

## Geometric Analysis of Convergence of FXLMS Algorithm

姜 珉 植<sup>†</sup>  
(Min Sig Kang)

**Abstract** - This paper concerns on Filtered-x least mean square (FXLMS) algorithm for adaptive estimation of feedforward control parameters. The conditions for convergence in ensemble mean of the FXLMS algorithm are derived and the directional convergence properties are discussed from a new geometric vector analysis. The convergence and its directionality are verified along with some computer simulations.

**Key Words** : Filtered-x LMS algorithm(Filtered-x 최소평균자승 알고리즘), Geometric Convergence(기하학적 수렴성), Adaptive Estimation(적응추정), Directionality(방향성)

### 1. 서 론

적응형 필터는 신호의 통계학적 특성을 모르거나 또는 시간에 따라 특성이 변화하는 경우 고정형 필터가 가질 수 없는 장점을 제공하므로 신호처리, 통신, 소음제어 등 매우 다양한 분야에서 폭넓게 이용되고 있다[1]. 적응형 필터는 사용 목적에 따라 여러 형태의 필터가 이용되고 있는데, 특히 소음제어 분야에서는 그 구조가 간단한 LMS(Least Mean Square)필터 또는 FXLMS(Filtered-x LMS) 필터를 적용한 능동소음제어가 활발하게 적용되고 있다[2-6].

외란응답 감소를 위한 일반적인 제어방법으로 고이득의 피드백제어를 들 수 있는데, 이 방법은 잡음에 대한 민감도 증가 또는 공진 발생과 같은 단점이 있다. 만일 외란이 측정 가능한 경우 외란보상제어는 제어입력의 증가 없이 효과적으로 외란응답을 감소시킬 수 있다. 외란보상제어기 설계에서 계의 특성이 불명확한 경우, 외란의 통계학적 특성이 변하는 경우, 계의 동특성이 변화하는 경우 FXLMS 알고리즘을 이용한 적응형 보상제어가 적용되고 있다[7-10].

FXLMS 알고리즘의 수렴 조건은 Ljung[11]이 상미분방정식을 이용하여 유도한 바 있으며, Widrow 등[2]은 앙상블(ensemble) 평균의 개념에서 수렴성을 증명한 바 있다. FXLMS 알고리즘에서 추정계수의 초기치에 따라 수렴 특성이 달라진다. 특히 입력이 유색잡음인 경우 특별한 수렴 방향을 갖게 된다[14]. Claesson[14]은 입력벡터의 상관행렬의 특이치 분포도를 이용하여 수렴의 방향성 여부를 해석하였으나, 구체적으로 초기치에 따른 수렴 방향은 제시되지 않았다.

본 논문에서는 FXLMS 알고리즘의 수렴성에 대한 이해를 높이기 위해 기하학적 해석을 통해 수렴 조건을 유도하고, 이 기하학적 해석을 바탕으로 수렴의 방향성을 분석하였다. 해석의 타당성을 검증하기 위해 컴퓨터 시뮬레이션을 수행하였다.

### 2. 외란보상제어

다음의 이산시간계에서 주어진 선형제어계를 고려하자.

$$y(k) = G_u(q^{-1})u(k) + G_d(q^{-1})\eta(k) \quad (1)$$

여기서  $y(k)$ ,  $u(k)$ ,  $\eta(k)$ 는 각각 계의 출력, 제어입력, 외란입력의 샘플데이터이며,  $G_u(q^{-1})$ 와  $G_d(q^{-1})$ 는 각각 제어입력과 출력, 외란입력과 출력 간의 전달함수이다.  $q^{-1}$ 은 한 스텝 지연 연산자이다. 식(1)의 제어계는 안정하고 외란입력은 측정 가능한 것으로 가정한다.

이 제어계에서 외란보상제어기를 다음 식(2)과 같이 설계하면 외란응답을 완전히 제거시킬 수 있다.

$$u(k) = G_{ref}(q^{-1})\eta(k) \quad (2-1)$$

$$G_{ref}(q^{-1}) = -G_d(q^{-1})/G_u(q^{-1}) \quad (2-2)$$

능동형 외란보상제어는 식(3-1)의 제어기 전달함수  $G_H(k, q^{-1})$ 를  $G_{ref}(q^{-1})$ 와 일치시키는 것을 목표로 하며,  $G_H(k, q^{-1})$ 를  $N$ -차의 FIR(finite impulse response)필터로 표현할 경우 식(3-2)로 나타낼 수 있다.

$$u(k) = G_H(k, q^{-1})\eta(k) \quad (3-1)$$

<sup>†</sup> 교시저자, 正會員 : 景園大學 機械工學科 副教授 · 工博  
E-mail : mskang@kyungwon.ac.kr

接受日字 : 2004年 11月 11日  
最終完了 : 2004年 12月 14日

$$G_{ff}(k, q^{-1}) = d_0(k) + d_1(k)q^{-1} + \dots + d_N(k)q^{-N} \quad (3-2)$$

FXLMS 알고리즘을 이용하여 식(3-2)의 다항식 계수를 추정하는 경우 계수는 매 샘플링 순간에  $E[y^2(k)]$ 가 최소가 되도록 갱신된다. FXLMS 알고리즘의 구조는 그림 1과 같으며, 계수의 갱신은 다음 식에 따른다.

$$\hat{W}(k+1) = \hat{W}(k) + \mu X(k)y(k), \mu > 0 \quad (4)$$

여기서

$$\hat{W}(k) = [\hat{d}_0(k) \hat{d}_1(k) \dots \hat{d}_N(k)]^T \quad (5)$$

$$X(k) = [x(k)x(k-1) \dots x(k-N)]^T = \hat{G}_u(q^{-1})\xi(k)$$

$$\xi(k) = [\eta(k)\eta(k-1) \dots \eta(k-N)]^T$$

여기서  $\hat{G}_u(q^{-1})$ 은 전달함수  $G_u(q^{-1})$ 의 추정이며,  $\mu$ 는 수렴상수,  $x(k)$ 는 외란입력의 필터  $\hat{G}_u(q^{-1})$  출력이다.

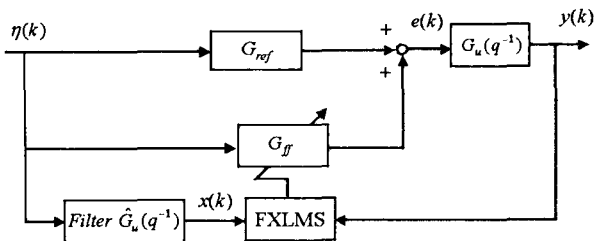


그림 1. FXLMS 알고리즘을 이용한 외란보상제어기 설계  
Fig. 1 Disturbance compensator design by FXLMS algorithm

### 3. FXLMS 알고리즘의 기하학적 수렴성 해석

식(4)의 FXLMS 알고리즘의 수렴조건은 이미 여러 연구 [3, 7, 11]에서 제시된 바 있으나, 본 논문에서는 Widrow 등 [3]이 제시한 FXLMS 알고리즘의 수렴조건을 기하학적 분석을 통해 설명한다.

만일  $W^*$ 를 다음과 같이  $E[y^2(k)]$ 을 최소화 시키는 최적 필터계수벡터라 하면, 즉

$$\left. \frac{\partial E[y(k)^2]}{\partial W} \right|_{W=W^*} = 0 \quad (6)$$

이 벡터와 갱신계수벡터의 차이인 오차벡터  $\epsilon(k)$ 를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\epsilon(k) = W^* - \hat{W}(k) \quad (7)$$

식(4)와 (7)로부터 오차벡터는 다음과 같다.

$$\epsilon(k+1) = \epsilon(k) - \mu X(k)y(k) \quad (8)$$

그림 1에서 출력  $y(k)$ 는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$y(k) = G_u(q^{-1})\xi(k)^T \epsilon(k) = \left\{ \frac{G_u(q^{-1})}{\hat{G}_u(q^{-1})} \hat{G}_u(q^{-1})\xi(k)^T \right\} \epsilon(k)$$

$$= \{P(q^{-1})X(k)^T\} \epsilon(k) \quad (9)$$

여기서

$$P(q^{-1}) = \frac{G_u(q^{-1})}{\hat{G}_u(q^{-1})} \quad (10)$$

식(9)에서는 수렴상수가 작을 경우 성립되는 교환법칙(commutative law)이 적용되었다[7].

식(9)을 식(8)에 대입하고 정리하면 다음과 같다.

$$\epsilon(k+1) = A(k)\epsilon(k) \quad (11)$$

$$A(k) = [I - \mu X(k)X_f(k)^T] \quad (12)$$

$$X_f(k) = P(q^{-1})X(k) = [x_f(k) \ x_f(k-1) \ \dots \ x_f(k-n)]^T \quad (13)$$

여기서  $I$ 는 단위 행렬이다.

식(11)은 직교좌표계에서 기하학적 벡터식으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\bar{\epsilon}(k+1) = \bar{\epsilon}(k) + \bar{\Delta}(k) \quad (14)$$

$$\bar{\Delta}(k) = -\mu \bar{x}(k) \cdot \bar{x}_f(k) \cdot \bar{\epsilon}(k) \quad (15)$$

여기서  $\cdot$ 는 벡터의 내적(inner product)이다.

설명 편의를 위해 식(3-2)의  $G_{ff}(k, q^{-1})$ 가 1-차 FIR 필터인 경우를 고려하자. 이 경우 식(4)는 다음과 같고,

$$\begin{bmatrix} \hat{d}_0(k+1) \\ \hat{d}_1(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{d}_0(k) \\ \hat{d}_1(k) \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-1) \end{bmatrix} y(k) \quad (16)$$

식(5)의 벡터 및 식(14), (15)의 벡터들은 다음과 같다.

$$\hat{W}(k) = [\hat{d}_0(k) \ \hat{d}_1(k)]^T,$$

$$X(k) = [x(k)x(k+1)]^T = \hat{G}_u(q^{-1})\xi(k) \quad (17)$$

$$\xi(k) = [\eta(k)\eta(k-1)]^T, \bar{\epsilon}(k) = (\epsilon_1(k), \epsilon_2(k))$$

$$\bar{x}(k) = (x(k), x(k-1)), \bar{x}_f(k) = (x_f(k), x_f(k-1))$$

식(14), (15)의 기하학적 벡터식을 그림으로 나타내면 그림 2와 같으며, 이 그림에서 식(14)의 수렴성에 대한 개념을 설명할 수 있다.

그림 2에서 음영 부분은 벡터  $\bar{x}(k)$ 와  $\bar{x}_f(k)$ 에 직교하는 선을 경계로 하는 공간을 나타낸다. 일반적으로  $\hat{G}_u(q^{-1})$ 은 오차를 갖게 되므로 음영 부분은 항상 존재한다. 만일 그림 2와 같이  $\bar{\epsilon}(k)$ 가 음영 밖의 영역에 있을 경우  $\bar{\epsilon}(k)$ 와  $\bar{x}_f(k)$ 는 예각을 이루므로 식(15)에서  $\bar{\Delta}(k)$ 는  $\bar{x}(k)$ 와 방향이 반대이다. 따라서  $\bar{\Delta}(k)$ 의 크기가 선분  $\overline{AC}$ 보다 작을 경우  $\bar{\epsilon}(k+1)$ 과  $\bar{\epsilon}(k)$ 의 유클리디안 놈(Euclidian norm)  $\|\bar{\epsilon}(k+1)\|$ 과  $\|\bar{\epsilon}(k)\|$ 는  $\|\bar{\epsilon}(k)\| > \|\bar{\epsilon}(k+1)\|$ 을 만족하게 되므로 식(14)는 k-번째 갱신에서 수렴 특성을 보이게 된다.

여기서 선분  $\overline{AB} = \overline{BC}$ 이다.  $\bar{\Delta}(k)$ 는 수렴상수  $\mu$ 의 함수이므로, 수렴조건에는  $\mu$ 에 대한 제한 조건이 포함되게 된다. 그림 2에서  $\bar{\epsilon}(k)$ 가 원점 기준 반대편에 있을 경우도 동일한 방법으로 수렴 특성을 설명할 수 있다.

만일 그림 3에서와 같이  $\bar{\epsilon}(k)$ 가 음영내부 점 A에 존재하는 경우  $\bar{\epsilon}(k)$ 와  $\bar{X}_j(k)$ 는 둔각을 이루므로  $\bar{\Delta}(k)$ 는  $\bar{X}(k)$ 와 동일한 방향을 갖는다. 따라서  $\|\bar{\epsilon}(k)\| < \|\bar{\epsilon}(k+1)\|$ 이 된다.  $\bar{\epsilon}(k)$ 가 점 B에 존재하는 경우도 동일한 결과를 갖게됨을 쉽게 설명할 수 있다. 결론적으로  $\bar{\epsilon}(k)$ 가 음영 부분에 존재하는 경우 식(14)는 k-번째 갱신에서  $\mu$ 의 크기에 관계없이 발산 특성을 나타낸다.

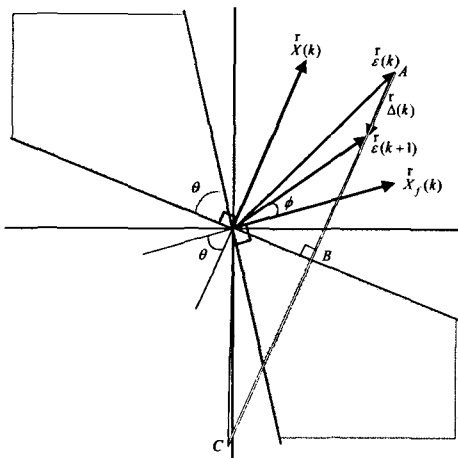


그림 2. 식(14)의 기하학적 표현 - 수렴 경우  
Fig. 2 Geometric interpretation of eq.(14) - Convergence case

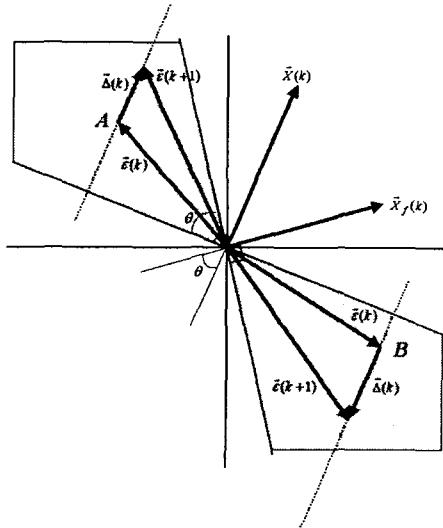


그림 3. 식 (14)의 기하학적 표현 - 발산 경우  
Fig. 3 Geometric interpretation of eq.(14) - Divergence case

이 상의 논의를 정리하면

1.  $\bar{\epsilon}(k)$ 가 음영 부분에 존재하는 경우 즉,  $\{\bar{\epsilon}(k) \cdot \bar{X}(k)\} \{\bar{\epsilon}(k) \cdot \bar{X}_j(k)\} < 0$  을 만족하는 경우, 식(14)는 k-번째 갱신에서 발산 특성을 보인다. 즉,  $\|\bar{\epsilon}(k+1)\| > \|\bar{\epsilon}(k)\|$

2.  $\bar{\epsilon}(k)$ 가 음영 부분 밖에 존재하는 경우 즉,  $\{\bar{\epsilon}(k) \cdot \bar{X}(k)\} \{\bar{\epsilon}(k) \cdot \bar{X}_j(k)\} > 0$  을 만족하는 경우, 수렴상수  $\mu$ 가 다음의 부등식 (18)을 만족하면 식 (14)는 k-번째 갱신에서 수렴 특성을 보인다. 즉,  $\|\bar{\epsilon}(k+1)\| < \|\bar{\epsilon}(k)\|$

$$0 < \mu < \frac{2 \{\bar{\epsilon}(k) \cdot \bar{X}(k)\}}{\|\bar{X}(k)\|^2 \{\bar{\epsilon}(k) \cdot \bar{X}_j(k)\}} \quad (18)$$

식(18)은  $\|\bar{\Delta}(k)\| < 2\overline{AB}$ 의 조건에서 나온 것이다.

만일 추정 필터에 오차가 없는 경우는  $\hat{G}_u(q^{-1}) = G_u(q^{-1})$ ,  $X_j(k) = X(k)$ 이므로, 그림 2의 음영 부분은 존재하지 않으며, 식(16)는 수렴 상수가 다음 식을 만족하면 k-번째 갱신에서 수렴특성을 보인다.

$$0 < \mu < \frac{2}{\|\bar{X}(k)\|^2} \quad (19)$$

식(19)의 수렴 조건은 LMS 알고리즘의 수렴 조건과 일치한다[3, 4].

벡터  $\bar{X}(k)$ 와  $\bar{X}_j(k)$ 는 고정된 벡터가 아니므로 갱신 중  $\bar{\epsilon}(k)$ 는 음영 부분 안과 밖에 존재할 수 있다. 따라서 FXLMS 알고리즘의 수렴성은 평균적 개념에서 분석되어야 된다.

정리: 식(14)의 FXLMS 알고리즘은 다음 조건을 만족하면 최적값으로 수렴한다.

$$C1. -90^\circ < \angle P(e^{-j\omega, T}) < 90^\circ \quad (20)$$

$$C2. 0 < \mu < \frac{2E\{\bar{X}_j(k) \cdot \bar{X}(k)\}}{E\{\|\bar{X}_j(k)\|^2\} \|\bar{X}(k)\|^2} \quad (21)$$

식(20)에서 기호  $\angle$ 는 함수의 위상을 나타낸다.

증명: 그림 2에서  $\|\bar{\epsilon}(k+1)\|$ 의 제곱과  $\|\bar{\epsilon}(k)\|$ 의 제곱은 다음 관계로 나타낸다.

$$\|\bar{\epsilon}(k+1)\|^2 = [1 - 2\mu \|\bar{X}_j(k)\| \|\bar{X}(k)\| \cos(\theta - \phi) \cos\phi + \mu^2 \|\bar{X}_j(k)\|^2 \|\bar{X}(k)\|^2 \cos^2\phi] \|\bar{\epsilon}(k)\|^2 \quad (22)$$

여기서  $\phi$ 와  $\theta$ 는 각각  $\bar{\epsilon}(k)$ 와  $\bar{X}_j(k)$ ,  $\bar{X}_j(k)$ 와  $\bar{X}(k)$ 의 사이각이다.

식(22)에 앙상블 평균(ensemble average)를 취하면 다음과 같다.

$$E\{\|\bar{\epsilon}(k+1)\|^2\} = \left\{ 1 - \mu E\{\bar{X}_j(k) \cdot \bar{X}(k)\} + \frac{\mu^2}{2} E\{\|\bar{X}_j(k)\|^2\} E\{\|\bar{X}(k)\|^2\} \right\} E\{\|\bar{\epsilon}(k)\|^2\} \quad (23)$$

식(23)에서는 참고문헌 [7]에서와 같이  $\bar{\epsilon}(k)$ 가  $\bar{X}_j(k)$  및  $\bar{X}(k)$ 와 비상관관계(uncorrelation)를 갖는다는 가정이 포함되었다. 식(23)은 스칼라 식이며, 우항의 증괄호 안의

크기가 1보다 작으면 안정성이 보장된다. 따라서 식(14)는 식(21) 및 다음의 조건이 만족되면 평균 개념에서 수렴성을 보장하게 된다.

$$0 < E[\bar{x}_f(k) \cdot \bar{x}(k)] \quad (24)$$

식(24)를 다시 쓰면

$$\begin{aligned} E[\bar{x}_f(k) \cdot \bar{x}(k)] &= E[X_f(k)X(k)^T] \\ &= E[P(q^{-1})X(k)X(k)^T] \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(e^{-j\omega T})\Phi_{xx}(\omega) d\omega \end{aligned} \quad (25)$$

여기서  $\Phi_{xx}(\omega)$ 는  $x(k)$ 의 스펙트럼비중함수(spectral density function)로 양이며  $E[X_f(k)X(k)^T]$ 은 실수이므로, 식(25)는 다음과 같다.

$$E[X_f(k)X(k)^T] = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Re\{P(e^{-j\omega T})\}\Phi_{xx}(\omega) d\omega \quad (26)$$

여기서  $Re\{*\}$ 는 복소변수  $*$ 의 실수부를 나타낸다. 따라서  $Re\{P(e^{-j\omega T})\} > 0$ 이면 식(26)은 양이 되어 식(24)를 만족한다.  $Re\{P(e^{-j\omega T})\} > 0$ 는 식(20)을 의미한다. 따라서 FXLMS 알고리즘은 식(20)과 (21)을 만족하면 수렴하게 되며, 이 때 수렴하는 값은  $E[y^2(k)]$ 를 최소화하는 최적값이다[7].

Q.E.D.

식(20)과 (21)에 주어진 조건을 만족할 경우 갱신된 계수는 다음과 같이 최적값에 접근하게 된다.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{W}(k) = W^* \quad (25)$$

이 상의 기하학적 수렴성은 1-차의 FIR 필터 구조의 제어기에 대한 분석이지만, 일반적인 N-차의 FIR 필터 구조의 제어기에도 적용할 수 있으며, 수렴 조건은 식(20), (21)과 동일하다.

#### 4. FXLMS 알고리즘에서 수렴의 방향성

외란이 유색잡음일 경우 FXLMS 알고리즘은 특별한 방향에서의 수렴 속도가 다른 방향에서의 수렴 속도보다 더 빠른 방향성을 갖게 된다[1]. 따라서 초기치 설정에 따라 수렴 속도가 달라진다. 이 방향성은 식(12)의 행렬  $A(k)$ 의 특이치와 특이 행렬에서 쉽게 설명할 수 있다.

행렬  $A(k)$ 는  $\mu X(k)X_f(k)^T$ 와 단위행렬의 합으로 이루어지는데, 행렬  $X(k)X_f(k)^T$ 는 벡터의 곱으로 이루어진 행렬이므로 랭크(rank)는 1이 된다. 따라서 행렬  $A(k)$ 의 특이값을  $\lambda_1(k)$ ,  $\lambda_2(k)$ , 각각의 특이벡터를  $\bar{u}_1(k)$ ,  $\bar{u}_2(k)$ 라 하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \lambda_1(k) &= 1, \bar{u}_1 \cdot \bar{x}_f(k) = 0 \\ \lambda_2(k) &= 1 - \mu \bar{x}(k) \cdot \bar{x}_f(k), \bar{u}_2 = \alpha \bar{x}(k) \end{aligned} \quad (26)$$

여기서  $\alpha$ 는 상수이다.

식(26)에서 고유값  $\lambda_1(k)$ 는 k-에 관계없이 1이며, 해당 고유벡터  $\bar{u}_1(k)$ 은  $\bar{x}_f(k)$ 와 직교한다. 고유값  $\lambda_2(k)$ 는 식(24)와 (21)의 조건을 만족할 경우  $E[|\lambda_2(k)|] < 1$ 이며, 해당 고유벡터는  $\bar{x}(k)$ 와 평행이다.

오차벡터  $\bar{e}(k)$ 는 다음과 같이 두 특이벡터의 합으로 나타낼 수 있으므로

$$\bar{e}(k) = \alpha_1 \bar{u}_1 + \alpha_2 \bar{u}_2 \quad (27)$$

k-번째 갱신에서 나타나는  $\bar{e}(k+1)$ 은 다음과 같다.

$$\bar{e}(k+1) = \lambda_1 \alpha_1 \bar{u}_1 + \lambda_2 \alpha_2 \bar{u}_2 \quad (28)$$

따라서  $\bar{e}(k)$ 가  $\bar{u}_1(k)$ 과 방향이 같을 경우 식(27)에서  $\alpha_2 = 0$ 이며,  $\lambda_1 = 1$ 이므로 식(28)에서  $\bar{e}(k+1) = \bar{e}(k)$ 이 된다.  $\bar{e}(k)$ 가  $\bar{u}_2(k)$ 과 방향이 같을 경우 식(27)에서  $\alpha_1 = 0$ 이며,  $|\lambda_2(k)| < 1$ 일 경우  $\|\bar{e}(k+1)\| < \|\bar{e}(k)\|$ 을 만족하므로 수렴 특성을 보이게 된다. 결론적으로 수렴속도는  $\bar{e}(k)$ 가  $\bar{u}_1(k)$ 에 가까울수록 느려지고,  $\bar{u}_2(k)$ 에 가까울수록 빨라진다.

외란입력은 유색잡음이고, 일반적으로 샘플링 주파수는 외란입력 대역폭의 20배 이상을 취하므로[12],  $\bar{u}_2(k)$  대부분은 1-사분면과 3-사분면에 위치하고,  $\bar{u}_1(k)$ 는 2-사분면과 4-사분면에 위치하게 된다. 따라서  $\bar{e}(k)$ 가 1-사분면과 3-사분면에 위치하는 경우가 2, 4-사분면에 위치하는 경우보다 수렴속도가 빠르게 된다. 이 것이 수렴속도의 방향성에 해당한다.

식(26)에서 만일  $0 < \mu \bar{x}(k) \cdot \bar{x}_f(k) < 2$ 을 만족하면  $|\lambda_2(k)| < 1$ 이 되므로 FXLMS 알고리즘은 불안정하지 않다.  $\bar{u}_1(k)$ 와  $\bar{u}_2(k)$ 는 연속적으로 변화하므로,  $\lambda_1(k) = 1$ 이지만 식(11)은 수렴 특성을 보이게 된다.

만일 외란입력이 단일 주파수 사인신호일 경우 조건  $0 < \bar{x}(k) \cdot \bar{x}_f(k)$ 은 다음과 같은 위상 조건에 해당된다[8].

$$-w_i T < \angle P(e^{-j\omega T}) < w_i T \quad (29)$$

즉, 단일주파수 외란의 경우 식(29)는 식(16)의 절대수렴조건이며, 식(20)의 영역의 일부임을 알 수 있다.

앞에서 논의한 수렴의 방향성은 일반적인 N-차의 제어기에서도 일반화 할 수 있다. N-차의 제어기에서 행렬  $\lambda I - I + \mu X(k)^T X_f(k)$ 의 고유치 문제의 특성은 다음과 같다 [13].

$$\begin{aligned} \det\{\lambda I - I + X(k)^T X_f(k)\} \\ = (\lambda - 1)^{N-1} [\lambda - 1 + \mu X(k)^T X_f(k)^T] \end{aligned} \quad (30)$$

따라서  $(N-1)$ 개의 고유값은 모두 1이며, 즉  $\lambda_i(k) = 1, i=1, 2, \dots, N-1$ , 나머지 고유값은  $\lambda_N(k) = 1 - \mu X(k) \cdot X_f(k)^T$ 에 있다. 고유값  $\lambda_i(k) = 1, i=1, 2, \dots, N-1$ 에 해당하는 고유벡터를  $u_i(k)$  라 하면 다음 식을 만족하므로

$$[X(k)^T X_f(k)] u_i(k) = 0 \quad (31)$$

$u_i(k)$ 는  $\bar{x}_i(k)$ 에 직교한다. 즉,  $\lambda_i(k) = 1, i=1, 2, \dots, N-1$ 에 해당되는 고유벡터들은  $\bar{x}_i(k)$ 에 직교하는 초월평면(hyperplane)에 위치한다.  $\lambda_N(k)$ 에 해당되는 고유벡터  $u_N(k)$ 은 다음 식을 만족하므로

$$[X(k) X_f(k)^T - x(k) x_f(k)^T x(k) x_f(k-1)^T x(k) x_f(k-2)^T \dots x(k) x_f(k-N)^T] u_N(k) = 0 \quad (32)$$

고유벡터  $u_N(k)$ 는  $\bar{x}(k)$ 에 평행이다. 이러한 특성 때문에 1-차 필터의 경우와 같이 수렴속도는  $\bar{e}(k)$ 가  $\bar{x}(k)$ 에 가까울수록 빨라지고,  $\bar{x}_i(k)$ 와 수직에 가까워질수록 느려진다.

### 5. 컴퓨터 시뮬레이션

앞에서 논의한 FXLMS 알고리즘의 수렴조건 검증을 위해 그림 4와 같은 포신 안정화 시스템을 대상으로 시뮬레이션을 수행하였다. 이 시스템에서 포신의 질량중심점이 포신 회전축과 일치하지 않을 경우 회전축의 상하방향 가속도에 의해 질량불균형 모멘트 외란이 발생하여 포신의 회전을 야기하게 된다. 이 시스템에서는 이 외란에 의한 포신회전각의 영향을 최소화하기 위해 상하가속도를 측정하여 앞먹입 제어할 수 있다. 그림 4의 모델에서 스프링과 댐퍼는 모터의 회전운동을 직선운동으로 변화하기 위해 사용되는 볼스크류의 등가 스프링과 댐핑을 나타낸다. 이 계에서 되먹입 제어를 한 폐회로 운동방정식은 다음 식으로 나타낸다.

$$\theta(s) = \frac{as+b}{A(s)} U(s) - \frac{ks(s^2+cs+d)}{A(s)} \dot{Y}(s) \quad (33)$$

$$A(s) = (s+\tau)(s^2+2\zeta_1 u_1 + u_1^2)(s^2+2\zeta_2 u_2 s + u_2^2)$$

여기서  $\theta(s)$ 는 포신 회전각이며,  $U(s)$ 는 모터 토오크,  $\dot{Y}(s)$ 는 상하가속도를 나타낸다. 이 제어계에서 외란입력이 단일 주파수를 갖는 사인파일 경우 이 외란에 의한 응답은 식(16)의 1-차 FIR-필터 구조의 보상제어기를 이용하여 제거할 수 있다. 본 장에서는 이 경우를 시뮬레이션 하였다. 즉, 2Hz 단일 주파수 외란이 가해질 때 이 외란에 의한 응답을 제거할 수 있는 1-차의 FIR 필터 구조의 보상제어기 계수를 FXLMS 알고리즘을 이용하여 구하는 시뮬레이션을 수행하였다.

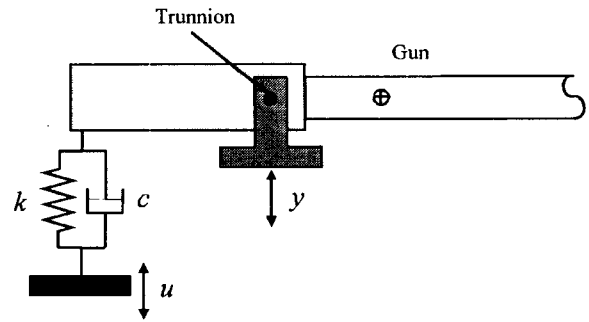


그림 4. 포신 제어계 개념도  
Fig. 4. Schematic view of gun control system

이 제어계에서 상하방향 가속도가 크기 1g, 주파수 2Hz 인 경우 응답은 크기 3.3mrad으로 나타난다. 샘플링 주파수는 300Hz로 정하였다. 우선 2Hz에서  $P(q^{-1})$ 의 위상이  $\angle P(e^{-j\pi T}) = 1.23^\circ$ 가 되도록  $\hat{G}_u(q^{-1})$ 를 선정하였고, 수렴상수  $\mu$ 는 식(21)을 만족토록 선정하였다. 이 경우는 식(29)의 절대수렴 조건을 만족한다. 그림 5는 이 때의 시뮬레이션에서 얻은  $\hat{d}_0(k)$ 와  $\hat{d}_1(k)$ 를 보인다. 추정계수는 초기값으로부터 참값으로 수렴하며, 이에 따라 외란응답은 그림 6과 같이 점차 감소하여 정상상태에서는 완전히 제거되었다. 참값은  $d_0 = -18.17, d_1 = 17.33$ 이다. 추정계수를 X-Y선도로 나타낸 그림 7에서와 같이 추정계수의 오차벡터 크기는 초기치로부터 단순 감소 특성을 나타낸다. 이는 식(29)의 절대수렴성을 만족하기 때문이다.

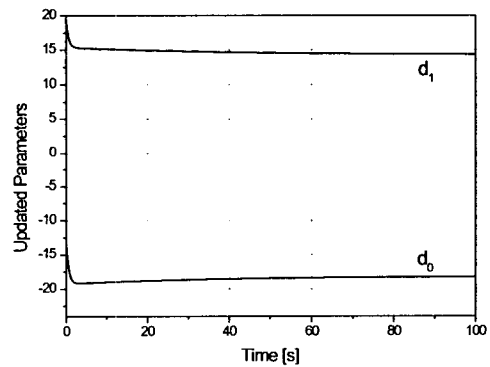


그림 5. FXLMS 알고리즘에 의한 추정계수 갱신  
Fig. 5. Updated parameters by FXLMS algorithm

2Hz에서  $\angle P(e^{-j\pi kT}) = 75.0^\circ$ 가 되도록  $\hat{G}_u(q^{-1})$ 를 선정 한 경우는 절대수렴성은 만족하지 못하지만 평균 수렴성은 만족하는 경우가 해당한다. 이 때  $\hat{d}_0(k)$ 와  $\hat{d}_1(k)$ 는 그림 8과 같이 초기 큰 요동을 보이다 참값으로 수렴하며, 이에 따른 외란응답은 그림 9와 같이 초기 큰 진동을 보이다 추정값이 참값으로 수렴함에 따라 감소하여 정상상태에서는 완전히 제거되었다. 이 때 오차벡터의 크기는 그림 10에서와 같이 부분적으로 증가와 감소를 보인다. 증가 부분은 고유치  $\lambda_2(k)$ 가 단위원 외부에 있는 경우, 감소 부분은  $\lambda_2(k)$ 가 단위원 내부에 있는 경우에 해당한다.

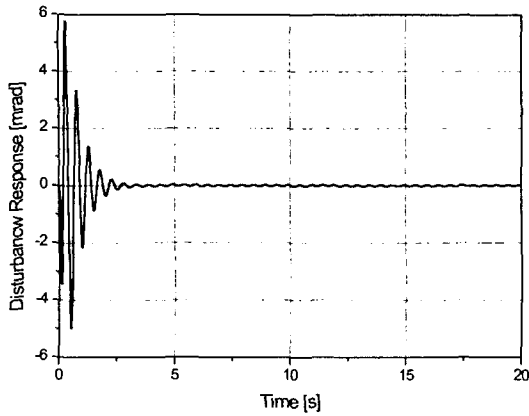


그림 6. 제어기 계수의 갱신 중 외란응답  
 Fig. 6. Disturbance response while updating control parameters

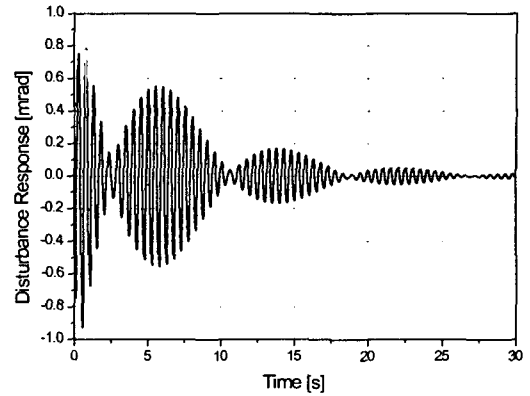


그림 9. 제어기 계수의 갱신 중 외란응답  
 Fig. 9. Disturbance response while updating control parameters

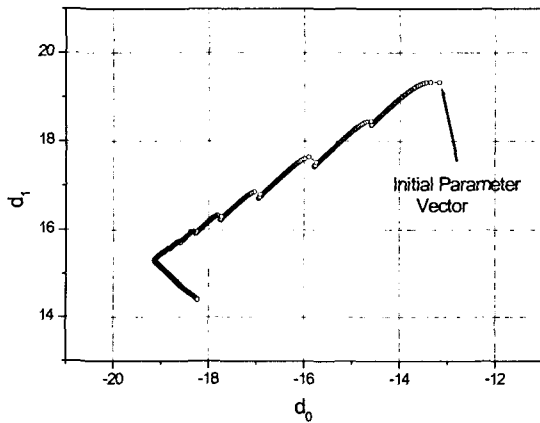


그림 7. 추정계수의 X-Y 선도  
 Fig. 7. X-Y plot of updated parameters

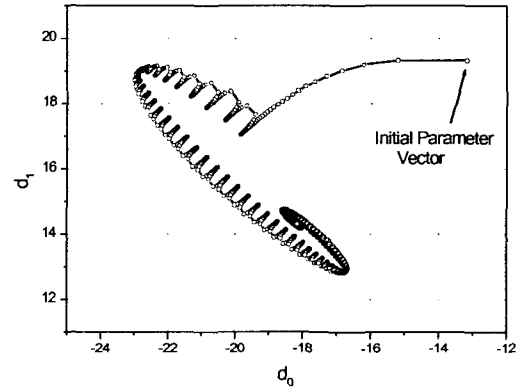


그림 10. 추정계수의 X-Y 선도  
 Fig. 10. X-Y plot of updated parameters

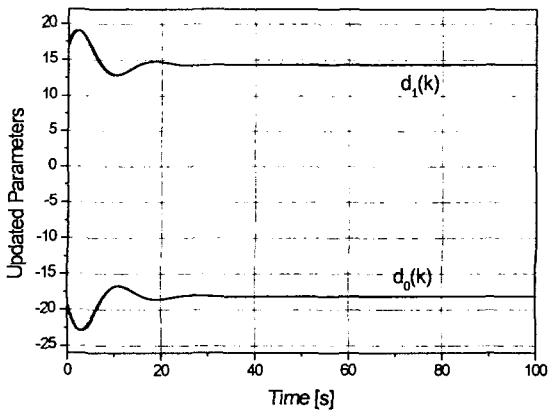


그림 8. FXLMS 알고리즘에 의한 추정계수 갱신  
 Fig. 8. Updated parameters by FXLMS algorithm

$P(q^{-1})$ 의 위상이  $\pm 90^\circ$ 범위 밖의 값을 가질 경우는 수렴 상수  $\mu$ 의 크기에 관계없이 발산함을 확인하였다.

추정계수 초기값  $\hat{d}_0(0)$ 와  $\hat{d}_1(0)$ 에 따른 수렴의 방향성을 시뮬레이션 하였다. 이 때  $\hat{G}_*(q^{-1}) = G_*(q^{-1})$ 로 가정하였다.

그림 11.1은 초기값  $[\hat{d}_0(0), \hat{d}_1(0)] = [d_0 + 7, d_1 + 5]$ 인 경우 추정계수의 오차  $\epsilon_0(k)$ 와  $\epsilon_1(k)$ 를 보인다. 여기서 초기 약 5초 동안 추정 계수는  $\epsilon_0(k)$ 와  $-\epsilon_1(k)$ 가 거의 같아지는 점으로 빠르게 수렴하며, 그 이후 매우 느리게 참값으로 수렴함을 볼 수 있다. 이 때 외란응답은 그림 11.2와 같이 추정계수의 빠른 수렴에 따라 초기 큰 진동이 급하게 감소되며, 느린 수렴속도 구간에서는 응답의 크기도 느리게 감소된다. 그림 12.1은 초기값  $[\hat{d}_0(0), \hat{d}_1(0)] = [d_0 + 7, d_1 - 5]$ 인 경우로 약 4초 이후  $\epsilon_0(k)$ 와  $-\epsilon_1(k)$ 가 거의 같아지며, 그 이후 거의 같은 속도로 참값에 수렴한다. 그림 11.1에 비해 추정계수 오차가 크다. 이 때 외란응답은 그림 12.2와 같이 초기 큰 진동이 급하게 감소되며, 이후 느리게 감소된다.

그림 13은 그림 11.2와 12.2의 응답을 3초-40초에서 비교한 것으로, 그림 11.2의 응답이 상대적으로 작은 것을 알 수 있다. 이로써 초기치에 따른 수렴속도의 차이를 알 수 있다.

그림 14는 4가지 초기치의 경우 계수의 수렴 방향을 보인다. A는 초기 추정오차가  $[\epsilon_0(0), \epsilon_1(0)] = [7, 5]$ 인 경우로 그림 11의 경우에 해당된다. D는  $[\epsilon_0(0), \epsilon_1(0)] = [7, -5]$ 인 경우로 그림 12의 경우에 해당한다. B와 C는 초기추정오차가 각각  $[-7, 5]$ ,  $[-7, -5]$ 인 경우이다. 4 가지 경우 모두 오차벡터는 초기위치에서  $45^\circ$ 의 기울기를 갖는 사선 방향을 따라 감소하며, 오차벡터가 약  $-45^\circ$ 의 기울기를 갖는 사선과 만나는 지점에 도달되면, 이 사선을 따라 원점으로 수렴한다. 수렴속도는 그림 11.1과 12.1에서와 같이  $45^\circ$  사선을 따라 변화하는 경우 빠르며,  $-45^\circ$  사선을 따라 변화하는 구간에서는 상대적으로 느리다. 이러한 수렴의 방향성과 수렴속도는 앞의 논의와 일치한다. 이 시뮬레이션에서 외란은 2Hz 사인파이고 샘플링 주파수는 300Hz이므로 벡터  $\vec{x}(k)$ 는 기울기  $45^\circ$ 를 갖는 사선벡터를 중심으로 대부분 분포한다. 이에 따라 식(26)의 고유벡터  $\vec{u}_1(k)$ 는 벡터  $\vec{x}(k)$ 와 수직인  $-45^\circ$  기울기를 갖는 사선방향에 주로 분포하며, 고유벡터  $\vec{u}_2(k)$ 는 벡터  $\vec{x}(k)$ 와 일치한다. 따라서 식(28)의 관계에 따라  $\vec{e}(k)$ 가  $\vec{x}(k)$ 에 가까울수록 빨라지고,  $\vec{x}(k)$ 와 수직에 가까워질수록 느려지는 특성이 그림 14의 결과로 나타내게 된 것이다.

만일  $\hat{G}_u(q^{-1}) \neq G_u(q^{-1})$ 인 경우는  $\vec{x}(k)$ 와  $\vec{x}_r(k)$ 가 수직이 아니므로 그림 14의  $-45^\circ$  기울기의 사선은 2Hz에서  $\hat{G}_u(q^{-1})$ 의 위상과  $G_u(q^{-1})$ 의 차이만큼 더 회전시킨 선으로 대체되는 효과를 보이게 되며, 나머지 방향 특성은 동일하게 된다. 이를 시뮬레이션을 확인하였다.

이 상의 시뮬레이션 결과로부터 본문에서 제시한 수렴 조건과 수렴의 방향성을 확인할 수 있다.

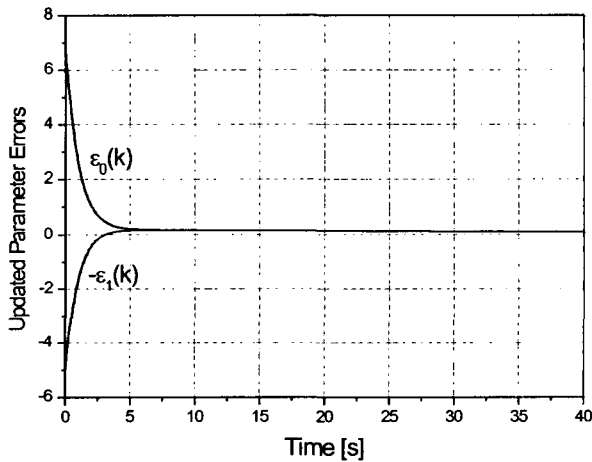


그림 11.1 갱신 추정계수,  $[\epsilon_0(0) = 7, \epsilon_1(0) = 5]$   
 Fig. 11.1 Updated parameters,  $[\epsilon_0(0) = 7, \epsilon_1(0) = 5]$

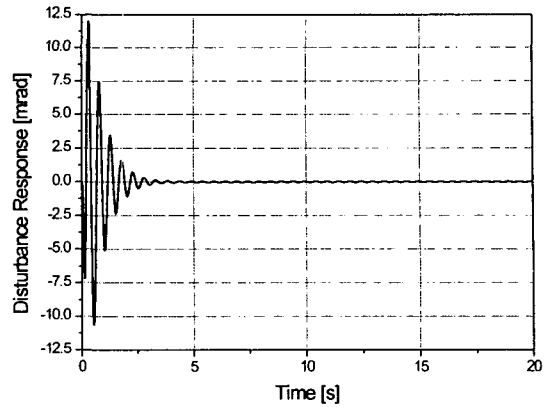


그림 11.2 제어기 계수의 갱신 중 외란응답  
 Fig. 11.2 Disturbance response while updating control parameters

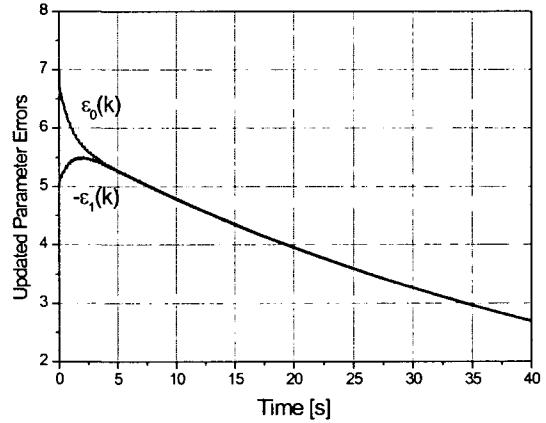


그림 12.1 갱신 추정계수,  $[\epsilon_0(0) = 7, \epsilon_1(0) = -5]$   
 Fig. 12.1 Updated parameters,  $[\epsilon_0(0) = 7, \epsilon_1(0) = -5]$

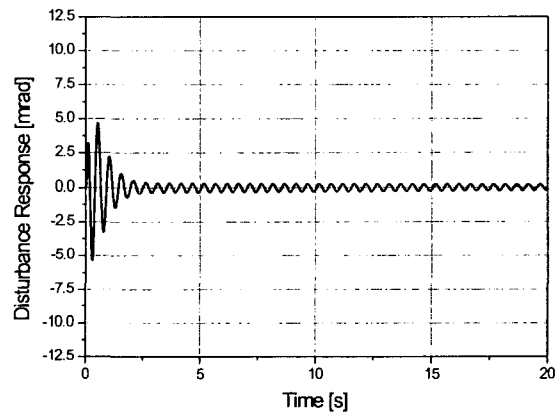


그림 12.2 제어기 계수의 갱신 중 외란응답  
 Fig. 12.2 Disturbance response while updating control parameters

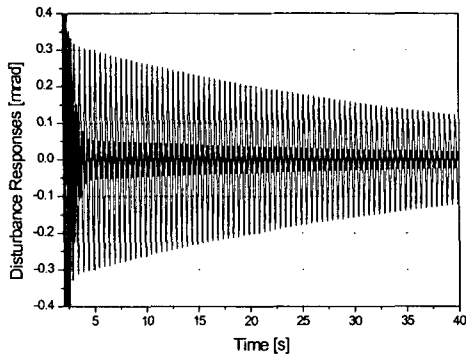


그림 13 제어기 계수의 갱신 중 외란응답의 비교  
 Fig. 13 Comparison of disturbance responses while updating control parameters

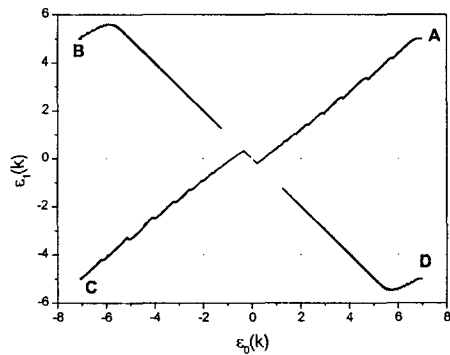


그림 14 초기 오차에 따른 수렴의 방향성  
 Fig. 14 Directionality of convergence according to initial errors

6. 결 론

외란보상 제어기 설계에 이용할 수 있는 FXLMS 알고리즘의 수렴성을 기하학적 분석을 통해 유도하였다. 수렴 조건은 추정 계수의 앙상블 평균의 수렴성에 근거하여 필터의 위상 조건과 수렴계수의 조건을 결정하였으며, 이 조건들은 기존의 수렴 조건과 일치한다. 또한 기하학적 분석을 통해 외란입력이 유색 잡음일 경우 수렴 특성이 갖는 방향성을 설명하였다. 이 상의 기하학적 분석의 결과는 시뮬레이션을 통해 검증하였다. 이 기하학적 분석은 FXLMS 알고리즘의 구조적 특성을 이해하는데 도움이 될 것으로 판단한다.

감사의 글

본 연구는 한국과학재단 목적기초연구(과제번호: R01-2003-000-10857-0) 지원으로 이루어졌으며, 재단의 지원에 감사드립니다.

참 고 문 헌

[1] S. Haykin, Adaptive Filter Theory, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 2002.  
 [2] B. Widrow, J. R. Glover, J. M. McCool, J. Kaunitz, C. S. Williams, R. H. Hern, J. R. Zeidler, E. Dong,

and R.C. Goodlin, "Active Noise Canceling: Principles and Applications," Proc. IEEE, vol. 63, pp.1692-1716, 1975.  
 [3] B. Widrow and S. D. Stearns, Adaptive Signal processing, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1985.  
 [4] S. M. Kuo and D. R. Morgan, Active Noise Control Systems, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, Inc., 1996.  
 [5] Y. D. Kim, M. M. Lee, and C. K. Chung, "Single Channel Active Noise Control using Adaptive Model," Trans. KIEE Vol. 49D-8-5, pp.442-450, 2000.  
 [6] J. Reason and W. Ren, "Estimating the Optimal Adaptive Gain for the LMS Algorithm," Proceedings of CDC, San Antonio, pp.1587-1588, 1993.  
 [7] M. T. White and M. Tomizuka, "Increased Disturbance Rejection in Magnetic Disk Drives by Acceleration Feedforward Control and Parameter Adaptation," Control Engineering Practice, vol.5, no.6., pp.741-751, 1997.  
 [8] M. S. Kang, "Disturbance Compensation Control by FXLMS Algorithm", J. of KSPE , vol. 20, No. 11, pp. 100-107, 2003.  
 [9] M. S. Kang and J. S. Jung, "Disturbance Compensation Control of An Active magnetic Bearing System by Multiple FXLMS Algorithm-Theory", J. of KSPE , vol. 21, No. 2, pp. 74-82, 2004.  
 [10] M. S. Kang and J. S. Jung, "Disturbance Compensation Control of An Active magnetic Bearing System by Multiple FXLMS Algorithm-Experiment", J. of KSPE , vol. 21, No. 2, pp. 83-91, 2004.  
 [11] L. Ljung, "Analysis of Recursive Stochastic Algorithm," IEEE Trans. on Automatic Control, vol. AC-22, no.4, pp.551-575, 1977.  
 [12] G. F. Franklin, J. D. Powell, and M. Workman, Digital Control of Dynamic Systems, Addison-Wesley, Longman, CA, 1998.  
 [13] R. Bellman, Introduction to Matrix Analysis-2'nd edition, McGraw-Hill, p.83, 1970.  
 [14] T.A.C.M. Classen and W.F.G. Mecklanbrauker, "Adaptive techniques for signal processing in communications," IEEE Commun., vol. 23, pp.8-19, 1985.

저 자 소 개



강민식 (姜珉植)

1957년 8월 27일생. 1980년 서울대학교 기계공학과 졸업. 1983년 한국과학기술원 기계공학과 졸업(공학석사). 1987년 한국과학기술원 기계공학과 졸업(공학박사). 1987년-1998년 국방과학연구소. 1998- 현재 경원대학교 기계공학과 부교수.

Tel : 031) 750-5524, Fax : 031) 750-5273  
 E-mail : mskang@kyungwon.ac.kr