

# Mobius변환을 이용한 전력접지층 임피던스의 빠른 계산방법

速報論文

54C-1-8

## A Fast Computation Method of Power Ground Plane Impedance using the Mobius Transform

徐 曠 錫\* · 金 寅 性\*\* · 宋 在 成\*\* · 嚴 泰 守\*\*\*

(Youngsuk Suh · In-Sung Kim · Jae-Sung Song · Tae-Su Eum)

**Abstract** - A new method to reduce the computation time in power/ground-plane analysis is proposed. The existing method using the two dimensional infinite series summation take a lot of computation time. The proposed method is based on the approximation of impedance in the frequency domain through the Mobius transform. This method shows the good accuracy and the high speed in computing. In the case of impedance calculation for 9'x4' board, the proposed method takes 0.16 second of computing time whereas the existing method takes 2.2 second. This method can be applied to the analysis and design of power/ground-plane that need a lot of computation steps.

**Key Words** : 전력노이즈, Power Integrity, Power-Ground Plane Analysis, PCB

### 1. 서 론

반도체 제조기술의 발전으로 인해 MOS트랜지스터의 게이트 길이는 점점 짧아지고 있으며, 개별 칩에 장착된 트랜지스터의 개수는 증가하고 있고, 이들의 동작 속도는 점점 빨라지고 있다. 현재 상용 개인용 컴퓨터에 수 GHz클럭 주파수를 가지는 칩이 장착되어 사용되고 있으며, 소자의 게이트 길이 감소는 사용되는 전압을 점점 낮추도록 하고 있다. 이러한 경향으로 인해 소자의 정상적인 동작을 보장해 줄 수 있는 노이즈 마진 역시 감소되고 있고 디지털 칩과 이들이 장착된 보드가 노이즈에 더욱더 많은 영향을 받게 되어 가고 있다. 따라서 개별 칩이나 이들 칩이 여러 개 장착된 보드에서 안정적인 전력공급에 대한 중요성은 점점 증대되고 있다[1].

현재 사용되고 있는 디지털 칩의 동작속도는 대단히 빨라서 수 GHz대역까지 동작하고 있으며 따라서 보드에 공급된 전원으로 부터 수GHz 대역의 스위칭 잡음을 보드에 유기하게 된다. 이를 위해 그림1과 같은 디지털 보드에 대한 기하학적 구조설계나 집중정수 회로소자 배치등과 같은 전원-접지층 설계(Power-Ground Plane Design)를 해야 한다. 이 경우 전원-접지층에서 주파수에 따른 임피던스와 전압의 분포상황을 반복적으로 해석하게 된다[1][2].

이러한 전원접지층 설계를 위한 여러 가지 해석 방법이 개발되어 왔다. FEM(Finite Element Method)을 이용한 전

장 수치해석방법[3], 전체 보드를 작은 영역으로 구분하고 각 영역에 대해 등가회로를 적용시켜 회로 해석을 하는 방법[4], 해석적인 임피던스 식을 이용하는 방법[1][2] 등이 사용되고 있다.

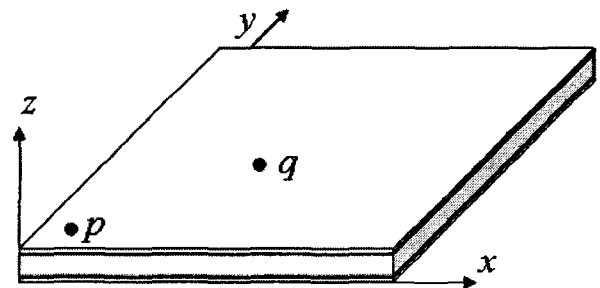


그림 1 직사각형의 금속-유전체-금속 기판

Fig. 1 Rectangular Metal-Dielectric-Metal Plate

이들 중 해석적인 임피던스 식을 이용하는 방법은 전자장 해석방법이나 다른 회로해석법에 비해 프로그래밍 등의 번거로운 절차 없이 간단한 식으로 표시되므로 많이 사용되고 있다. 그러나 이러한 임피던스에 관한 해석적 표현식은 2차원 무한급수 형태로 되어 있어서, 충분한 정확도를 얻기 위해 반복적인 계산을 많이 해야 하는 단점이 있다. 본 논문에서는 기존의 임피던스 식을 이용할 때 이에 대한 계산 시간을 대폭 단축시킬 수 있는 방법을 제시한다.

### 2. 전력접지층 임피던스 새로운 계산 방법

그림 1과 같은 전력접지층의 임의의 두 지점  $p$ 와  $q$ 사이의 임피던스  $Z_{pq}$  계산을 위해 사용되는 해석적인 방정식은 모드매칭방법으로 부터 유도된 다음과 같은 식을 사용한다 [1][2].

\* 교신저자, 正會員 : 영남대 工大 전자정보공학부 教授 · 工博  
E-mail : yssuh@yu.ac.kr

\*\* 正會員 : 한국전기연구원 전자기소자연구그룹 · 工博

\*\*\* 正會員 : LG전자(구미) 디지털정보디스플레이사업부  
接受日字 : 2004年 10月 15日  
最終完了 : 2004年 12月 15日

$$Z_m = j\omega h \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \frac{\chi_{mn}^2}{w_x w_y (k_n^2 + k^2)} \cos\left(\frac{2m\pi x_p}{2w_x}\right) \cos\left(\frac{2n\pi y_p}{2w_y}\right) \cos\left(\frac{2m\pi x_q}{2w_x}\right) \cos\left(\frac{2n\pi y_q}{2w_y}\right) \quad (1)$$

여기서  $w=2\pi f$ 인 각속도이며,  $h$ 는 기판의 두께이고,  $w_x$  및  $w_y$ 는 각각 기판의  $x$ 축 방향 및  $y$ 축 방향의 폭이다.  $\chi_{mn}$ 은  $m$ 과  $n$ 에 따른 상수이며  $m=n=0$  일 때,  $\chi_{mn}=1$ 이며,  $m$ 이나  $n$  둘 중 하나가 0이면,  $\chi_{mn}$ 값은  $\sqrt{2}$ 이고, 둘 다 0이 아닌 정수이면  $\chi_{mn}$ 값은 2이다.  $k_n^2 \equiv (\pi n/w_y)^2 + (\pi m/w_x)^2$ 로 정의하며,  $k$ 는  $\omega\sqrt{\epsilon\mu}$ 로 정의되고,  $\mu$ 와  $\epsilon$ 은 각각 기판 유전체의 투자율과 유전율이다. 위의 식(1)은 Maxwell 방정식으로 부터 유도되었으며 정확한 해이며, 여러 저차들로부터 실험을 통해서 그 정확도는 입증되었고 전력접지층 해석과 설계에 사용되고 있다[1][2]. 위의 이 차원 무한급수식은 항의 차수가 증가할수록 특정한 값에 수렴하며, 일정수준의 정확도를 얻기 위해서 되도록 많은 항을 합해야 하며, 통상  $M$ 과  $N$ 값이 70 넘으면 거의 일정한 값에 도달한다.

고속 디지털 칩에서 노이즈 없이 전력을 충분히 잘 공급하기 위해 전력접지층을 설계하게 된다. 이 경우 전력 접지층의 구조를 설계하고, 결합방지 캐패시턴스의 위치와 크기를 결정하고, 전력 공급지점을 선정하기 위해, 임의의 두 지점 ( $p, q$ )사이의 임피던스를 주파수 영역에서 반복적으로 구해야 한다. 따라서 전력접지층의 원활한 설계를 위해 빠른 계산이 가능하도록 하는 것은 대단히 중요한 요소이다. 본 논문에서, 식(1)에 대해 주파수 영역 근사화를 통해 계산량을 대폭 줄일 수 있는 방법을 제시한다. 우선 위의 식의 주파수 영역에서의 특성에 대해 실제적인 계산 예를 통해 살펴보고 계산 시간을 줄이는 방법에 대해 논한다.

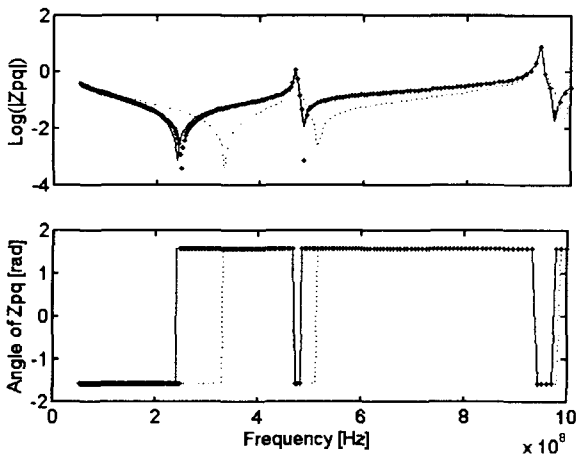


그림 2 기판(9'x4')위의 두 지점 ( $p(3.6', 1.6')$ ,  $q(1.8', 0.8')$ )사이의 임피던스( $Z_{pq}$ )의 크기 및 각도

Fig. 2 Magnitude and phase of the impedance  $Z_{pq}$  between the point  $(3.6', 1.6')$  and  $(1.8', 0.8')$  on the  $9'x4'$  board

가로x세로가 9'x4'인 그림1과 같은 직사각형의 금속-유전체-금속 보드의  $p(3.6', 1.6')$ 지점과  $q(1.8', 0.8')$  지점에서의

입력임피던스를 위의 식(1)을 이용해서 계산했다. 그림2는 이 계산 결과의 크기와 위상을 주파수에 따라 나타낸 것이다. 그림에서 점선은 25개항( $M=N=5$ )까지, 점은 4900항( $M=N=70$ )까지, 실선은 10000항( $M=N=100$ )까지 계산한 결과이다.  $M=N=70$ 일 때와 100일 때의 결과는 거의 비슷함을 알 수 있으며, 임피던스의 크기와 각도는 주파수에 따라 심하게 변화하며 위상은 거의 +90혹은 -90도만 가지고 있다.

위와 같은 주파수 특성을 가지는 함수를 주파수 영역에서 몇 개의 지점에서만 계산한 후에, 다른 부분을 예측함으로써 모든 주파수 영역에서 여러 개의 항을 계산해야 되는 과정을 대폭 줄이고자 한다. 그러나 위의 임피던스 특성을 보면 크기와 위상은 주파수에 따라 대단히 심하게 변화하는 불연속점을 가지고 있어서 특성을 잘 모델링 할 수 있는 적절한 근사 함수를 찾기가 쉽지 않음을 알 수 있다.

본 논문에서는 주어진 복소임피던스에 대해 복소함수 영역에서 Mobius변환을 적용시켜 심하게 변화하는 불연속점을 제거하여 단순한 형태로 변환한 다음 최소한의 계산으로 전 주파수 영역에서의 복소임피던스를 모델링 하고자 한다. 위의 그림2에서 보듯이 임피던스 각도가 +/- 90도 값에 주로 분포하고 있으므로, 허수 값을 주로 가지고 있고 주파수에 따라서 크기가 변화하는 특성을 보이고 있다. 주파수에 따라서 완만하게 변화하는 함수를 얻기 위해,  $Z_{pq}$ 에 대해 복소수평면에서 직선을 원 형태로 변환시키는 다음과 같은 Mobius변환을 적용시켰다.

$$Z_{pqM} = \frac{Z_{pq} + c}{Z_{pq} - c} \quad (2)$$

여기서  $c$ 는 상수이며 변환 후 고른 각도 분포를 가지도록  $Z_{pq}$ 의 크기를 대략 참조하여  $c$ 는 0.1로 두었다. 그림3은 위의 그림2에 대해  $M=N=5$ 일 때의  $Z_{pq}$ 에 대해 식(2)를 적용시켜서 복소평면에서 변환한 결과이다.

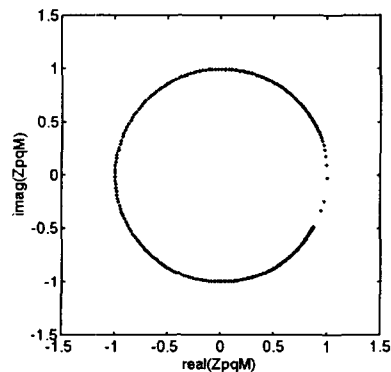


그림 3  $M=N=5$ 일 때의 임피던스에 대한 Mobius변환  
Fig. 3 Mobius transform of the impedance in the case of  $M=N=5$

변환 후의 결과는 그림2의 변환전의 결과와 비교해 볼 때 크기와 각도 모두 불연속점이 없으며 완만히 변화하는 주파수 특성을 나타냄을 알 수 있다. 크기는 거의 반경이 1인 원을 형성하며 위상만 주파수에 따라 변화한다. 그림4의 점

선은  $M=N=5$ 일 때의 그림3의 위상(radian)을 주파수에 따라 나타낸 것이고, 실선은  $M=N=70$ 일 때의 위상을 나타낸 것이며, 원으로 이루어진 점은 본 논문에서 제시하는 방법에 의해 추정된 값이다.

그림4의 25개항( $M=N=5$ )의 합으로 계산한 위상곡선을 기초로 해서 4700개항( $M=N=70$ )의 합으로 계산한 위상곡선을 추정함으로써 계산시간을 단축시키고자 한다. 추정은 몇 개의 특정 주파수( $f_s$ )에서만 4700개항을 이용해서 정확히 계산하고 이를 이용해서, 나머지 주파수 영역에서는 25개항만을 합한 결과를 가지고 보정하려고 한다. 그림4의 위상 값을 보면  $360$ 도( $2\pi$ ) 근처의 주파수에서는 합하는 항에 상관없이 동일함을 알 수 있고,  $180$ 도( $\pi$ ) 근처의 주파수에서는 차이가 많이 발생함을 알 수 있다. 따라서  $180$ 도의 위상을 가지는 주파수 근처의 한 지점에서만 정확하게 계산하면 다른 주파수 부분은 선형 근사화로 충분히 예측 가능함을 알 수 있다. 위상변화가 거의 없는 지점( $f_r$ )로부터 위상변화가 큰 지점( $f_s$ )사이의 임의 지점( $f_i$ )에서 25항을 이용한 각도로 부터 4700항을 이용한 각도를 추정할 수 있으며 다음과 같은 선형 근사화식을 사용한다.

$$\theta_{4700}(f_i) \approx \theta_{25}(f_i) + \frac{\theta_{4700}(f_s) - \theta_{25}(f_r)}{f_s - f_r} (f_i - f_r) \quad (3)$$

여기서  $f_s$ 는 4700항으로 계산되는 주파수이고,  $f_r$ 은 합하는 항에 대해 변화가 거의 없는 주파수이며 그림4에 나타내었다.

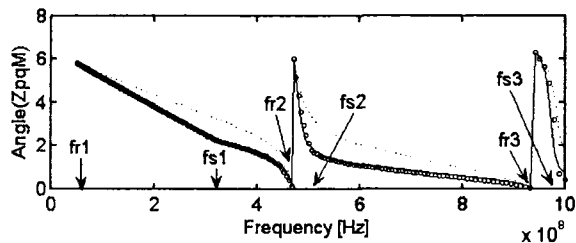


그림 4 Mobius변환 값  $Z_{pqM}$ 의 각도 (점선; 25항을 이용한 경우;  $\theta_{25}$ , 실선; 4700항을 이용한 경우;  $\theta_{4700}$ , 점; 모델링된 각도).

Fig. 4 Angle of  $Z_{pqM}$  (dotted line; case of 25 term, line case of 4700 terms, circle; modeled angle)

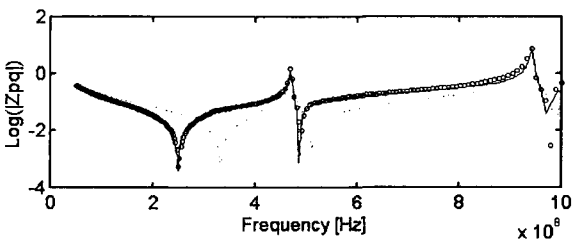


그림 5  $Z_{pq}$ 의 크기 (점선; 25항을 이용한 경우, 실선; 4700항을 이용한 경우, 점; 모델링한 값).

Fig. 5 Magnitude of the  $Z_{pq}$  (dotted line; case of 25 terms, line; case of 4700 terms, circle; modeled magnitude)

그림4와 같은 경우 각도에 대한 모델링을 위해 주파수 영역을 각각  $fr1 \sim fr2$ ,  $fr2 \sim fr3$ ,  $fr3 \sim 10 \times 10^6$ 까지의 범위의 3구역으로 나누었다. 주파수 범위가  $fr1 \sim fr2$  되는 영역에서는  $fs1$  지점의 주파수에서만 4700항을 이용해서 계산하고 나머지 부분은 25항으로 계산한 결과를 식(3)을 이용해서 모델링한다. 같은 방법으로 두 번째와 세 번째 영역에 대해서도 마찬가지로 과정을 통해 추정할 수 있다. 그림4의 점(원 형태)으로 표시된 데이터는 이러한 방법으로 모델링한 각도이며 실선은 4700항씩의 합으로 모든 주파수에서 계산한 결과이다. 모델링된 데이터는 4700항까지 합한 결과 값을 잘 추정함을 알 수 있다. Mobius변환 후 근사적인 추정 값을 구한다면, 이를 다시  $Z_{pq}$ 로 역변환 해야 임피던스 값을 구할 수 있다. 역변환은 식(2)의 역함수를 구함으로써 다음과 같이 얻어질 수 있다.

$$Z_{pq} = c \frac{1 + Z_{pqM}}{1 - Z_{pqM}} \quad (4)$$

그림5의 점(원)은 식(4)를 이용한 Mobius역변환 과정을 통해 모델링된 임피던스값을 나타낸 것이다. 점선은 25항만의 합으로 계산한 값이며 실선은 4700항의 합으로 계산한 값이다. 모델링된 값은 4700항으로 계산한 결과와 잘 일치함을 볼 수 있다.

지금까지 논의한 임피던스의 Mobius변환, 주파수에 대한 근사화, Mobius역변환 과정을 통해서 다시 임피던스를 얻는 과정은 식(1)을 모든 주파수 영역에서 그대로 계산하는 것에 비해 계산시간을 대폭 단축할 수 있었다. 계산과정을 matlab을 이용해서 200개의 주파수 지점에서 수행할 때, 식(1)을 사용해서 4700항을 합하는 기존의 방법은 2.2초가 소요되었으며, 본 논문에서 제안된 방법은 0.16초가 소요되었다. 제시된 방법은 약 13배의 계산속도 증가의 효과를 보였다.

### 3. 결 론

전력접지층의 임피던스 계산시 계산에 소요되는 시간을 줄이기 위한 새로운 방법을 제안하였다. 기존의 임피던스 계산식은 2차원 무한급수로 되어있어서 계산시간이 많이 소요된다. 제안된 방법은 2차원 무한급수 중 최소항만의 합으로 만든 임피던스 계산 결과를 이용해서 근사화 할 수 있는 새로운 방법이다. 근사화를 쉽게 하고 오차를 줄이기 위해서 임피던스 계산결과를 Mobius변환 하였으며 이로 부터 얻어진 데이터를 근사화한 후 역Mobius 변환하여 임피던스를 모델링 하였다. 이러한 과정을 통해서 만들어진 임피던스 계산과정은 기존의 계산에 비해 계산에 소요되는 시간을 대폭 줄일 수 있었다. 9'x4'기판의 두 지점사이의 임피던스를 200개의 주파수 지점에서 계산할 때 기존의 과정은 2.2초의 시간이 필요했고, 본 논문에서 제안한 과정은 0.16초 이내에 계산이 가능하였다. 이러한 결과는 반복적인 계산이 많이 필요한 전력-접지층의 설계시 유용하게 사용될 수 있을 것이다.

**감사의 글**

본 연구는 영남대학교 2002년~2003년 학술연구비의 지원과 전기연구소의 지원에 의하여 이루어진 연구로서, 관계부처에 감사드립니다.

**참 고 문 헌**

- [1] G.-T. Lei, R. W. Techentin, and B. K. Gilbert, "High Frequency Characterization of Power/Ground-Plane Structures," IEEE Trans. on Microwave Theory and Technique, vol. 47, No. 5, pp. 562-569, May 1999.
- [2] I. Novak, "Reducing Simultaneous Switching Noise and EMI on Ground/Power Planes by Dissipative Edge Termination," IEEE Trans. on Advanced Packaging, vol. 22, no. 3, pp. 274-283, Aug. 1999.
- [3] D. G. Swanson and W. J. R. Hofer, "Microwave Circuit Modeling Using Electromagnetic Field Simulation," Artech House 2003.
- [4] J. Kim, M. Swaminathan, and Y. Suh, "Modeling of Power Distribution Networks for Mixed Signal Applications," 2001 IEEE EMC Symposium Digest, Trans. on VLSI systems, pp. 1117-1122, 2001.