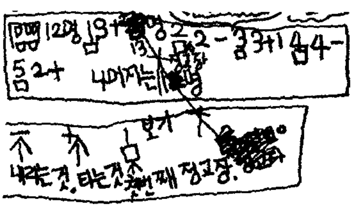
적 상징화 활동에서 볼 수 있는 표기법의 발달은 '하향조정적'이라고 할 수 있다.



[그림 Ⅳ-8] 호랑이 모듬에서 발명한 표기법

표준적인 표기법에 대한 사전 지식이 적었고 교수 실험을 통하여 표준적인 기호를 다른 학생들에게서 접한 학생들로 구성된 다람쥐 모듬은 소집단 활동의 초반부터 과도기적인 표기법을 발명하였다. 문제 상황을 복잡하게 내주어도 역시 표준적인 표기법과 유사한 과도기적 표기법을 사용하며 정거장을 나타내는 상징을 만드는 등 점진적으로 발달하는 모습을 보였다.

따라서 이 모듬의 수학적 상징화 활동에서 나타난 표기법의 발달은 '상향조정적'이라고 할 수 있다.



[그림 Ⅳ-9] 다람쥐 모듬에서 발명한 표기법

각 소집단에서 상징화 활동을 한 후 두 모듬이 같이 전체 활동을 하면서, 상대방 모듬의 표기법을 해석하고 확인하고 서로의 수학적 상징화 활동에 대해서 토론하며 반성하는 시간을 가졌다. 토론 과정을 거치고 나서 이어진 소집단의 상징화 활동에서 구성된 표기법([그림 Ⅳ-8], [그림 Ⅳ-9])은 서로 비슷하였다. 우선 기호 +, -를 사용하여 타고 내림을 표시하였다. 둘째, 한 모듬에서는 '첫 번째' 등의 단어를 사용하였고 또 한 모듬에서는 ''과 같이 새로운 상징을 만들었지만 이는 모두 정거장의 순서를 나타내는 것으로 표준적인 표기법의 괄호의 역할을 하는 것으로 볼 수 있다. 세 번째, 버스 모양이나 버스가 출발하는 모양을 만들어 문제 상황을 상징적으로 요약하고 있다. 수학 기호에 대해서 알고 있는 정도가 다른 아동들이 서로 다른 방향(상향조정, 하향조정)으로 상징화 과정을 거쳤지만 공동의 상징화 과정에서 유사한 표기법과 그에 대한 의미를 발전시켜갔음을 알 수 있다.

나. 수학적 기호와 의미를 연결함

교수실험은 표기법을 숙달시키는 시간이었다. 학생들은 연산의 의미를 모르고 단순히 수학 기호를 받아 적거나 받아 적거나 덧셈식과 뺄셈식을 아무렇게나 만드는 것이 아니라, 의미를 알고 참인 식을 구성하였다. 참여 학생들은 어떤 식을 만들 것인지에 따라 다르게 연산의 복잡도와 수의 크기를 선택하였다. 두 수의 뺄셈을 시도한 학생들의 경우 선택한 피감수의 크기는 감수가 2개 이상인 뺄셈을 만든 학생들보다 작았다. 예를 들면, 소○이는 감수가 3개인 뺄셈식을 만드는데 피감수로 17을 선택하였다. 반면에 두 수의 뺄셈을 한 학생들이 선택한 피감수는 8, 6, 5, 3 등으로 10을 넘지 않았다. 학생들은 단순히 식을 쓰는 것이 아니라 덧셈과 뺄셈의 의미를 알고 상황과 관련지어 표기한 것이다.

한편 표기법에서 학생들의 수와 연산에 대한 개념의 상태를 알 수 있었다. 혜○는 덧셈식을 만들 때 4+4=8을 만들고 이를 이용하여 8-4=4의 뺄셈식을 만들었다. 혜은이의 표기법에서 그녀가 덧셈과 뺄셈의 관계를 인식하고 있음을 알 수 있다. 혜은이가 만든 문제에서 흥미로운 점은 두 배의 관계에 있는 수를 선택하였다는 점이다. 이러한 특성은 다른 학생들에게도 나

타나는데 희○이는 1+1=2, 상○이는 6-3=3의 식을 만들었다. 또 민○이는 5+6=11의 문제를 만들었는데 민○의 활동지 한 끝에는 5+5=10이 쓰여 있었다. 자신들에게 쉽게 느껴지는 수를 선택하여 연산하고 표현한 것이다.

문제를 만들 때 수와 연산을 조절하는 점으로 미루어보아 문장제 문제를 식으로 번역하는 것이 아니라 문제 상황, 수, 연산의 의미와 같이 표기법이 발달하였음을 알 수 있으며, 이는 수학 상징을 사용하면서 의미와 표현 방법을 결합하면서 수학적으로 상징화해 나갔음을 입증한다.

다. 상징주의

학생들은 처음에 문장으로 기록하고, 구체물로 나타내고, 색종이와 스티커로 꾸미면서 문제 상황을 상징화하였다. 자동차 모양, 자동차가 출발하는 연기모양, 정거장 모양을 상징적으로 나타내는 과도기적인 과정을 거쳐 표준적인 표기법을 익혔다. 교사가 덧셈식과 뺄셈식을 설명하고, 교사와 학생이 과도기적 과정에서 학생들이 보여주었던 상징화 방법을 비교하고 토의하고 나서, 표준적인 표기법이 익숙해진 후 식을 그림으로 나타내는 활동을 하였다. 소집단 활동을 진행하면서 학생들의 그림은 어항, 꽃 같은 구체적인 문제 상황에서 추상화되어 개수와 수가 얼마나 더해지고 빼어지는 지만을 표현하게 되었다.

이는 아동의 상징주의적인 특성을 문어의 학습과 연결시킨 Vygotsky(1978)의 연구와 매우 유사한 결과이다. 아동들은 제스처, 놀이, 그림 그리기 등에서 상징적인 활동과 지시적 활동을 하면서 점차 추상화된 상징화 활동을 하고, 口語의 도움으로 文語를 학습하였다. 문어의 학습 과정과 수학적 기호화의 과정이 매우 유사하게 나타난다. Furani(2000)는 16-22개월 된 아동이 놀이와 발달 과제를 해결할 때 나타내는 상징화 과정에서 수학적으로 잠재적인 요소가 있다고 분석하였다. van Oers(1996, 2000)는 아동들이 교사의 안내 하에서 신발 가게 놀이를 하며 관습인 상징과 비슷한 상징을 발달시킬 수 있으며, 이 때 학생들이 고안한 상징은, 圖像的 상징에서 추상적인 상징으로 이행한다고 한다.

교수 실험의 수학적 상징화 과정과 선행 연구에서, 학생들이 상징주의적인 특징을 발휘할 수 있는 활동을 하면서 수학적으로 상징화하여야 함을 알 수 있다. Van den Brink(1984, 1991)과 Bednarz, et al.(1993)은 아동의 상징주의적 특성을 이용하여 표준적인 표기법을 발달시킬 수 있음을 입증한 바 있다.

라. 놀이와 소집단 활동

교수 실험에서 학생들은 소집단 활동을 하면서 수학적 표기법의 필요성을 인식하고, 비형식적인 표기법으로 상징화하게 되었다. 소집단 활동 중에 아동들은 과도기적 표기법을 발달시키고 그에 대해서 토의하면서 표기법을 정교화해나갔으며 교사의 안내로 표준적인 표기법을 학습하였다.

표기의 필요성을 인식하고 비형식적인 표기법을 정교화시킬 수 있었던 것은 놀이의 형식으로 소집단 활동을 진행하였기 때문이다. 학생들은 문제 상황을 제대로 전달하고 해석하기 위해서 다른 학생들도 알 수 있는 표식을 만들고, 빠르게 전달하기 위해서 간단하고 표준적인 모습으로 정교화시켜 나갔다. 이 과정에는 소집단 활동에서의 경쟁적인 요소도 큰 작용을 하였다.

아동의 발달에서 놀이가 중요하다는 것은 널리 알려진 사실이다. 수학적 상징화 활동에서도 아동에 놀이를 하면서 학습할 수 있는 활동이 중요하다. Furani(2000), van Oers(2000), van den Brink(1984, 1991), Bednarz, et al. (1993)도 모두 놀이 활동을 수학적 상징화와 연결지어서 학습하게 하고 있다.

놀이를 통한 학습이 학생들이 수학적 상징화를 촉진시키는데 도움이 됨을 확인할 수 있었다.

마. 문제 상황

Bednarz et al. (1993)의 표기법 발달 연구에서 아동들은, 버스 타고 내리기 문제와 식을 만들어 전달하는 활동을 하였다. 학생들은 이야기를 꾸미고 식을 만들어 전달하는 활동과 자신들이 만든 과도기적 표기법을 반성하면서 표기법을 발달 시켰다. 현실주의 수학교육(RME)에서는 버스를 타고 내리는 사람들에 대한 수학 드라마를 상연하고, 이야기를 들려주고, 또는 교실에서 버스 놀이를 하면서 버스에 대한 학생들의 경험과 상상들을 현실화하면서 표기법을 학습한다(van den Brink, 1984, 1991). 버스 타고 내리기 상황 이외에 동화와 이야기 속에서 학습을 한다.

본 연구의 교수 실험에서는 처음에 학생들이 학교(학원)버스를 타고 내리는 문제 상황을 계획하였다. 그러나, 실제 수업에서 교사와 학생들은 자유롭게 이야기 상황을 동화적인 상황으로 바꾸어 전개하면서 수학적 상징화 활동을 해나갔다. 이야기를 하면서 이야기 속의 의미를 생각하면서 수학적으로 상징화방법을 발달시켜나갔다.

버스 타고 내리기 상황처럼 덧셈, 뺄셈 연산과 밀접한 문제 상황, 이와 유사한 동화적 소재의 상황, 그리고, 학생들이 자신의 수학적 사고 과정을 수학적 상징으로 표현하고 다른 학생의 상징화 방법을 해석하도록 하는 문제 상황은, 수학적 상징화의 특징적 요소 중의 하나이다.

바. 정당화

수학적 상징화 과정에서 정당화 활동이 중요하다는 것은 재론의 여지가 없다. 비고츠키는 과학적 개념과 고등정신기능의 발달에서 말의 매개적 기능을 역설하였다. 또한 아동이 문어를 학습하는데 구어가 결정적인 역할을 한다고 한다(Vygotsky, 1978). van Oers(2000)는 어린 아동들의 수학적 상징화 활동을 연구하고 상징의 사용이 본질적으로 의미, 의미의 협상, 의사소통과 관련되어 있음을 보고하였다. Cobb et al. (1997)과 Gravemeijer et al. (2000)은 장기간에 걸친 수학 교수학습 전형 개발의 연구에서 학생들이 그림, 구어, 비관습적인 상징, 관습적인 상징으로 수학적 상징화 방법을 발달시킴을 밝혔다. 그리고 수학 교실의 관행 발달과 학생들이 수학화되어 가는데 있어서 수학적 상징화 방법과 정당화가 매우 중요한 역할을 한다고 보았다. 그러나, 이들은 학생들이 유의미한 수학적 상징화 과정을 경험하는데 필요한 정당화가 무엇인지 밝히지 않고 있다.

본 연구에서 수학적 상징화 과정에 나타나는 정당화 활동을 분석한 결과 문제에 대한 답과 과정을 정당화 뿐 아니라 수학적 상징화와 관련한 정당화 활동을 확인할 수 있었다. 학생들은 정당화하기 위하여 수학적으로 상징화하였으며, 자신이 사용한 수학적 상징화 방법을 정당화하였다. 학생들은 자신이 고안한 비형식적 상징화 방법과 다른 학생들의 방법에 대해 '수학적 상징화 방법에 대한 정당화 활동'을 하면서 상징화 방법을 정교화해 나갔으며, 표준적인 표기법을 쉽게 이해하여 사용하게 되었다. 이상에서 볼 때 학생들에게 제공해주어야 할 유의미한 수학적 상징화 활동으로 정당화 활동 특히, '수학적 상징화 방법에 대한 정당화 활동'이 포함되어야 함을 알 수 있다.

사. 교사의 역할

Sfard(2000)는 수학의 지시대상에 대한 관점을 고전적 실재론적 객관주의, 구성주의와 상호작용주의, 상대주의로 정리하고, 그에 따라 수학적 상징화에 대한 관점을 분류하여 교사의 역할을 설명한다. Sfard에 따르면 고전적 실재론/객관주의를 지닌 교사는 상징을 한 사람에게서 다른 사람으로 외재적 의미를 담아 나르는 운반체로 여긴다. 그리고 상징을 먼저 가르쳐야 하는지 개념이 먼저 형성되어야 하는지를 분리하여 생각한다. 그리고 기성의 수학적 상징의 사용법을 가르쳐주면 학생과 독립적으로 존재하는 수학의 의미가 학생들에게 전달될 수 있다는 가정을 하고 있다. 따라서 학생들에게 기성의 수학적 상징의 무의미한 조작만을 강조할 우려가 있다. 구성주의자와 상호작용주의자의 입장에 있는 교사는 학생의 지식 구성과 상호작용을 강조하지만, 상징과 의미를 양분하여 수학적 상징과 표기법을 도입하기 전에 의미가 선행되어야 한다고 본다(Sfard, 2000). 또 학생이 수학적 상징으로 표현할 필요가 있을 때만 수학적 상징을 사용하게 한다(Thompson & Sfard, 1994; Sfard, 2000에서 재인용).

상대주의적인 교사는 상징이 고정된 의미를 갖지 않으며 따라서 지시대상을 지시하는 단어로 이해해서는 안 되며 상징화 과정을 통하여 지시대상이 만들어지는 것으로 보았다. 상징화와 의미는 상호 구성적인 관계에 있다고 보고 관습적인 상징을 도입하여 의사소통하면서 수학적 상징의 의미를 학습하게 한다. Sfard는 기성의 수학적 상징만을 대상으로 이와 같은 주장을 하였다. 그러나 수학적 상징에 익숙하지 않은 초등학생에게는 기성의 상징 뿐 아니라 학생들이 고안하고 정교화하는 비형식적 상징도 유의미한 대상이 되어야 한다. 상대주의적인 입장에 있는 교사는 형식적인 상징과 비형식적 상징 모두 학생의 상호작용 속에서 의미와 함께 구성되어나간다는 입장에서 교수-학습 활동을 한다. 때로는 설명을 하며 학생들과 수학과 수학적 상징에 대해 토의하고 협상해 나간다.

표현적 접근법으로 수학 기호를 학습하도록 하는 교수실험을 구상하였을 때는 교사가 구성주의 혹은 상호작용주의 관점으로 수업을 행할 것이라 예상하였다. 그러나, 교수실험을 마치고 나서 분석한 결과 수학적 상징화를 강조하는 교실의 교사는, 수학적 개념을 형성한 후에 상징으로 표현하는 것이 아니라 학생들의 수학적 상징화와 정당화 활동 가운데서 수학적 상징의 의미가 만들어진다고 보는 '상대주의적' 입장에서 수업을 진행하였다. 교사는 학생들의 수학적 상징화 활동을 중시하면서 의미와 상징화 방법의 정교화를 이끌었으며, 관습적인 상징을 도입하여 학생들과 그 의미를 이야기하고 상징화 방법을 토의하였다.

V. 결 론

학생들에게 기성의 기호를 그대로 받아들이기보다 일상정인 인지 활동의 연장선 상에서 기호를 구성하고 발전시키는 과정을 경험시키는 것은 수학 기호 학습에서 매우 의미 있는 일이다. 이에 본 글에서는 학생들의 수학적 상징화 활동에 초점을 둔 교수실험을 실행하고 상징화 과정을 분석하여 수학 기호 학습에 수학적 상징화 방법(표현적 접근법)의 적용을 돕고자 하였다.

교수실험결과 수학적 상징화 방법은 표기법을 인식하지 못하는 단계에서 비관습적 표기법, 과도기적 표기법, 표준화된 표기법으로 발전하였다. 이 과정은 교과서에서 기호를 도입하는 과정과 유사하다. 단편적으로 보면 교과

서의 수학 기호 학습 방법이 적절하다고 볼 수 있다. 하지만 그보다 더 중요한 것은 상징화 과정에서 보여준 학생들의 다양한 상징화 방법이다. 상징화 방법의 전체적인 흐름은 유사하더라도 상징화 방법이 발전하는 과정이 다양하고 복잡하지 않다면 유의미한 수학적 상징화라 할 수 없다.

수학적 상징화의 특징은 이론에서 추출한 내용이 교수실험에서 확인된 것과 교수실험 상에서 새로이 분석할 수 있었던 것으로 나눌 수 있다. 먼저 Van Oers의 기호적 활동과 Freudenthal의 개념화 이론에서 수학적 상징화의 의미를 이론적으로 탐색한 결과 수학적 상징화에는 비관습적 상징으로 수학적 상징의 범위 확대, 기호와 의미의 변증법적 발전, 개인 간의 상호작용 강조, 교사와 상징을 매개로 하는 학습 과정, 심상의 구성이 중요한 요소로 추출할 수 있었다. 교수실험 결과 분석한 결과 수학적 상징화의 의미에 필요한 요소들을 모두 확인할 수 있다. 일일이 열거하여 확인하면 다음과 같다.

교수실험에서 학생들이 자발적으로 발명하고 발전시킨 상징화 방법은, 나무막대 표현, 바둑돌로 표현, 언어적 문장, 수의 목록, 비표준적 표기법, 과도기적 표기법, 표준적 표기법 등 매우 다양하였으며 교수학습 과정에서 학생과 교사는 이 모든 상징을 중요한 수학적 상징으로 여기고 발전시켜 나갔다. Van Oers의 기호적 활동에서 상징적 수단으로 여긴 모든 것들이 의미있는 수학적 상징의 범주에 포함된다고 볼 수 있다. 교수실험 과정에서 소집단에서 발명한 수학적 상징화 방법은 서로 상반된 방향(상향조정식, 하향조정식)으로 발전하였지만, 소집단 내에서의 상호작용과 소집단 간의 상호작용을 통하여 점차 유사한 과도기적 표기법으로 발전하였고 이를 토대로 표준적 표기법을 도입하였다. 이는 학습 공동체 내에서 개인 간의 상호작용을 통하여 상징과 의미를 변증법적으로 변화시키고 발전시키며 공동의 수학적 상징화 과정이 이루어진 것이라 볼 수 있다. 교수실험을 계획하던 단계에서는 수학적 상징화 과정에서 상징보다는 의미를 중시여기고 의미를 표현할 필요가 있을 때만 상징을 사용하고 교사는 개입이 적을 것으로 예상했지만, 교수실험 결과 수학적 상징화 과정에서 교사는 학생들의 수학적 상징화 활동을 중시하면서 의미와 상징화 방법의 정교화를 이끌었으며, 관습적인 상징을 도입하여 학생들과 그 의미를 이야기하고 상징화 방법을 토의하였다. 상징화에서 교사와 또래와의 상호작용과 교사의 역할은 매우 중요하였으며, 그 상호작용에서 상징화 방법을 학습하여 나갔다. 수학적 상징화는 자발적인 과정이 아니라 학습 공동체 내에서 상징과 교사를 매개로 이루어지는 학습 활동이라 할 수 있다. 교수실험에서는 표준적인 수학 기호를 도입하고 그 의미를 정의해 주기에 앞서, 기호에 대한 심상을 자극할 수 있는 문제 상황을 제공하였다. 학생들은 문제 상황에서 자극받아 심상을 구성하고 그에 따라 의미와 상징을 발전시키며 점차 표준적인 수학 기호표현을 사용하게 되었다. 학생들은 매우 다양한 상징적 표현을 사용하여 과도기적 표기법을 발명하고 발전시켜갔는데, 이는 수학적 상징화 과정에서 학생들의 머리 속에 심상이 충분히 구성되었음을 알 수 있다. 학생들이 발명한 다양한 상징적 표현은 수학적 상징화에서 필수적인 요소임이 틀림없다.

교수실험 결과 새로이 분석할 수 있었던 수학적 상징화 과정의 특징은 문제 상황과 활동의 구성, 수업 중 상호작용, 교사의 역할로 나누어 정리할 수 있다.

첫째, 문제 상황과 활동의 면에서 놀이 활동과 소집단 활동과 이야기 꾸미기 같은 학생들

에게 경험적 현실이 되는 문제 상황을 제시하다. 학생들도 자발적으로 이러한 문제 상황을 만들어 제시하고 놀이에 적극 동참하였다.

둘째, 수학적 상징화 과정을 강조하는 수업 중에는 상징화 방법의 다양성을 존중하고 조장해주고, 상징적인 표현이 활발히 이루어지도록 하며, 학생들이 자신들의 수학적 아이디어와 수학적 상징화 방법을 정당화하는 상호작용이 이루어졌다.

셋째, 교사의 역할을 분석한 결과 학생들의 상징화 활동을 중시하는 상대주의적 입장에서 수학 기호를 도입하고 지도하는 역할을 하고 있었다. 교수실험 결과 새로이 분석할 수 있었던 수학적 상징화 과정의 특징은 학생이 교사의 안내를 받으며 자신의 상징화 과정을 발달시켜갔다는 점에서 교수-학습으로서의 수학적 상징화 과정의 특징이라고 볼 수 있다. 즉, 표현적 접근법을 계획하고 실행함에 있어서 문제 상황과 활동의 구성, 수업 중 상호작용, 교사의 역할에 시사하는 바가 크다고 생각된다.

학생들이 수학기호의 의미를 알고 기호화할 수 있게 하기 위해서는 표기법을 인식하지 못하는 단계에서 비관습적 표기법, 과도기적 표기법, 표준화된 표기법으로 상징화의 방법을 점진적으로 발전시켜가도록 하는 것도 중요할 것이다. 그러나, 교과서도 이러한 흐름에 따라 진행되고 있지만 일반 교실의 수업을 분석한 결과 교사가 어떻게 지도하는가에 따라서 매우 양상을 볼 수 있었다(졸고, 2002).

교수실험에서 분석한 수학적 상징화 과정은 현재 교과서의 구성과 흡사하게 활동-영상-기호로 발달한다고도 볼 수 있다. 그러나 이러한 과정으로 점진적으로 유도함에 있어서 얼마나 융통성을 부여하느냐에 있어서는 매우 큰 차이를 볼 수 있었다. 학생들이 다양한 방법으로 상징화하고 그 의미와 방법에 대해서 토론하게 하는데 초점을 두어야 할 것이다. 본 연구에서 분석한 수학적 상징화 방법과 수학적 상징화 과정의 특징을 수업에서 구현한다면 학생들이 기호로 느끼는 어려움을 해소하는데 도움이 될 수 있으리라 기대한다. 연구를 맺으면서 다음과 같은 연구 과제를 제언한다.

첫째, 수학적 상징화 활동이 학생의 기호 학습에 도움을 주지만 모든 수학 기호를 상징화 과정을 거치며 학습하게 할 수는 없다. 수학적 상징화가 적절한 학년 수준, 내용, 그 때의 상징화 과정과 특징 등에 대한 연구가 필요하다.

둘째, 본 연구에서는 수학의 표기법에 처음 입문하는 초등학교 1학년의 덧셈과 뺄셈에서의 수학적 상징화를 연구하였다. 학생들의 수학적 상징화 양상은 관련된 수학내용과 밀접한 관계를 맺고 있다. 따라서 범자연수의 범위에서 수의 크기와 문제 상황에 따른 수학적 상징화, 다른 수 영역(예. 분수)과 다른 수학 영역에서의 수학적 상징화의 연구가 계속적으로 이루어져야 한다.

셋째, 중학교와 고등학교의 수학은 형식성과 추상성에서 초등수학과는 다르다. 따라서 중학교와 고등학교에서 수학 기호를 어떻게 다루고 있으며, 어떻게 기호화하는지 연구하고 이를 수학적 상징화 과정과 비교하는 연구가 후속되어야 한다.

넷째, 수학 기호 학습 방법으로 표현적 접근법과 관련하여 수학적 상징화에 대해서 연구하였다. 전통적인 접근법과 탐구적 접근법에 대한 연구와 표현적 접근법에서 탐구적 접근법으로 이행 과정에 대한 연구를 보강하여 수학 기호 학습 방법을 구조화하고 정련할 필요가 있다.

참고문헌

김남균(2002). **초등학교 수학 교수-학습에서의 수학적 상징화에 관한 연구**. 한국교원대학교 대학원 박사학위논문.

류성림(1998). **피아제의 균형화 모델에 의한 증명의 지도 방법 탐색**. 한국교원대학교 대학원 박사학위논문.

서동엽(1999). **증명의 구성 요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색**. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

유현주(1995). **유리수 개념의 교수현상학적 분석과 학습-지도 방향에 관한 연구**. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

Bednarz, N., Dufour-Janvier, B., Poirier, L., & Bacon, L. (1993). Socioconstructivist viewpoint on the use of symbolism in mathematics education. *The Journal of Educational Research, 29(1)*, 41-58.

Cobb, P., Gravemeijer, K., Yackel, E., McClain, K., & Whitenack, J. (1997). Mathematizing and symbolizing : The emergence of chains of signification in one first-grade classroom. In D. Kirshner & J. A. Whitson (Eds.), *Situated cognition : Social, semiotic, and perspectives* (pp. 151-234). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structure.* Dordrecht : Reidel Publishing Company.

Furani, H. A. (2000). *Toddlers' symbolizing and its mathematical potential.* Unpublished doctoral dissertation, Michigan State University.

Gravemeijer, K. (1994). *Developing realistic mathematics education.* Utrecht, The Netherlands: CD-Press.

Gravemeijer, K. (2000). Developmental research: Fostering a dialectic relation between theory and practice. In Freudenthal Institute, CD Rom produced for 9th International Congress on Mathematics Education in Japan.

Gravemeijer, K., Cobb, P., Bowers, J., & Whitenack, J. (2000). Symbolizing, modeling, and instructional design. In P. Cobb, E. Yackel & K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in classroom : Perspectives on discourse, tools, and instructional* (pp. 223-273). Mahwah, NJ: Law- rence Erlbaum Associates.

Hughes, M. (1986). *Children and number: Difficulties in learning mathematics.* Oxford, UK: Blackwell.

Nunes, T., Schliemann, A. D., & Carraher, D. W. (1993). *Street mathematics and school mathematics.* Cambridge: Cambridge University Press.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26,* 114-145.

Sfard, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being - or How mathematical discourse and mathematical objects create each In P. Cobb, E. Yackel & K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classroom : Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (pp. 37-98). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers.

Van den Brink, F. J. (1984). Numbers in contextual frameworks. *Educational Studies in Mathematics, 15*(3), 239-257.

Van den Brink, F. J. (1991). Realistic arithmetic education for young children. In L. Sreefland (Ed.), *Realistic mathematics education in primary school* (pp. 77-92). Utrecht: Cd-β Press. Freudenthal Institute.

Van Oers, B. (1996). Learning mathematics as a meaningful activity. In L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin & B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 91-114). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Van Oers, B. (2000). The appropriation of mathematical symbols : A psychosemiotic approach to mathematics learning. In P. Cobb, E. Yackel & K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classroom : Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (pp. 133-176). Mahwah, NJ : Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Walkerdine, V. (1988). *The mastery of reason: Cognitive development and the production of rationality.* London: Routledge.

Yackel, E. (2000). Introduction : Perspectives on semiotics and instructional design. In P. Cobb, E. Yackel & K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classroom : Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (pp. 1-13). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers.

Characteristics and Development Processes of Early Elementary Students' Mathematical Symbolizing

Kim, Nam Gyun (CheongJu National University of Education)

Mathematical symbolizing is an important part of mathematics learning. But many students have difficulties in symbolizing mathematical ideas formally. If students had experiences inventing their own mathematical symbols and developing them to conventional ones natural way, i.e. learning mathematical symbols via expressive approaches, they could understand and use formal mathematical symbols meaningfully. These experiences are especially valuable for students who meet mathematical symbols for the first time.

Hence, there are needs to investigate how early elementary school students can and should experience meaningful mathematical symbolizing. The purpose of this study was to analyze students' mathematical symbolizing processes and characteristics of theses.

We carried out teaching experiments that promoted meaningful mathematical symbolizing among eight first graders. And then we analyzed students' symbolizing processes and characteristics of expressive approaches to mathematical symbols in early elementary students.

As a result, we could places mathematical symbolizing processes developed in the teaching experiments under five categories. And we extracted and discussed several characteristics of early elementary students' meaningful mathematical symbolizing processes.

* key words : mathematical symbolizing(수학적 기호화, 수학적 상징화), mathematical symbol(수학기호), mathematical notation(표기법), expressive approaches(표현적 접근법)

논문접수 : 2005. 2. 14
심사완료 : 2005. 3. 7