

< 논문 >

역나선 이론을 이용한 저자유도 병렬형 기구의 강성해석

김 한 성*

(2004년 9월 3일 접수, 2005년 3월 18일 심사완료)

Stiffness Analysis of a Low-DOF Parallel Manipulator using the Theory of Reciprocal Screws

Han Sung Kim

Key Words : Stiffness Analysis(강성해석), Low-DOF Parallel Manipulator(저자유도 병렬형 기구), Reciprocal Screw(역나선), Statics Relation(정역학 관계)

Abstract

This paper presents a methodology for the stiffness analysis of a low-DOF parallel manipulator. A low-DOF parallel manipulator is a spatial parallel manipulator which has less than six degrees of freedom. The reciprocal screws of actuations and constraints in each leg can be determined by making use of the theory of reciprocal screws, which provide information about reaction forces due to actuations and constraints. When pure force is applied to a leg, the leg stiffness is modeled as a linear spring along the line. For pure couple, it is modeled as a rotational spring about the axis. It is shown that the stiffness model of an F -DOF parallel manipulator consists of F springs related to actuations and $6-F$ springs related to constraints connected from the moving platform to the base in parallel. The 6×6 Cartesian stiffness matrix is derived, which is the sum of the Cartesian stiffness matrices of actuations and constraints. Finally, the 3-UPU, 3-PRRR, and Tricept parallel manipulators are used as examples to demonstrate the methodology.

1. 서론

병렬형 기구는 고정 플랫폼과 이동 플랫폼을 다수의 직렬체인으로 연결한 구조를 갖는다. 일반적으로 구동부가 고정부 근처 또는 고정부에 위치하므로, 이동부의 관성이 작아 고속작업이 가능하다는 장점을 갖는다. 또한, 이동 플랫폼의 작업하중이 각 구동기에 분산이 되므로, 고하중 작업에 적합하다. 대표적으로 모든 선형 구동기가 순 인장/압축력 하에 있는 6 자유도 스튜어트 플랫폼형 기구가 많은 연구대상이 되어오고 있다.⁽¹⁻⁴⁾ 그러나, 이 기구는 순기구학이 복잡하고, 작업영역이 작으며, 많은 수의 부품이 필요하다는 단점을 갖는다.

병렬형 기구의 장점을 유지하면서 이러한 단점을 극복하기 위하여, 최근 6 자유도보다 적은 자유도를 갖는 저자유도 병렬형 기구에 대한 연구가

활발히 진행되고 있다.⁽⁵⁻¹⁴⁾ 저자유도 병렬형 기구는 6 자유도 병렬형 기구에 비하여 순기구학이 단순하고, 작업영역 비교적 크고, 관성이 작으며, 보다 적은 수의 부품이 요구된다는 장점을 갖는다. 더욱이, 완전한 6 자유도를 필요로 하지 않는 자동화 작업이 많이 존재하므로 응용가치가 높다. 예를 들어, 축대칭 공구를 갖는 공작기계에서는 최대 5 자유도만을 필요로 하며, 많은 자동조립작업이 3 자유도 직선운동 또는 1 자유도 회전운동이 첨가된 4 자유도만을 요구한다. 따라서, 완전한 6 자유도를 필요로 하지 않는 응용 분야에서는, 저자유도 병렬형 기구를 사용하는 것이 경제적이다. 저자유도 병렬형 기구 중, 3 자유도 직선운동⁽⁸⁻¹¹⁾ 및 회전운동기구^(12,13)와 5 자유도 기구⁽¹⁴⁾가 최근 주요 연구대상이 되고 있다.

고속, 고정밀 및 고강성 성능을 요구하는 기구 설계시, 강성해석은 초기 설계에서 매우 기초적이고 필수적인 단계이다. 6 자유도 병렬형 기구의 경우, 특히, 스튜어트 플랫폼의 강성해석 방법은 이미 많은 연구자에 의하여 발표되었다.⁽¹⁵⁻¹⁷⁾ 그러나, 저자유도 병렬형 기구의 강성해석 방법은 그 중요

* 회원, 경남대학교 공과대학 기계자동화공학부

E-mail : hkim@kyungnam.ac.kr

TEL : (055)249-2627 FAX : (055)249-2617

성에 비하여 많은 연구가 진행되고 있지 않다. 기존 연구결과들 중, Zhang 과 Gosselin⁽¹⁸⁻²¹⁾은 중앙에 수동 구속 다리가 있는 저자유도 병렬형 기구의 강성을 모델링 하였다. 구속방향에 가상 조인트를 추가하여, 수동 구속 다리를 6 자유도 직렬체인으로 모델링 하고, 이의 강성과 나머지 구동 다리의 강성을 병렬로 연결하여 직교 강성행렬을 구하였다. 그러나, 이 방법은 가상 조인트(virtual joint)를 구하는 방법이 체계적이지 못하고 중앙에 수동 구속 다리가 있는 기구의 응용에 한정된다는 단점을 가지고 있다. 더욱이, 구속방향의 강성을 나타내는 가상 스프링이 직렬로 연결되었다고 모델링 하였으나, 각각의 가상 스프링은 이동 플랫폼에서 고정부에 직접 연결되므로 병렬로 연결되었다고 모델링 하는 것이 타당하다. 한편, 6 자유도 병렬형 기구의 직교 강성행렬은 6×6 자코비안 행렬로 구성됨은 잘 알려져 있다. 그러나, 저자유도 병렬형 기구의 경우, 특히, 위치와 자세가 연성화된 기구의 경우, 어떠한 크기의 자코비안 행렬로 직교 강성행렬을 표현해야 하는지 그리고 강성사상의 입출력변수를 어떻게 정해야 하는지 명확하지 않다. Joshi 와 Tsai⁽²²⁾는 저자유도 병렬형 기구의 경우에도 모든 특이성을 완벽하게 해석하기 위해서는 구속조건을 고려한 6×6 자코비안 행렬을 사용해야 함을 발표하였다. 예를 들어 3 자유도 기구의 경우 3×3 자코비안 행렬을 구할 수 있는데, 이러한 부분적 자코비안 해석은 모든 특이성을 예측할 수 없다.^(23,24)

본 논문에서는 기존 연구의 문제점을 해결하고 일반적인 저자유도 병렬형 기구에 적용할 수 있는 강성해석 방법을 제시하고자 한다. 이를 위한 접근 방법으로, 각 다리의 구동력 및 구속조건에 의하여 발생할 수 있는 반력에 기초하여 정역학적 관계를 유도하고, 여기서 얻어진 6×6 자코비안 행렬을 이용하여 6×6 직교 강성행렬을 구하고자 한다. 예를 들어, 각 다리 구속부에 순응성이 존재하는 경우, 저자유도 기구의 운동방향뿐만 아니라 구속방향으로도 미소 변위가 발생하게 되므로, 운동방향만을 고려하는 부분적 자코비안 행렬을 이용하면 정확한 강성해석을 수행할 수 없다. 더욱이, 구속 특이성(constraint singularity)⁽²²⁾이 존재하는 경우, 이러한 부분적 자코비안 행렬을 이용하여 구한 강성행렬은 구속방향으로의 큰 변형을 예측할 수 없다. 따라서, 6×6 자코비안 행렬에 기초하여 강성해석을 수행해야만 강성 설계시 오류를 방지할 수 있다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2 장에서는 역나선 이론을 이용하여 정역학적 관계를 유도하고, 3 장에서는 2 장에서 구한 구동 및 구속 역나선을 사용하여 각 다리의 강성을 모델링하고 가상일의 원리를 이용하여 직교 강성행렬을 유도하였다. 4 장에서는 3 가지 형태의 저자유도 병렬형 기구의 강성해석을 제시하였다.

2. 정역학 해석

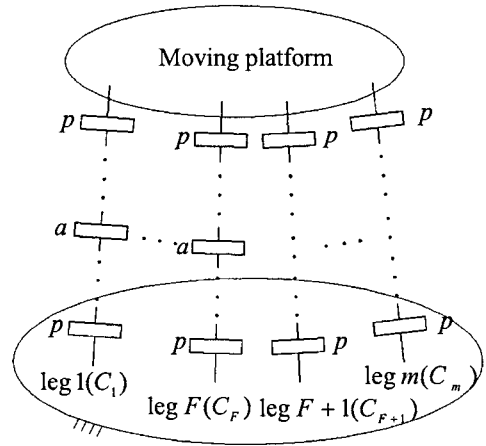


Fig. 1 Structure of a F -DOF parallel manipulator (Note: a : active joint, p : passive joint)

본 논문에서 대상으로 하는 기구는 F -DOF (degrees of freedom)를 갖는 저자유도 공간 병렬형 기구이다. 여기서, $3 \leq F < 6$ 이다. Fig. 1 과 같이 이동 플랫폼(moving platform)은 m 개의 직렬체인(serial kinematic chain), 즉, 다리(leg)들에 의하여 구속되고, 각 다리는 최대 한 개의 구동기를 갖는다고 가정하였다. 구동기를 갖는 다리의 번호를 먼저 $i=1,2,\dots,F$ 로, 나머지 구동기를 갖지 않는 다리의 번호를 $i=F+1,F+2,\dots,m$ 으로 설정하였다. i 번째 다리의 모든 조인트의 자유도를 연결도(connectivity, C_i)라고 정의하면,^(25,26) 각 다리는 $6-C_i$ 개의 구속조건으로 이동 플랫폼의 운동을 제한하고, 모든 다리의 독립적인 구속조건의 합은 $6-F$ 이 되어야 함을 알 수 있다.

정역학 해석을 위해 저자유도 병렬형 기구의 이동 플랫폼에 임의 방향의 렌치(wrench)가 작용되는 경우를 고려하고자 한다. 저자유도 기구의 경우, 임의의 렌치는 F 개의 구동기에 의한 구동력과 $6-F$ 개의 독립적인 구속에 의한 반력과 평형을 이룬다. 본 논문에서는 이러한 구동력 및 구속에 의한 반력의 종류 및 방향을 구하기 위하여 역나선 이론(theory of reciprocal screws)을 이용하고자 한다.^(25,27,28) 역나선을 구하기 위하여, 이동 플랫폼의 트위스트(twist)를 각 다리를 구성하는 1-DOF 조인트의 단위나선(unit screw)들의 선형조합으로 다음과 같이 나타낼 필요가 있다.⁽²⁹⁾

$$\hat{T}_p = \sum_{j=1}^{C_i} \hat{O}_{j,i} \hat{S}_{j,i} \quad \text{for } i=1,2,\dots,m \quad (1)$$

여기서, \hat{T}_p 과 \hat{S} 은 축좌표계(axis coordinate)⁽²⁷⁾로 표현된 이동 플랫폼의 트위스트와 조인트의 단위 나선을 나타내고, $\dot{\theta}$ 은 조인트의 속도를 표현한다. 아래 첨자 i 와 j 는 다리의 번호와 해당되는 다리의 조인트 번호를 각각 표시한다.

다음과 같은 방법을 사용하여, i 번째 다리의 역나선을 구하고자 한다.⁽²²⁾ 먼저, 구속에 의한 반력을 나타내는 구속 역나선(reciprocal screw of constraints)은 다음과 같이 해당 다리의 모든 조인트 나선들과 역의 관계를 만족해야 하며 $6-C_i$ 나선 시스템을 이룬다.

$$\hat{s}_{c,k,j}^T \hat{T}_p = 0 \quad \text{for } k=1,2,\dots,(6-C_i) \quad (2)$$

여기서, \hat{s} 는 방사좌표계(ray coordinate)⁽²⁷⁾로 표현된 단위나선을 나타낸다.

다음, 구동력을 나타내는 구동 역나선(reciprocal screw of actuations)은 다음과 같이 해당다리의 구동 조인트를 제외한 모든 수동 조인트 나선들과 역의 관계를 만족해야 하며 $6-C_i$ 구속 역나선 시스템에 속하지 않는 추가의 역나선으로 구성된다.

$$\hat{s}_{a,j}^T \hat{T}_p' = 0 \quad (3)$$

여기서, \hat{T}_p' 는 수동 조인트(passive joint) 단위나선들만의 선형조합으로 구성된 트위스트이다.

위의 과정으로 총 6 개의 독립적인 역나선을 구할 수 있다. 기구부의 중력을 무시하면, 이동 플랫폼에 작용되는 임의의 렌치는 다음의 식과 같이 구동기에 의한 F 개의 구동력 및 구속에 의한 독립적인 $6-F$ 개의 반력과 평형을 이룬다.

$$\begin{aligned} \hat{w} = & [\tau_{a,1} \hat{s}_{a,1} + \dots + \tau_{a,F} \hat{s}_{a,F}] \\ & + [(\tau_{c,1,1} \hat{s}_{c,1,1} + \dots + \tau_{c,6-C_i,1} \hat{s}_{c,6-C_i,1}) + \dots \\ & + (\tau_{c,1,m} \hat{s}_{c,1,m} + \dots + \tau_{c,6-C_i,m} \hat{s}_{c,6-C_i,m})] \end{aligned} \quad (4)$$

여기서, f 와 m 을 엔드이펙터에 작용하는 힘과 모멘트라 할 때, 방사좌표계로 표현된 렌치는 $\hat{w} = [f^T, m^T]^T$ 이고, τ_a 는 구동기에 의한 구동력 크기를 나타내며, τ_c 는 구속에 의한 반력의 크기를 나타낸다. 위의 식을 자코비안 행렬과 조인트 힘 벡터로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\hat{w} = J_a \tau_a + J_c \tau_c = J \tau \quad (5)$$

여기서, 구동기와 관련된 구동 자코비안 행렬과 구속조건과 관련된 구속 자코비안 행렬을 각각 식 (6)과 식 (7)과 같이 나타낼 수 있다.⁽²²⁾

$$J_a = [\hat{s}_{a,1} \quad \dots \quad \hat{s}_{a,F}] \in R^{6 \times F} \quad (6)$$

$$J_c = [\hat{s}_{c,1,1} \quad \dots \quad \hat{s}_{c,6-C_i,1} \quad \dots \quad \hat{s}_{c,1,m} \quad \dots \quad \hat{s}_{c,6-C_i,m}] \in R^{6 \times (6-F)} \quad (7)$$

따라서, 전체 자코비안 행렬은 다음과 같다.

$$J = [J_a \quad J_c] \in R^{6 \times 6} \quad (8)$$

그리고, $\tau_a = [\tau_{a,1}, \dots, \tau_{a,F}]^T \in R^{F \times 1}$ 는 구동력 벡터를, $\tau_c = [\tau_{c,1,1}, \dots, \tau_{c,6-C_i,1}, \dots, \tau_{c,1,m}, \dots, \tau_{c,6-C_i,m}]^T \in R^{(6-F) \times 1}$ 는 구속에 의한 반력 벡터를, $\tau = [\tau_a^T, \tau_c^T]^T \in R^{6 \times 1}$ 는 전체 조인트 힘 벡터를 나타낸다.

2. 강성 해석

본 논문에서는 모든 링크(link)를 강체로 가정하고, 기구의 순응성(compliance)의 주요 원인을 작용되는 힘 또는 모멘트에 대한 배어링, 동력전달장치 및 제어기에서 발생할 수 있는 미소변위로 가정하였다.⁽²⁵⁾ 한편, 역나선은 영 피치 역나선(zero-pitch reciprocal screw), 무한 피치 역나선(infinite-pitch reciprocal screw), 유한 피치 역나선(finite-pitch reciprocal screw)으로 다음과 같이 구분될 수 있다.

$$\hat{s} = \begin{bmatrix} s \\ r \times s \end{bmatrix}, \quad \hat{s} = \begin{bmatrix} 0 \\ s \end{bmatrix}, \quad \hat{s} = \begin{bmatrix} s \\ r \times s + hs \end{bmatrix} \quad (9)$$

여기서, s 는 나선의 단위 방향벡터이고, r 은 기준 좌표계에서 나선까지의 거리벡터이며, h 는 피치(pitch)를 나타낸다. 임의의 트위스트 시스템에 대한 역나선을 고려할 때, 식 (9)중 첫 번째 및 두 번째 식의 물리적 의미는 순 힘과 순 짝힘에 해당한다. 일반적으로 역나선의 기저(base)를 순 힘 또는 순 짝힘으로 구할 수 있으므로, 본 연구에서는 유한 피치 역나선의 경우는 고려하지 않았다.

순응성을 갖는 해당 다리에 순 힘이 작용하면, 순 힘이 가해지는 직선을 따라 미소 직선변위(infinitesimal translational displacement)가 발생하게 된다. 반면, 순 짝힘을 가할 경우, 순 짝힘의 축방향에 대한 미소 회전변위(infinitesimal rotational displacement)가 발생한다. 따라서, 미소 직선변위를 순 힘의 직선상에 위치한 선형 스프링(linear spring)의 미소직선변형으로, 미소 회전변위를 순 짝힘의 축에 대한 회전 스프링(rotational spring)의 미소회전변형으로 모델링 할 수 있다. 앞 장에서 살펴본 바와 같이, 이동 플랫폼에 작용하는 역나선은 총 6 개이므로 이동 플랫폼은 총 6 개의 독립적인 스프링들로 지지되고 있다고 모델링 할 수

있다. 이 중 F 개는 구동기에 관련된 스프링이고, $6-F$ 개는 구속조건에 관련된 스프링이다. 구동기에 관련된 스프링 상수를 $k_{a,i}$ ($i=1,2,\dots,F$) 로 구속조건과 관련된 스프링 상수를 $k_{c,i}$ ($i=F+1,\dots,6$) 로 정의하면, 스프링에 작용되는 힘과 해당되는 스프링의 미소 변위와의 관계는 다음과 같다.

$$\tau_a = [k_a] \delta q_a, \quad \tau_c = [k_c] \delta q_c \quad (10)$$

여기서, $[k_a]$ 와 $[k_c]$ 는 각각 $k_{a,i}$ 와 $k_{c,i}$ 를 대각원소로 갖는 대각행렬(diagonal matrix)이고, δq_a 와 δq_c 는 각각 구동기와 구속조건에 관련된 스프링의 미소변위 벡터이다. 가상일 원리(principle of virtual work)를 이용하여 다음의 식을 유도할 수 있다.

$$\dot{w}^T \delta \hat{D} = \tau_a^T \delta q_a + \tau_c^T \delta q_c \quad (11)$$

여기서, δx 와 $\delta \theta$ 를 각각 엔드이펙터의 미소 직선변위와 미소 회전변위라 할 때, $\delta \hat{D} = [\delta x^T, \delta \theta^T]^T$ 는 축좌표계로 표현된 미소 트위스트를 나타낸다. 식 (5)를 식 (11)에 대입하면, 다음과 같다.

$$\tau_a^T J_a^T \delta \hat{D} + \tau_c^T J_c^T \delta \hat{D} = \tau_a^T \delta q_a + \tau_c^T \delta q_c \quad (12)$$

임의의 τ_a 및 τ_c 벡터에 대하여 식 (12)가 성립하여야 하므로, $\delta \hat{D}$ 와 δq_a 및 δq_c 와의 관계를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\delta q_a = J_a^T \delta \hat{D}, \quad \delta q_c = J_c^T \delta \hat{D} \quad (13)$$

식 (10)을 식 (11)에 대입하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\dot{w}^T \delta \hat{D} = \delta q_a^T [k_a] \delta q_a + \delta q_c^T [k_c] \delta q_c \quad (14)$$

식 (13)을 이용하여 식 (14)를 다시 표현하면 아래와 같다.

$$\dot{w}^T \delta \hat{D} = \delta \hat{D}^T J_a [k_a] J_a^T \delta \hat{D} + \delta \hat{D}^T J_c [k_c] J_c^T \delta \hat{D} \quad (15)$$

임의의 $\delta \hat{D}$ 에 대하여 식 (15)가 성립하여야 하므로, 이동 플랫폼의 미소 트위스트와 작용된 렌치와의 관계를 직교 강성행렬에 의하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{w} = K \delta \hat{D} \quad (16)$$

여기서, 직교 강성행렬은 구동부의 직교 강성행렬

과 구속부의 직교 강성행렬의 합으로 다음과 같다.

$$K = J_a [k_a] J_a^T + J_c [k_c] J_c^T \quad (17)$$

전체 자코비안 행렬을 이용하여 위의 직교 강성행렬을 다음과 같이 간략히 나타낼 수 있다.

$$K = J [k] J^T \quad (18)$$

여기서, $J = [J_a \quad J_c]$ 이고 $[k] = \begin{bmatrix} [k_a] & 0 \\ 0 & [k_c] \end{bmatrix}$ 이다. 그리고 J 는 양의 반한정 행렬이고 $[k]$ 는 양의 한정 대칭행렬이므로, 직교 강성행렬은 양의 반한정 대칭행렬이 된다.

식 (18)의 직교 강성행렬은 6 자유도 병렬형 기구의 직교 강성행렬과 비슷한 구조를 갖는다.⁽¹⁵⁻¹⁷⁾ 즉, 6 자유도 병렬형 기구의 경우, 구속조건이 존재하지 않으므로 직교 강성행렬은 구동부의 직교 강성행렬로만 표현된다. 반면, 저자유도 병렬형 기구의 경우 직교 강성행렬은 구동부 및 구속부의 직교 강성행렬의 합으로 표현되어야 한다.

3. 강성 해석 예

본 장에서는 3 장에서 개발한 강성해석 방법의 유효성을 보이기 위하여, 3 가지 형태의 3 자유도 병렬형 기구의 강성해석을 수행하였다. 예시된 기구의 i 번째 다리는 A_i 점에서 고정 플랫폼에 연결되고 B_i 점에서 이동 플랫폼에 연결된다고 가정하였다. 해석을 위하여 3 개의 좌표계를 설정하였다. 먼저, 고정 좌표계($A:xyz$)는 고정 플랫폼상의 O 점에 고정된 좌표계로, 이동 좌표계($B:uvw$)는 이동 플랫폼상의 P 점에 고정된 좌표계로 정의하였으며, 해석의 편의성을 위하여 순간 참조 좌표계($C:x'y'z'$)⁽²⁵⁾를 정의하였다. 이 좌표계의 원점은 P 점에 있고, x' , y' , z' 축은 각각 x , y , z 축과 평행하다고 정의하였다. 모든 나선들은 순간 참조 좌표계에 관하여 표현되었다.

3.1 3-UPU 병렬형 기구

Fig. 2 는 3-UPU(Universal-Prismatic-Universal) 병렬형 기구의 기구학적 모델을 나타낸다. 이 기구는 대표적인 3 자유도 직선운동기구로, 일반적으로 선형 구동기가 직선 조인트를 구동한다.⁽⁸⁾ 각 다리의 연결도는 $C_i=5$ 이므로 이동 플랫폼의 트위스트를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\hat{T}_p = \dot{\theta}_{1,i} \hat{S}_{1,i} + \dot{\theta}_{2,i} \hat{S}_{2,i} + \dot{d}_{3,i} \hat{S}_{3,i} + \dot{\theta}_{4,i} \hat{S}_{4,i} + \dot{\theta}_{5,i} \hat{S}_{5,i} \quad (19)$$

여기서, 각 조인트 단위나선은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{S}_{1,j} &= \begin{bmatrix} (b_i - d_i) \times s_{1,j} \\ s_{1,j} \end{bmatrix}, \quad \hat{S}_{2,j} = \begin{bmatrix} (b_i - d_i) \times s_{2,j} \\ s_{2,j} \end{bmatrix}, \\ \hat{S}_{3,j} &= \begin{bmatrix} s_{3,j} \\ \theta \end{bmatrix}, \quad \hat{S}_{4,j} = \begin{bmatrix} b_i \times s_{4,j} \\ s_{4,j} \end{bmatrix}, \quad \hat{S}_{5,j} = \begin{bmatrix} b_i \times s_{5,j} \\ s_{5,j} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

여기서, $s_{j,i}$ 는 i 번째 다리의 j 번째 조인트의 단위방향벡터이고, $b_i = \overline{PB_i}$ 이며, $d_i = \overline{A_iB_i} = d_{3,i} s_{3,i}$ 이다. 3-UPU 병렬형 기구가 직선운동만 가능하기 위해서는, $s_{1,i} = s_{3,i}$ 와 $s_{2,i} = s_{4,i}$ 조건을 만족하여야 한다.⁽²²⁾

$C_i = 5$ 이므로 모든 조인트 나선에 역의 관계에 있는 구속 역나선은 1 차 시스템을 이룬다. 이 구속 역나선은 첫 번째 및 두 번째 유니버설 조인트의 두 축과 수직 방향인 무한 퍼치 나선이다.

$$\hat{s}_{c,i} = \begin{bmatrix} \theta \\ n_i \end{bmatrix} \quad \text{for } i=1,2,3 \quad (21)$$

여기서, $n_i = s_{2,i} \times s_{3,i}$ (또는, $n_i = s_{4,i} \times s_{5,i}$) 이다.

그리고, 구동기가 고정되어 있을 때, 역나선은 2 차 시스템을 이룬다. 하나의 추가 구속 역나선은 두 개의 유니버설 조인트를 잇는 선 벡터이다.

$$\hat{s}_{d,i} = \begin{bmatrix} s_{3,i} \\ b_i \times s_{3,i} \end{bmatrix} \quad \text{for } i=1,2,3 \quad (22)$$

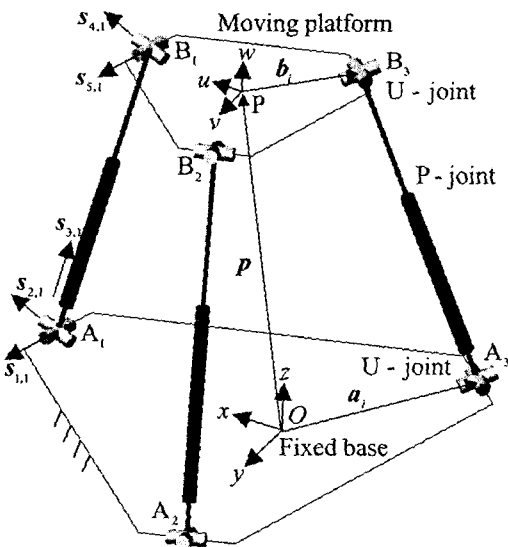


Fig. 2 Kinematic model of a 3-UPU parallel manipulator

구동 및 구속 역나선의 물리적 의미는 각각 순힘과 순 짝힘이므로, Fig. 3 과 같이 각 다리를 선형 스프링과 회전 스프링으로 모델링 할 수 있다. 선형 스프링은 두 개의 유니버설 조인트의 중심점을 통과하는 선상에 위치하고, 회전 스프링 축은 유니버설 조인트의 두 축과 서로 직교한다. 식 (18)로부터, 직교 강성행렬을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$K = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^3 s_{1,i}(k_i) s_{1,i}^T & \sum_{i=1}^3 s_{1,i}(k_i)(b_i \times s_{1,i})^T \\ \sum_{i=1}^3 (b_i \times s_{1,i})(k_i) s_{1,i}^T & \sum_{i=1}^3 (b_i \times s_{1,i})(k_i)(b_i \times s_{1,i})^T + \sum_{i=1}^3 n_i(k_i) n_i^T \end{bmatrix} \quad (23)$$

여기서, $k_{i,j}$ 와 $k_{r,i}$ 는 선형 및 회전 스프링 상수이고, $[k_i] = \text{diag}[k_{i,1}, k_{i,2}, k_{i,3}]$ 과 $[k_r] = \text{diag}[k_{r,1}, k_{r,2}, k_{r,3}]$ 은 대각행렬이다.

다음의 수치 예를 통하여 유도된 강성행렬의 물리적 의미를 설명하고자 한다. 먼저, 예로 든 기구의 이동 플랫폼의 위치는 $p = [0, 0, 1]^T$ 이고, 고정 좌표계에서 표현된 상하 유니버설 조인트의 위치 벡터는 다음과 같다.

$$a_1 = [2, 0, 0]^T, \quad a_2 = [-1, \sqrt{3}, 0]^T, \quad a_3 = [-1, -\sqrt{3}, 0]^T$$

$$b_1 = [1, 0, 1]^T, \quad b_2 = [-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1]^T, \quad b_3 = [-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]^T$$

그리고, 이 위치에서 n_i 벡터는 해당 선형구동기의 단위방향벡터와 같게 된다. 위의 조건과 3 개의 선형 및 회전 스프링 상수가 서로 동일하다고 가정하면 직교 순응행렬(K^{-1})의 대각원소를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} & [\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta \theta_x, \Delta \theta_y, \Delta \theta_z] \\ & = \left[\frac{4}{3} \left(\frac{1}{k_i} + \frac{1}{k_r} \right), \frac{4}{3} \left(\frac{1}{k_i} + \frac{1}{k_r} \right), \frac{2}{3k_i}, \frac{4}{3k_r}, \frac{4}{3k_r}, \frac{2}{3k_r} \right] \end{aligned} \quad (24)$$

한편, 직선운동과 3 개 구동기의 입출력관계만을 고려한 3x3 자코비안 행렬을 이용하여 직교 순응행렬의 대각원소를 구하면 다음과 같다.

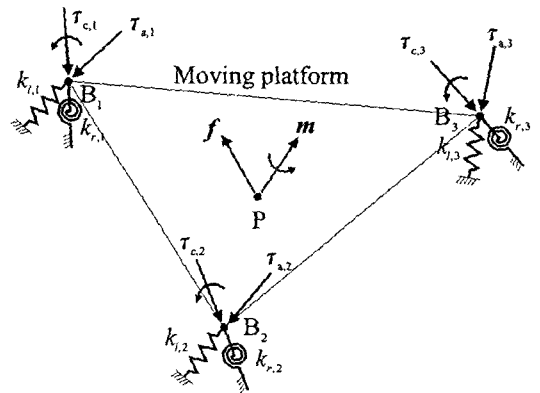


Fig. 3 Statics relation and stiffness model of a 3-UPU parallel manipulator

$$[\Delta x, \Delta y, \Delta z] = \left[\frac{4}{3k_i}, \frac{4}{3k_i}, \frac{2}{3k_i} \right] \quad (25)$$

구속부를 강체로 가정할 수 있는 경우($k_i = \infty$), 기구의 회전변형은 발생하지 않고 식 (24)는 식 (25)와 같다. 그러나 구속부에 순응성이 존재할 경우, 기존의 방법은 정확한 직교공간상의 변형을 예측할 수 없다. 더욱이, 구속 자코비안 행렬이 특이해지는 경우, 기존의 방법은 구속 자코비안 행렬을 포함하지 않으므로 구속방향으로의 큰 변형을 예측할 수 없다.

3.2 3-PRRR 병렬형 기구

3-PRRR(Prismatic-Revolute-Revolute-Revolute) 병렬 구조 기구는 Fig. 4 에서 보는 바와 같이, 각 다리의 4 개의 조인트 축들이 모두 평행하고, 모든 다리의 직선 조인트들이 서로 직교로 배열되어 있다. 각 다리의 연결도는 $C_i = 4$ 이고 각 다리가 2 개의 회전 구속조건으로 이동 플랫폼의 회전 운동을 제한한다. Gruebler 자유도 식 (26)에 의하면 자유도가 0 이지만, 6 개의 회전 구속조건 중 3 개만이 독립적이므로, 3 자유도 직선운동이 가능한 기구이다.^(10,11)

이동 플랫폼의 트위스트를 4 개의 조인트 단위나선들의 선형조합으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\hat{T}_p = \dot{d}_i \hat{S}_{1,i} + \dot{\theta}_{2,i} \hat{S}_{2,i} + \dot{\theta}_{3,i} \hat{S}_{3,i} + \dot{\theta}_{4,i} \hat{S}_{4,i} \text{ for } i=1,2,3 \quad (26)$$

여기서, 각 조인트의 단위나선은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{S}_{1,i} &= \begin{bmatrix} s_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{S}_{2,i} = \begin{bmatrix} r_{1,i} \times s_i \\ s_i \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \hat{S}_{3,i} &= \begin{bmatrix} r_{2,i} \times s_i \\ 0 \\ s_i \end{bmatrix}, \hat{S}_{4,i} = \begin{bmatrix} r_{3,i} \times s_i \\ 0 \\ s_i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (27)$$

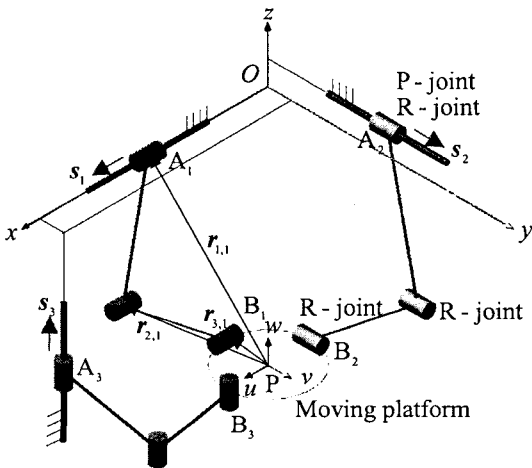


Fig. 4 Kinematic model of a 3-PRRR parallel manipulator

여기서, 각 다리의 조인트 축은 서로 직교한다 ($s_1 = i, s_2 = j, s_3 = k$).

$C_i = 4$ 이므로 모든 조인트 나선에 역의 관계에 있는 구속 역나선은 2 차 시스템을 이룬다. 이 구속 역나선들은 조인트 축과 직교방향인 무한 피치 나선이다.

$$\hat{s}_{c,1,i} = \begin{bmatrix} 0 \\ n_{1,i} \end{bmatrix}, \hat{s}_{c,2,i} = \begin{bmatrix} 0 \\ n_{2,i} \end{bmatrix} \text{ for } i=1,2,3 \quad (28)$$

여기서, $n_{1,1} = j, n_{2,1} = k, n_{1,2} = k, n_{2,2} = i, n_{1,3} = i, n_{2,3} = j$ 이다.

그리고, 구동기가 고정되어 있을 때, 역나선은 3 차 시스템을 이룬다. 하나의 추가 구동 역나선은 조인트 축과 평행한 임의의 영 피치 나선이 가능하다. 해석의 편의성을 위하여 이 영 피치 나선을 이동 좌표계의 원점 P 점을 지나가는 선벡터로 선택하면, 구동 역나선은 다음과 같다.

$$\hat{s}_{a,i} = \begin{bmatrix} s_i \\ 0 \end{bmatrix} \text{ for } i=1,2,3 \quad (29)$$

출력 렌치를 구동력과 구속에 의한 반력의 합으로 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \hat{w} &= \tau_{a,1} \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix} + \tau_{a,2} \begin{bmatrix} j \\ 0 \end{bmatrix} + \tau_{a,3} \begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix} \\ &+ \tau_{c,1,1} \begin{bmatrix} 0 \\ j \end{bmatrix} + \tau_{c,2,1} \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} + \tau_{c,1,2} \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} \\ &+ \tau_{c,2,2} \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix} + \tau_{c,1,3} \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix} + \tau_{c,2,3} \begin{bmatrix} 0 \\ j \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (30)$$

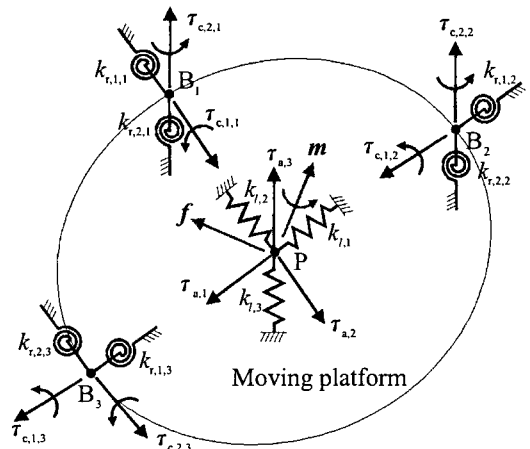


Fig. 5 Statics relation and stiffness model of a 3-PRRR parallel manipulator

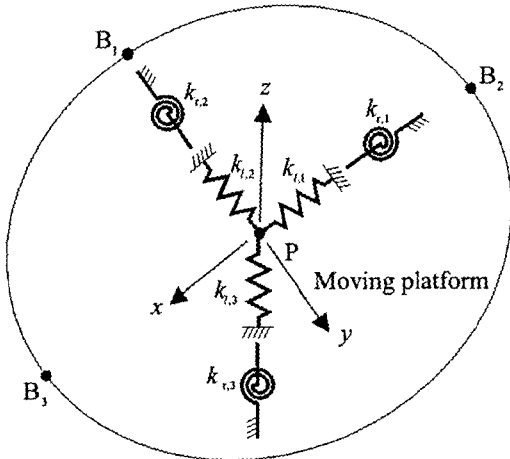


Fig. 6 Stiffness model of a 3-PRRR parallel manipulator

서로 중첩이 되는 반력을 합하여 정리하면 다음과 같다.

$$\hat{w} = \tau_{a,1} \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \tau_{a,2} \begin{bmatrix} j \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \tau_{a,3} \begin{bmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \tau_{c,1} \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{bmatrix} + \tau_{c,2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ j \end{bmatrix} + \tau_{c,3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{bmatrix} \quad (31)$$

여기서, $\tau_{c,1} = \tau_{c,2,2} + \tau_{c,1,3}$, $\tau_{c,2} = \tau_{c,2,3} + \tau_{c,1,1}$, $\tau_{c,3} = \tau_{c,2,1} + \tau_{c,1,2}$ 이다. 따라서, 구동 및 구속 자코비안 행렬을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$J_a = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$J_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ i & j & k \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

구동 및 구속 역나선은 각각 순 힘과 순 짝힘이므로, Fig. 5 와 같이 각 다리를 하나의 선형 스프링과 두 개의 회전 스프링으로 모델링 할 수 있다. 정역학 해석과 비슷하게 같은 방향의 두 개의 회전 스프링은 병렬연결이므로 Fig. 6 과 같이 하나의 등가 회전 스프링으로 모델링 할 수 있다. 전체 자코비안 행렬이 6×6 단위대각행렬이므로, 강성행렬은 다음과 같이 스프링 상수를 대각원소로 갖는 대각행렬이 된다.

$$K = [k] \quad (34)$$

여기서, $[k] = \text{diag}[k_{i,1}, k_{i,2}, k_{i,3}, k_{r,1}, k_{r,2}, k_{r,3}]$ 이고, $k_{r,1} = k_{r,2,2} + k_{r,1,3}$, $k_{r,2} = k_{r,2,3} + k_{r,1,1}$, $k_{r,3} = k_{r,2,1} + k_{r,1,2}$ 이다.

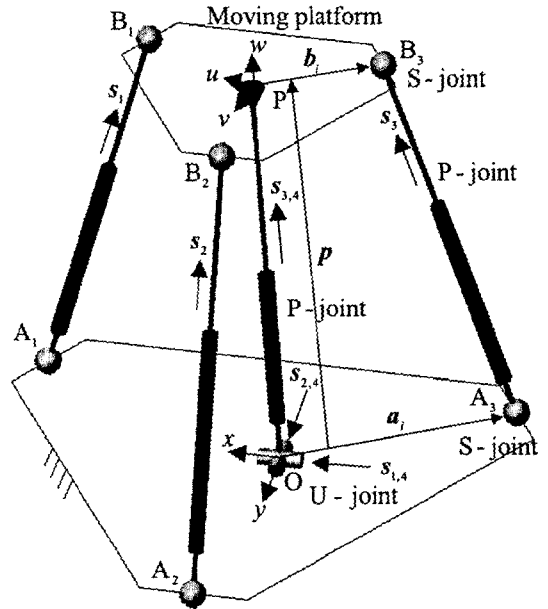


Fig. 7 Kinematic model of a Tricept parallel manipulator

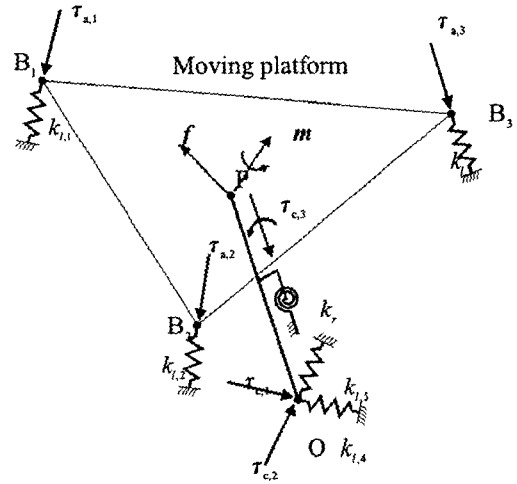


Fig. 8 Statics relation and stiffness model of a Tricept parallel manipulator

3.3 Tricept 병렬형 기구

Fig. 7 에서와 같이, Tricept 병렬형 기구는 구동기를 갖는 3 개의 SPS(Spherical-Prismatic-Spherical) 다리들과 구동기가 없는 1 개의 수동 UP(Universal-Prismatic) 다리로 구성된다.^(7,20) 2 장의 정의에 따라, 구동기를 갖지 않는 다리의 번호는 $i=4$ 로 설정하였다.

SPS 다리의 연결도가 6 이므로, 구동되는 3 개 다리의 구속 역나선은 존재하지 않는다. 한편, 수동 구속 다리의 구동 역나선도 존재하지 않는다.

먼저, 구동되는 다리들($i=1,2,3$)의 구동 역나선은 다음과 같이 두 개의 구형 조인트의 중심을 지나가는 영 피치 나선이다.

$$\hat{s}_{a,i} = \begin{bmatrix} s_i \\ \mathbf{b}_i \times \mathbf{s}_i \end{bmatrix} \quad \text{for } i=1,2,3 \quad (35)$$

여기서, s_i 는 선형 조인트의 단위방향벡터이고, $\mathbf{b}_i = \overline{PB}_i$ 이다.

수동 구속다리의 연결도는 $C_4 = 3$ 이므로, 이동 플랫폼의 트위스트를 3 개의 조인트 단위나선들의 선형조합으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\hat{T}_p = \hat{\theta}_{1,4} \hat{S}_{1,4} + \hat{\theta}_{2,4} \hat{S}_{2,4} + \hat{d}_{3,4} \hat{S}_{3,4} \quad (36)$$

여기서,

$$\hat{S}_{1,4} = \begin{bmatrix} -\mathbf{p} \times s_{1,4} \\ s_{1,4} \end{bmatrix}, \quad \hat{S}_{2,4} = \begin{bmatrix} -\mathbf{p} \times s_{2,4} \\ s_{2,4} \end{bmatrix}, \quad \hat{S}_{3,4} = \begin{bmatrix} s_{3,4} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

이고 $\mathbf{p} = \overline{OP}$ 이다. 수동 다리의 구속 역나선을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\hat{s}_{c,1} = \begin{bmatrix} s_4 \\ -\mathbf{p} \times s_4 \end{bmatrix}, \quad \hat{s}_{c,2} = \begin{bmatrix} s_5 \\ -\mathbf{p} \times s_5 \end{bmatrix}, \quad \hat{s}_{c,3} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ s_6 \end{bmatrix} \quad (37)$$

여기서, $s_4 = s_{2,4} \times (s_{1,4} \times s_{2,4})$, $s_5 = s_{2,4}$, $s_6 = s_{1,4} \times s_{2,4}$ 이다. 따라서, 구동 및 구속 자코비안 행렬을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$J_a = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \\ \mathbf{b}_1 \times s_1 & \mathbf{b}_2 \times s_2 & \mathbf{b}_3 \times s_3 \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$J_c = \begin{bmatrix} s_4 & s_5 & \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_4 \times s_4 & \mathbf{b}_5 \times s_5 & s_6 \end{bmatrix} \quad (39)$$

여기서, $\mathbf{b}_4 = \mathbf{b}_5 = -\mathbf{p}$ 이다.

Fig. 8 과 같이, 구동 역나선은 순 힘이므로, 선형 스프링으로 각 구동다리를 모델링 할 수 있다. 또한, 구속 역나선 중 $\hat{s}_{c,1}$ 와 $\hat{s}_{c,2}$ 는 순 힘이므로 고정 좌표계의 원점에 위치한 선형 스프링으로 $\hat{s}_{c,3}$ 는 순 짝힘이므로 회전 스프링으로 수동 구속다리를 모델링 할 수 있다. 식 (18)을 이용하여, 강성행렬을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$K = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^3 s_i [k_i] s_i^T & \sum_{i=1}^3 s_i [k_i] (\mathbf{b}_i \times s_i)^T \\ \sum_{i=1}^3 (\mathbf{b}_i \times s_i) [k_i] s_i^T & \sum_{i=1}^3 (\mathbf{b}_i \times s_i) [k_i] (\mathbf{b}_i \times s_i)^T + k_r s_6^T \end{bmatrix} \quad (40)$$

여기서, $k_{1,1}, k_{1,2}, k_{1,3}$ 과 $k_{1,4}, k_{1,5}$ 를 각각 구동 및 구속 역나선에 관련된 선형 스프링 상수로 정의하면, $[k_i] = \text{diag}[k_{i,1}, k_{i,2}, k_{i,3}, k_{i,4}, k_{i,5}]$ 이고, k_r 은 회전 스프링 상수이다.

4. 결론

본 논문에서는 역나선 이론을 이용하여, 저자유도 병렬형 기구의 정역학 해석 및 강성해석 방법을 제시하였다. F -DOF 기구의 경우, F 개의 구동 역나선과 $6-F$ 개의 구속 역나선을 이용하여 정역학적 관계를 유도하였다. 역나선의 종류, 방향 및 위치에 따라, 저자유도 병렬기구 각 다리의 강성을 모델링 하였고, 6×6 직교 강성행렬은 구동부 및 구속부의 직교 강성행렬의 합으로 구성됨을 유도하였다. 제안된 방법은 구속부의 순응성을 무시할 수 없는 경우, 예를 들어, 저자유도 병렬기구를 이용한 공작기계의 강성 평가 및 설계시 효과적으로 사용될 수 있다. 3 가지 다른 형태 기구의 강성해석 예를 통하여, 제안된 방법이 일반적인 저자유도 병렬기구의 강성해석에 적용될 수 있음을 입증하였다.

후 기

본 연구는 2005 학년도 경남대학교 학술논문게재연구비 지원으로 이루어졌으며, 이에 관계자 여러분께 감사 드립니다.

참고문헌

- (1) Stewart, D., 1965, "A Platform with Six Degrees of Freedom," *Proc. Institute of Mechanical Engr.*, London, England, Vol. 180, pp. 371~386.
- (2) Gough V. E. and Whitehall S. G., 1962, "Universal Tire Test Machine," *Proceedings 9th Int. Technical Congress F.I.S.I.T.A.*, Vol. 117, pp.117~135.
- (3) Kim Han Sung and Choi Yong Je, 1999, "The Kinematic Error Bound Analysis of the Stewart Platform," *Trans. of the KSME A*, Vol. 23, No. 10, pp. 1767~1775.
- (4) Kim Nag-In and Chong-Won Lee, 2001, "A New Dynamic Analysis of 6-3 Stewart Platform Manipulator," *Trans. of the KSME A*, Vol. 25, No. 11, pp. 1820~1828.
- (5) Clavel, R. 1988, "Delta, a Fast Robot with Parallel Geometry," *18th International Symposium on Industrial Robots*, Sydney, Australia, pp. 91~100.
- (6) Pierrot, F., Reynaud, C. and Fournier, A., 1990, "DELTA: A Simple and Efficient Parallel Robot," *Robotica*, Vol. 8, pp. 105~109.
- (7) Siciliano, B., 1999, "The Tricept Robot: Inverse Kinematics, Manipulability Analysis and Closed-Loop Direct Kinematics Algorithm," *Robotica*, Vol. 17, pp. 437~445.
- (8) Tsai, L. W. and Joshi, S., 2000, "Kinematics and Optimization of a Spatial 3-UPU Parallel Manipulator," *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 122, No. 4,

- pp. 439~446.
- (9) Wenger, P. and Chablat, D., 2000, "Kinematic Analysis of a New Parallel Machine Tool: The Orthoglide," *Advances in Robot Kinematics*, Edited by J. Lenarcic and M. L. Stanisic, Kluwer Academic Publishers, London, pp. 305~314.
 - (10) Kim, H. S. and Tsai, L. W., 2003, "Design Optimization of a Cartesian Parallel Manipulator," *Journal of Mechanical Design*, Vol. 125, No. 1, pp. 43~51.
 - (11) Kim, H. S. and Tsai, L. W., 2002, "Evaluation of a Cartesian Parallel Manipulator," *8th International Symposium on Advances in Robot Kinematics*, 24~28 June, Caldes de Malavella, Spain, pp. 21~28.
 - (12) Gosselin, C. M. and Angeles, J., 1989, "The Optimum Kinematic Design of a Spherical Three-Degree-of-Freedom Parallel Manipulator," *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, Vol. 111, No. 2, pp. 202~207.
 - (13) Fang, Y. F. and Tsai, L. W., 2004, "Structure Synthesis of a Class of 3-DOF Rotational Parallel Manipulators," *IEEE Trans. on Robotics Automation*, Vol. 20, No. 1, pp. 117~121.
 - (14) Fang, Y. F. and Tsai, L. W., 2002, "Structure Synthesis of a Class of 4-DoF and 5-DOF Parallel Manipulators with Identical Limb Structures," *Int. J. of Robotic Research*, Vol. 21, No. 9, pp. 799~810.
 - (15) Gosselin, C. 1990, "Stiffness Mapping of Parallel Manipulators," *IEEE Transaction on Robotics and Automations*, Vol. 6, pp. 377~382.
 - (16) Griffis, M. and Duffy, J., 1993, "Global Stiffness Modeling of a Class of Simple Compliant Couplings," *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 28, No. 2, pp. 207~224.
 - (17) Tahmasebi, F. and Tsai, L. W., 1995, "On the Stiffness of a Novel Six-Degrees-of-Freedom Parallel Manipulator," *Journal of Robotic Systems*, Vol. 12, No. 12, pp. 845~856.
 - (18) Zhang, D. and Gosselin, C. M., 2001, "Kinetostatic Modeling of N-DOF Parallel Mechanisms with a Passive Constraining Leg and Prismatic Actuators," *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 123, pp. 375~381.
 - (19) Zhang, D. and Gosselin, C. M., 2002, "Kinetostatic Modeling of Parallel Mechanisms with a Passive Constraining Leg and Revolute Actuators," *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 37, pp. 599~617.
 - (20) Zhang, D. and Gosselin, C. M., 2002, "Kinetostatic Analysis and Design Optimization of the Tricept Machine Tool Family," *ASME Journal of Manufacturing Science and Engineering*, Vol. 124, pp. 725~733.
 - (21) Zhang, D. and Gosselin, C. M., 2002, "Parallel Kinematic Machine Design with Kinetostatic Model," *Robotica*, Vol. 20, pp. 429~438.
 - (22) Joshi, S. A. and Tsai, L. W., 2002, "Jacobian Analysis of Limited-DOF Parallel Manipulators," *Journal of Mechanical Design*, Vol. 124, pp. 254~258.
 - (23) Zlatanove, D., Bonev, I. and Gosselin, C., 2002, "Constraint Singularities as C-Space Singularities," *Proceedings of the 8th Advances in Robot Kinematics*, edited by J. Lenarcic and F. Thomas, Kluwer Academic Publishers, pp. 183~192.
 - (24) Han, C., Kim, J., Kim J. and Park, F. C., 2002, "Kinematic Sensitivity Analysis of the 3-UPU Parallel Mechanism," *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 37, pp. 787~798.
 - (25) Tsai, L. W., 1999, *Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators*, John Wiley & Sons, New York, NY.
 - (26) Tsai, L. W., 2000, *Mechanism Design: Enumeration of Kinematic Structures According to Function*, CRC Press, pp. 221~247.
 - (27) Duffy, J., 1996, *Statics and Kinematics with applications to Robotics*, Cambridge University Press.
 - (28) Ball, R. S., 1990, *A Treatise on the Theory of Screws*, Cambridge University Press, Cambridge.
 - (29) Mohamed, M. G. and Duffy, J., 1985, "A Direct Determination of the Instantaneous Kinematics of Fully Parallel Robot Manipulators," *ASME J. Mech., Transm., Autom. Des.*, Vol. 107, pp. 226~229.