

지진해일 전파 수치모의를 위한 2차원 유한요소모형의 능동적 분산보정기법 Active Dispersion-Correction Scheme of 2-D Finite Element Model for Simulation of Tsunami Propagation

윤성범* · 임채호*
Sung Bum Yoon* and Chae Ho Lim*

요 지 : 지진해일을 수치모의할 때 임의로 구성된 유한요소망과 양해법을 사용하면서도 Boussinesq 방정식과 같은 정도의 물리적 분산효과를 고려할 수 있는 능동적인 분산보정 2차원 유한요소모형을 개발하였다. 새로운 기법을 이용하여 계산한 수치해와 파의 분산효과를 고려한 해석해의 비교를 통해 본 연구에서 개발한 분산보정기법의 타당성을 입증하였다. 그 결과 개발된 수치모형이 상당히 정확함을 보였다.

핵심용어 : 천수 파동방정식, 유한요소모형, 지진해일, 분산효과, 능동적 분산보정기법

Abstract : For the simulation of tsunami propagation an active dispersion-correction two-dimensional finite element model has been developed based on a shallow-water wave equation. This model employs an arbitrary triangular mesh and an explicit time integration scheme. However, the physical dispersion effects as included in the Boussinesq equations can be taken into account in the computation. The validity of the dispersion-correction scheme developed in this study is verified through the comparison of numerical solutions calculated using the new scheme with analytical ones considering dispersion effect of waves. As a result, the present model is shown to be considerably accurate.

Keywords : shallow-water wave equation, finite element model, tsunami, dispersion effect, active dispersion-correction scheme

1. 서 론

지진해일파는 풍파에 비해 파장이 매우 길어 장파로 간주되지만 조석에 비하면 파장이 짧아 상대적으로 분산성이 강하므로, 먼거리를 전파하는 경우에는 분산성을 고려하여 해석하여야 한다. 특히 동해에서 발생하는 지진해일의 경우 파원이 작고 수심이 깊어 단주기파 성분이 강하므로 그 물리적인 분산효과가 매우 중요하다. 지진해일파 같이 장파와 단파가 동시에 존재하는 경우 Boussinesq 방정식이 지배방정식으로 가장 적합하다. 이러한 Boussinesq 계열 파방정식의 수치모형을 이용하여 파의 전파과정을 수치모의 할 경우 지배방정식 자체에 물리적 분산항이 존재하므로 수치적인 분산오차를 최소화해야 한다. 이를 위

해서는 매우 작은 격자를 채용하여야 하므로 현재까지의 컴퓨터 능력으로는 이러한 실제적인 문제를 다루는 것이 거의 불가능한 실정이다. 이러한 현실적인 제약 조건으로 인해 지진해일 전파 수치모의는 파의 분산성을 무시한 천수방정식을 기본방정식으로 하는 조석류 수치모형을 이용하여 이루어져 왔다 (Yoon and Liu, 1992; 윤성범, 1999; 조용식, 1996; Yoon, 2002).

Imamura et al.(1988) 및 Cho(1995)는 선형 천수방정식의 leap-frog 유한차분기법에 대해 일정수심에서 수치적인 분산오차가 실제적인 분산효과를 대신하기 위한 수심, 격자간격 및 계산시간간격 간의 관계식을 유도하였다. 이 방법은 Boussinesq 계열의 수치모형과 달리 분산효과를 따로 계산하지 않고, 다른 항들을 계산하는 도중 자연적으

*한양대학교 공학대학 토목환경공학과(Corresponding author: Chae Ho Lim, Department of Civil and Environmental Engineering, Hanyang University, Ansan, Kyunggi 426-791, Korea. limch@ihanyang.ac.kr)

로 발생하는 수치분산오차를 이용하므로 계산시간이 크게 단축되는 장점이 있다. 일반적으로 지진해일은 수심이 수 km 인 곳으로부터 발생되어 해안으로 전파되므로 Imamura et al.(1988)의 유한차분모형을 이용하는 경우 분산효과를 정도 높게 고려하기 위해서는 수심이 연속적으로 감소함에 따라 격자간격도 연속적으로 작아져야 한다. 그러나 유한차분법의 특성상 2차원 전파의 경우 하나의 계산영역 내에서는 격자간격을 자유롭게 조절하지 못하므로 수심이 변하는 실제 지형에 대해서는 이러한 개념의 적용이 곤란하다. 이에 Yoon and Liu(1992)는 변화수심에서도 이러한 개념을 적용할 수 있도록 천수방정식을 지배방정식으로 하고 질량집중기법을 채택하여 계산시간을 대폭 단축시킨 양해법의 유한요소모형을 개발하고, 수치분산오차의 특성을 파악하여 이를 이용하기 위한 조건식을 제시하였다. 그러나 일반적으로 천수방정식에 대한 유한요소모형은 leap-frog 유한차분모형에서와 같은 공간 교호격자(staggered mesh)를 사용할 수 없으므로 2Δx짜가 발생할 가능성이 높다. 이는 유한요소모형의 큰 약점으로 지적되기도 한다. 이와 같이 종래의 분산보정 수치모형이 요소크기를 조정하여 분산효과를 얻고 있으나, 이 방법은 수심이 변하는 실제 해역에서 주어진 조건을 만족시키는 정확한 유한요소망을 생성하기 위해 많은 노력을 필요로 한다. 이에 윤성범 등(2004)은 요소크기에 구애를 받지 않고 분산보정을 수행할 수 있으며, 2Δx짜의 발생 가능성이 낮고 계산의 신속성을 동시에 갖춘 1차원 분산보정 유한요소모형을 개발한 바 있다.

본 연구에서는 윤성범 등(2004)이 개발한 1차원 분산보정 기법을 2차원으로 확장하여 지진해일 전파시 요구되는 물리적인 분산효과를 고려할 수 있는 능동적인 분산보정기법을 개발하고, 가상진원에 의해 발생된 2차원 지진해일 전파에 대하여 수치모의한 결과와 선형 Boussinesq 방정식의 해석해(Carrier, 1991)의 비교를 통해 개발된 2차원 유한요소모형을 검증하고자 한다. 이를 위해 2장에서는 지배방정식을 제시하고, 3장에서는 선형보간함수를 이용한 파동방정식의 유한요소식과 변형방정식을 유도한다. 4장에서는 수치분산오차를 이용하여 물리적인 분산효과를 고려할 수 있는 새로운 분산보정기법을 제안하고, 5장에서는 이를 적용한 실제 계산을 통해 그 타당성을 확인하며, 마지막 장에서는 이번 연구에서 얻어진 내용을 정리하고 결론을 맺는다.

2. 지배방정식

지진해일파는 장주기파에 속하여 분산의 영향이 매우 작다고 여겨지나 조석에 비하면 상대적으로 단주기파이므로

분산에 의한 효과를 고려하여 해석해야 한다. 특히 태평양에서 발생하는 지진해일의 파원이 400km 이상인 반면, 동해에서 발생하는 지진해일의 파원은 약 30~40km로 태평양의 경우에 비해 매우 작고 상대적으로 수심이 깊어 단주기파 성분이 강하게 나타나고, 대략 900km의 먼 거리를 전파해 오기 때문에 그 물리적인 분산효과가 매우 중요하다. 또한 수심이 매우 작은 해안 인접해역을 제외하면 대부분의 해역에서 수심에 비해 수면변위가 매우 미소하므로 비선형성을 무시할 수 있다. 천수에서 약한 분산효과를 고려한 식으로는 다음과 같은 2차원 선형 Boussinesq 방정식이 있다.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + gh \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{h^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial P}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial Q}{\partial t} \right) \right] - \frac{h^3}{6} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left(\frac{P}{h} \right) + \frac{\partial^2}{\partial t \partial y} \left(\frac{Q}{h} \right) \right] \quad (2)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + gh \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{h^2}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial P}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial Q}{\partial t} \right) \right] - \frac{h^3}{6} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left(\frac{P}{h} \right) + \frac{\partial^2}{\partial t \partial y} \left(\frac{Q}{h} \right) \right] \quad (3)$$

여기서 ζ 는 정수면으로부터의 수면변위(m), P , Q 는 각각 x , y 방향의 단위폭당유량(m^2/s), g 는 중력가속도(m/s^2), h 는 정수면으로부터 바닥까지의 수심(m)이다.

운동방정식 (2)와 (3)은 식의 우변에 물리적인 분산효과를 고려하기 위한 분산항을 포함하고 있다. 이 분산항은 시간과 장소에 대한 미분이 동시에 나타나 양해법을 적용할 수 없으며, 수치분산오차를 줄이기 위해 매우 작은 요소를 사용해야 하므로 2차원 해석시 계산시간이 과도하게 증가된다. 이로 인해 일반적인 지진해일 전파 수치모형은 Boussinesq 방정식 대신 수치해석이 비교적 단순한 천수방정식을 사용하고, 수치해석시 발생하는 수치분산오차를 이용하여 물리적인 분산효과를 얻고 있다.

지진해일 전파의 원래 지배방정식인 선형 Boussinesq 방정식 (1)~(3)을 수심이 상대적으로 작고 일정한 장파조건($kh \ll \pi/10$)하에서 합성하면 다음과 같은 2차원 약분산형 파동방정식을 얻는다.

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - C_0^2 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) - \frac{C_0^2 h^2}{3} \left(\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \zeta}{\partial y^4} \right) = O(k^6 h^6) \quad (4)$$

여기서 $C_o (= \sqrt{gh})$ 는 천수에서의 전파속도(m/s)이고, k 는 파수이며, 좌변 3번째항은 물리적인 분산항을 의미한다.

한편 Krenk(2001)는 수치분산을 제거하기 위해 식 (5)와 같이 2차원 선형 천수 파동방정식에 인위적인 분산항을 추가하였다.

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - C_o^2 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) + \gamma C_o^2 \Delta x^2 \left(\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \zeta}{\partial y^4} \right) = 0 \quad (5)$$

여기서 γ 는 수치분산을 제거하기 위한 분산보정계수이다. 식 (5)에 포함된 4차 공간미분항을 시간에 대하여 2단계로 나누어 2차 공간미분항으로 줄이면 식 (6)과 (7)로 표현할 수 있다.

$$\frac{\partial v}{\partial t} = C_o^2 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \quad (6)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = v - \gamma \Delta x^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (7)$$

여기서 v 는 임시변수이다. 식 (7)을 시간에 대해 1차 미분하고, 미분된 식에 식 (6)을 대입하여 정리하면 식 (5)를 얻을 수 있으므로 식 (6)과 (7)의 해는 식 (5)의 해와 같아지며, 식 (5)와는 달리 공간미분항이 2차이므로 선형보간 함수를 사용할 수 있는 장점이 있다.

본 연구에서는 Krenk(2001)가 수치분산을 제거하기 위해 인위적으로 추가해준 식 (5)의 분산항을 수치분산을 제거하고 물리적인 분산을 보충해 주기 위한 2가지 목적으로 사용한다. 그러므로 본 연구의 지배방정식은 식 (6)과 식 (7)이며, 분산보정계수 γ 를 적절히 선정하여 식 (6)과 식 (7)의 해가 식 (4)의 해가 되도록 하여 해석한다.

3. 파동방정식의 유한요소식

인위적인 분산항이 추가된 2차원 선형 천수 파동방정식 (5)를 시간에 대하여 2단계로 나누어 정리한 식 (6)과 (7)에 대한 유한요소 방정식을 얻기 위하여 Galerkin의 가중잔차법을 이용하여 다음과 같이 이산화할 수 있다.

$$\int_{\Omega^e} \{ \phi^e \} \left[\frac{\partial v}{\partial t} - C_o^2 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \right] d\Omega^e = 0 \quad (8)$$

$$\int_{\Omega^e} \{ \phi^e \} \left[\frac{\partial \zeta}{\partial t} - v + \gamma \Delta x^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right] d\Omega^e = 0 \quad (9)$$

여기서 $\{ \phi^e \}$ 는 가중함수로 본 연구에서는 선형함수를 사용하며, 보간함수는 가중함수와 같은 형태를 사용한다. 또한 하첨자 Ω^e 는 삼각형 요소의 영역을 의미한다.

식 (8)과 (9)의 2차 공간미분항은 부분적분의 원리와 Green의 제2정리를 이용하면 영역 Ω^e 에 대한 적분이 경계면 Γ^e 를 따른 적분으로 표시되므로 다음과 같이 재 정리할 수 있다.

$$\int_{\Omega^e} \{ \phi^e \} \frac{\partial v}{\partial t} d\Omega^e + C_o^2 \int_{\Omega^e} \left[\left\{ \frac{\partial \phi^e}{\partial x} \right\} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \left\{ \frac{\partial \phi^e}{\partial y} \right\} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right] d\Omega^e \quad (10)$$

$$- C_o^2 \int_{\Gamma^e} \left[\{ \phi^e \} \frac{\partial \zeta}{\partial n} \right] d\Gamma^e = 0$$

$$\int_{\Omega^e} \{ \phi^e \} \frac{\partial \zeta}{\partial t} d\Omega^e - \int_{\Omega^e} \{ \phi^e \} v d\Omega^e - \gamma \Delta x^2 \int_{\Omega^e} \left[\left\{ \frac{\partial \phi^e}{\partial x} \right\} \frac{\partial v}{\partial x} + \left\{ \frac{\partial \phi^e}{\partial y} \right\} \frac{\partial v}{\partial y} \right] d\Omega^e \quad (11)$$

$$+ \gamma \Delta x^2 \int_{\Gamma^e} \left[\{ \phi^e \} \frac{\partial v}{\partial n} \right] d\Gamma^e = 0$$

각 요소내의 수면변위 ζ 와 임시변수 v 를 보간함수 $\{ \phi_\alpha^e \}$ 와 절점에서의 값 $\{ \zeta_\alpha^e \}$ 와 $\{ v_\alpha^e \}$ 를 이용하여 나타내면 다음과 같다.

$$\zeta = \{ \phi_\alpha^e \}^T \{ \zeta_\alpha^e \} \quad (\alpha = 1, 2, 3) \quad (12)$$

$$v = \{ \phi_\alpha^e \}^T \{ v_\alpha^e \} \quad (\alpha = 1, 2, 3) \quad (13)$$

여기서 첨자 α (또는 β)는 요소내 절점번호를 표시하며, 첨자의 반복은 Einstein의 index notation으로 첨자가 반복된 항들의 총합을 의미한다. 이를 식 (10)과 (11)에 대입하여 한 요소에 대해 적분을 수행하고 행렬형태로 정리한 다음 전체 요소에 대하여 정리한 유한요소식은 다음과 같다.

$$\sum_e \left([M_{\alpha\beta}^e] \left\{ \frac{\partial v_\beta^e}{\partial t} \right\} + C_o^2 [M_{\alpha\beta}^e] \{ \zeta_\beta^e \} \right) = 0 \quad (14)$$

$$\sum_e \left([M_{\alpha\beta}^e] \left\{ \frac{\partial \zeta_\beta^e}{\partial t} \right\} - [M_{\alpha\beta}^e] \{ v_\beta^e \} - \gamma \Delta x^2 [K_{\alpha\beta}^e] \{ v_\beta^e \} \right) = 0 \quad (15)$$

여기서는 영역 내부에 위치하는 내부요소에 대한 식만을 다룰 예정이므로, 경계면 Γ^e 에서의 법선방향미분항은 무시

되었다. 또한 $[M_{\alpha\beta}^e]$ 는 질량행렬, $[K_{\alpha\beta}^e]$ 는 강성행렬로 다음과 같다.

$$[M_{\alpha\beta}^e] = \int_{\Omega^e} \{\phi_{\alpha}^e\}^T \{\phi_{\beta}^e\} d\Omega^e \quad (16)$$

$$[M_{\alpha\beta}^e] = \int_{\Omega^e} \left[\left\{ \frac{\partial \phi_{\alpha}^e}{\partial x} \right\}^T \left\{ \frac{\partial \phi_{\beta}^e}{\partial x} \right\} + \left\{ \frac{\partial \phi_{\alpha}^e}{\partial y} \right\}^T \left\{ \frac{\partial \phi_{\beta}^e}{\partial y} \right\} \right] d\Omega^e \quad (17)$$

유한요소식을 풀려면 시간적분을 해야 하는데 통상 유한차분법을 사용하여 해결한다. 순수양해법은 행렬을 풀 필요가 없어 기억용량과 계산시간을 대폭 줄일 수 있는 장점이 있다. 그러므로 순수양해법을 쓰기 위해 식 (14)와 (15)에서 ζ 와 v 의 시간단계를 엮기 위해 차분하고, 원질량행렬(consistent mass matrix) 대신 대각요소만의 행렬로 구성된 질량집중행렬(lumped mass matrix)을 사용하여 전체 요소에 대해 조합하면 다음과 같은 절점에 대한 계산식을 유도할 수 있다.

$$v_{\alpha}^{n+1/2} = v_{\alpha}^{n-1/2} - \Delta t C_o^2 \frac{[K_{\alpha\beta}]}{[M_{\alpha\beta}]^i} \zeta_{\beta}^n \quad (18)$$

$$\zeta_{\alpha}^{n+1} = \zeta_{\alpha}^n + \Delta t v_{\alpha}^{n+1/2} + \gamma \Delta t \Delta x^2 \frac{[K_{\alpha\beta}]}{[M_{\alpha\beta}]^i} v_{\beta}^{n+1/2} \quad (19)$$

여기서 Δx 는 정삼각형 요소의 한변의 길이를 나타내며, $[M_{\alpha\beta}]^i$ 는 질량집중행렬을 의미한다. 이 유한요소식은 수치분산에 의해 파동방정식에 추가된 인위적인 분산항 이외에도 없었던 분산이 발생하게 된다. 이 분산효과는 식 (18)과 (19)를 시간과 공간에 대한 기준점 (n, α) 에 대하여 Taylor 급수 전개한 다음 합성하여 변형방정식(modified equation)을 구함으로써 파악할 수 있다. 식 (18)과 (19)로부터 식 (20)의 유도에는 정삼각형 요소를 사용하고, 수심 h 가 일정하다는 가정이 이용되었다.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - C_o^2 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \\ & - \frac{C_o^2 \Delta x^2}{48} \{ 3 - 4(12\gamma + C_r^2) \} \left(\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \zeta}{\partial y^4} \right) \quad (20) \\ & = O(\Delta x^3, \Delta x^2 \Delta t, \Delta x \Delta t^2, \Delta t^3) \end{aligned}$$

여기서 $C_r (= C_o \Delta t / x \Delta)$ 은 Courant number이다. 식 (20)의 3번째항은 수치근사에 의한 절삭오차와 분산보정을 위해 추가한 인위적인 분산항의 합성된 것으로서 파의 전파 속도에 영향을 미치는 수치분산항이다. 특히 본 연구를 통

하여 수립된 유한요소식에 대한 변형방정식 (20)은 Liu et al.(1995) 및 조용식(1996)이 개발한 2차원 천수방정식의 유한차분식에서 문제시 되었던 대각선 방향에 대한 분산보정항이 식 (20)의 3번째항에 포함되어 있기 때문에 대각선 방향에 대한 추가적인 분산보정이 필요 없는 장점이 있다.

4. 능동적 분산보정기법

본 연구에서 제안한 간단한 2차원 천수 파동방정식을 사용하면서도 지진해일 전파시 요구되는 물리적인 분산효과를 고려하기 위해 식 (20)의 3번째항과 약한 분산성을 포함하고 있는 Boussinesq 방정식 (4)의 3번째항을 같게 하여 정리하면 주어진 수심 h , 시간간격 Δt 그리고 요소 크기 Δx 에 대하여 분산보정계수 γ 를 다음과 같이 결정할 수 있다.

$$\gamma = \frac{3\Delta x^2 - 4(4h^2 + gh\Delta t^2)}{48\Delta x^2} \quad (21)$$

또한 이 분산보정계수 γ 는 다음과 같이 변형할 수 있다.

$$\gamma = \frac{1}{48} \left\{ 3 - 4 \left(\frac{\Delta x_{lm}}{\Delta x} \right)^2 \right\} \quad (22)$$

여기서 Δx_{lm} 은 Imamura et al.(1988)의 선형 천수방정식 leap-frog 유한차분모형에서 수치분산을 이용하기 위한 요소크기로 식 (23)과 같다.

$$\Delta x_{lm} = \sqrt{4h^2 + gh\Delta t^2} \quad (23)$$

윤성범 등(2004)에 의해 개발된 1차원 유한요소모형에서 요소크기 Δx 를 Δx_{lm} 과 같도록 선정하면 Imamura et al.(1988) 및 Cho(1995)가 제시한 분산보정 조건과 같아지고 분산보정계수 γ 는 자동적으로 0이 되므로 분산보정항이 불필요하게 되지만, 본 연구에서 개발한 2차원 유한요소모형의 경우는 비록 요소크기 Δx 를 Δx_{lm} 과 같게 구성하여 사용한다 할지라도 식 (22)에 의해 분산보정계수 γ 가 -0.02가 되므로 분산보정항이 여전히 필요하다. 그러므로 분산보정계수 γ 를 사용하지 않고 종래의 분산보정 수치모형과 동일한 방법에 의해 물리적인 분산효과를 정도 높게 고려하기 위해서는 정삼각형 요소크기 Δx 를 $2\Delta x_{lm}/\sqrt{3}$ 가 되도록 구성해야 할 것이다. 이와 같이 지진해일 전파 수치모의시 요소크기를 조정하여 물리적인 분산효과를 고려할 수는 있으나, 이 방법은 수심이 변하는 실제 해역에서 주어진 조건을 만족시키는 유한요소망을 생성하기 위해 많

은 노력을 필요로 하는 단점이 있다. 그러므로 본 연구에서 제안한 바와 같이 주어진 수심 h , 시간간격 Δt 그리고 요소크기 Δx 에 대한 분산보정계수 γ 를 구하여 지진해일 전파 수치모의에 적용한다면 수심이 완만히 변하는 경우에 대해서도 분산효과가 국부적으로 만족되며, 요소크기에 구애를 받지 않고 분산보정을 수행할 수 있다. 또한 제안된 2차원 유한요소모형은 순수양해법을 사용하므로 컴퓨터 기억용량과 계산시간을 대폭 줄일 수 있는 장점이 있다.

본 연구에서 제안한 분산보정기법의 안정성 검토 결과 이론상으로 $-0.166 \leq \gamma \leq 0.062$ 이면 수치적으로 안정해지며, γ 의 최소값 -0.166 에서는 $C_r \leq 2.5$ 의 안정조건을 갖고, γ 의 최대값 0.062 를 사용하는 경우에는 $C_r \leq 0.75$ 이면 안정하다. 이와 같이 분산보정계수 γ 의 값에 따라 안정조건이 변하며 γ 가 증가할수록 C_r 이 감소하므로, C_r 의 최소값 0.75 보다 작은 값을 사용하면 수치적으로 안정되고 정확성도 유지할 수 있다.

5. 분산보정 유한요소 모형의 검증

본 연구에서 개발한 분산오차 보정기법의 정확성을 검증하기 위하여 초기 수면변위가 Gauss 분포를 가진 가상 진원에 의해 발생한 지진해일의 전파에 대하여 2차원 수치모의를 행하고, Carrier(1991)에 의한 선형 Boussinesq 방정식의 해석해와 비교하였다. 초기 수면변위로 주어진 Gauss 분포는 Fig. 1과 같다.

Gauss 분포의 초기파형은 다음 식으로 주어진다.

$$\zeta(r, \theta) = 2e^{-(r/a)^2} \quad (24)$$

$$\frac{\partial \zeta(r, \theta)}{\partial t} = 0 \quad (25)$$

여기서 a 는 Gauss 분포의 특성반경이고, $r(= \sqrt{x^2 + y^2})$ 은 Gauss 분포 중심으로부터의 거리, θ 는 x 축과 이루는 각도이다. 이 초기조건에 대한 선형 Boussinesq 방정식의 해석해는 다음과 같다(Carrier, 1991).

$$\zeta(r, t) = \int_0^\infty a^2 e^{-(ak)^2/4} k \cos \left[\frac{\sqrt{ghkt}}{\sqrt{1 + \frac{(kh)^2}{3}}} \right] J_0(kr) dk \quad (26)$$

여기서 J_0 는 0차 제1종 Bessel 함수이며, 특성반경 a 는 7500 m로 선정하였다.

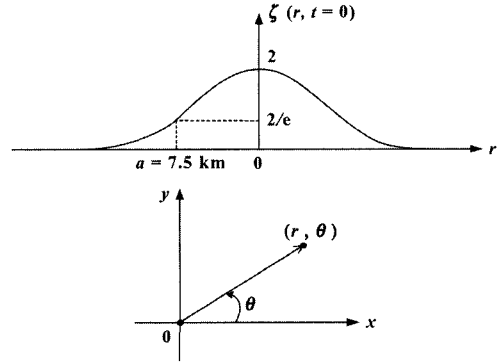


Fig. 1. Initial Gaussian free surface profile and coordinate system for the verification of the accuracy of dispersion-correction scheme.

수치모의에 사용된 요소크기 Δx 는 2086m이고, 시간간격 Δt 는 6초이다. 가상진원에 대한 수치모의는 수심 h 를 500m, 1000m, 1500m의 3가지 경우에 대하여 수행하였다. Figs. 2~4는 본 연구에서 제안한 분산보정계수 γ 의 적용 유무에 따른 수치모의의 결과를 각각 해석해와 비교한 것으로, Gauss 분포의 초기 수면형상의 중심으로부터 $150\Delta x$ ($\gamma=312,900m$) 떨어진 위치에서 가상 지진해일파의 시간에 따른 수면변위를 나타낸 것이다.

Fig. 2는 수심이 500m인 경우 수치해와 해석해를 비교한 것으로서, Fig. 2(a)에 나타낸 바와 같이 분산보정을 수행하지 않은 경우에는 요소크기 Δx (=2086m)가 식 (23)에 의해 계산된 Δx_{lm} (=1085m)보다 커서 수치해가 해석해보다 분산이 과대평가 되었다. 반면 본 연구에서 제안한 분산보정을 수행한 경우($\gamma=0.04$)에는 Fig. 2(b)에 보인 바와 같이 모든 방향으로의 분산이 옹게 고려되어 해석해와 잘 일치하는 좋은 결과를 보인다.

Fig. 3은 수심이 1000m인 경우로서 요소크기 Δx (=2086m)와 식 (23)에 의한 요소크기 Δx_{lm} (=2086m)이 동일한 경우로서 수치해가 해석해보다 분산이 약간 과소평가 되고 있다. 이는 사용된 요소크기가 Imamura 조건식 (23)을 만족시키는 경우라도 본 연구에서 개발한 2차원 유한요소 모형에서는 제안한 분산보정계수 γ 가 0.0이 아니므로 Fig. 3(a)에 나타낸 바와 같이 의도적으로 γ 를 적용하지 않은 경우($\gamma=0.0$)에는 그 차이만큼 분산오차가 발생하고 있음을 알 수 있다. 그러나 Fig. 3(b)에 나타낸 바와 같이 식 (22)에 의해 계산된 분산보정계수($\gamma=-0.02$)를 적용한 경우는 모든 방향에 대한 수치해가 해석해와 매우 잘 일치하고 있다. 만약 요소크기 Δx 를 $2\Delta x_{lm}/\sqrt{3}$ 인 2409m로

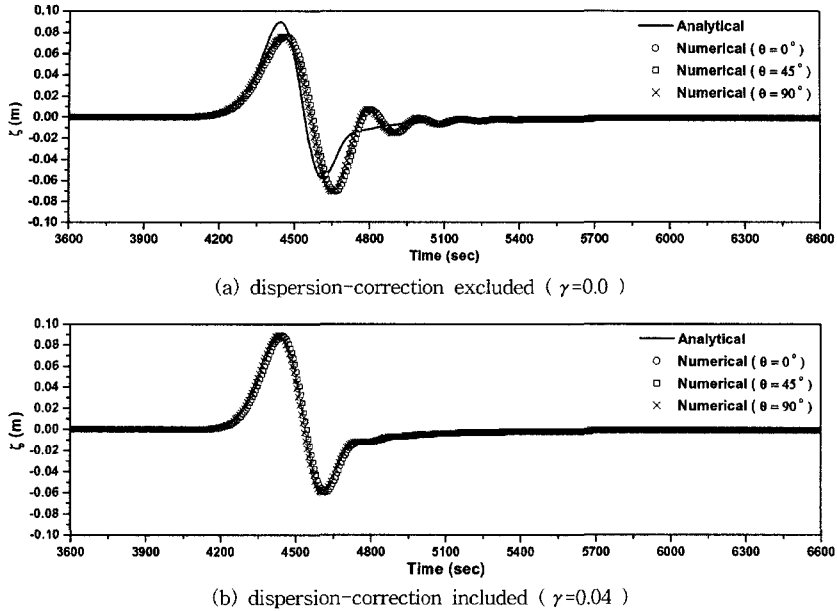


Fig. 2. Comparison of computational and analytical time histories of free surface profile at $\gamma = 150\Delta x$ for the case of water depth $h = 500\text{m}$ ($\Delta x_{lm} = 1085\text{m}$, $\Delta x = 2086\text{m}$).

구성하여 사용한다면 분산보정계수 γ 가 식 (22)에 의해 자동적으로 0.0이 되므로 의도적으로 분산보정계수를 무시한 경우($\gamma = 0.0$)에 대해서도 물리적인 분산을 정도 높게 고려할 수 있다.

Fig. 4는 수심이 1500 m인 경우로서 Fig. 2에 제시된

경우와 반대로 수치모의에 사용된 요소크기 $\Delta x (= 2086\text{m})$ 가 식 (23)에 의한 요소크기 $\Delta x_{lm} (= 3087\text{m})$ 보다 작아 의도적으로 분산보정을 무시한 경우($\gamma = 0.0$)는 Fig. 4(a)에서 알 수 있듯이 모든 방향에 대한 분산정도가 해석해보다 작게 발생하였다. 그러나 Fig. 4(b)에 나타낸 바와 같

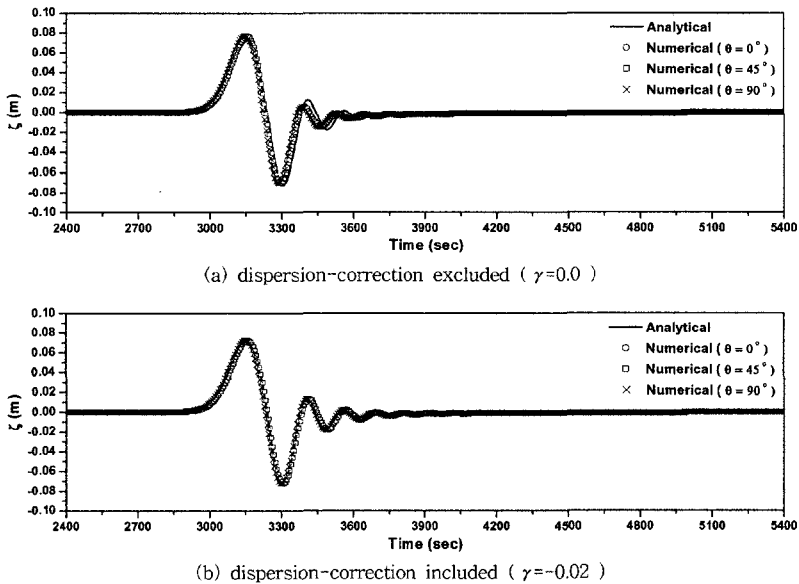


Fig. 3. Comparison of computational and analytical time histories of free surface profile at $\gamma = 150\Delta x$ for the case of water depth $h = 1000\text{m}$ ($\Delta x_{lm} = 2086\text{m}$, $\Delta x = 2086\text{m}$).

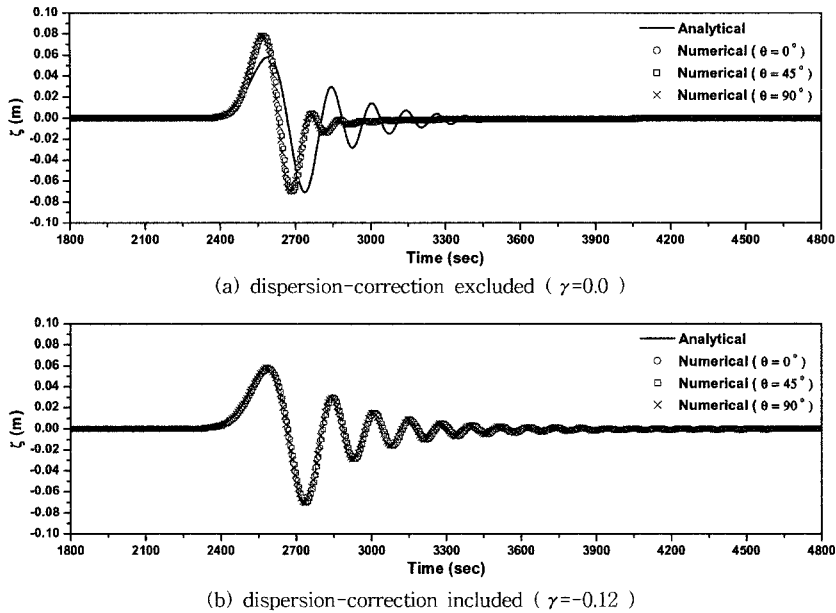


Fig. 4. Comparison of computational and analytical time histories of free surface profile at $\gamma = 150 \Delta x$ for the case of water depth $h = 1500\text{m}$ ($\Delta x_{fm} = 3087\text{m}$, $\Delta x = 2086\text{m}$).

이 본 연구의 수치모형($\gamma = -0.12$)에 의한 결과는 방향에 상관없이 분산정도가 물리적 분산과 매우 잘 일치하고 있다.

이상의 수치모의 결과를 종합해 보면 이번 연구에서 개발된 분산보정기법이 수심이 일정한 해역에 대해 요소 크기에 관계없이 원하는 물리적 분산효과를 얻을 수 있음을 알 수 있다. 그러나 수심이 일정하지 않은 해역에 대해서도 경사가 완만한 경우 각 수심에 대해 산정된 분산보정계수 γ 를 적용하면 모든 방향으로의 분산관계를 만족시켜 상당한 정도의 수치모의를 가능케 해줄 것으로 기대된다.

6. 결 론

종래의 분산보정 수치모형은 Imamura et al.(1988)이 제시한 요소크기를 조정하여 분산효과를 얻을 수 있으나, 이 방법은 수심이 일정하지 않은 실제 해역에서 분산보정 조건을 만족시키는 정확한 유한요소망을 생성하기 위해 많은 노력이 필요하므로 현실적으로는 적용이 거의 불가능하다. 이에 본 연구에서는 윤성범 등(2004)이 개발한 1차원 분산보정기법을 확장하여 요소의 크기를 자유롭게 조절할 수 있는 유한요소기법의 장점을 살리면서도 $2\Delta x$ 파의 발생 가능성이 낮은 새로운 2차원 유한요소모형을

개발하였다. 이 유한요소모형은 질량집중행렬과 천수 파동방정식의 시간단계를 2단계로 나누어 순수양해법을 채택하기 때문에 신속하게 해를 구할 수 있고, 선형 천수 파동방정식에 추가된 인위적인 분산항을 이용하여 수치기법이 복잡한 Boussinesq 방정식 대신 간단한 파동방정식을 이용하면서도 지진해일 전파시 요구되는 물리적인 분산효과를 정도 높게 고려할 수 있다. 초기 수면변위가 Gauss 분포를 가진 가상진원에 의해 발생한 지진해일의 전파에 대하여 2차원 전파과정을 본 연구에서 개발한 유한요소모형을 이용하여 수치모의한 결과와 선형 Boussinesq 방정식의 해석해를 비교한 결과 요소크기와 시간간격이 고정되었음에도 불구하고 다양한 수심에 대해 해석해와 매우 잘 일치하는 좋은 결과를 보였다. 이는 수심이 완만하지만 상당히 변하는 해역을 전파하는 지진해일에 대하여 간단한 선형 천수 파동방정식과 임의크기로 구성된 유한요소망을 사용하면서도 Boussinesq 방정식에서와 같은 정도의 물리적 분산효과를 모든 방향에 대해 적절히 고려할 수 있음을 의미한다.

감사의 글

본 연구는 기상청 기상연구소의 특정사업 ‘지진예지 및 지진해일 예측기술 개발’의 지원으로 수행되었습니다.

참고문헌

- 윤성범 (1999). 완변수심상 지진해일 전파 2차원 유한차분 모형의 분산보정. 대한토목학회논문집, 19(II-6), 695-703.
- 윤성범, 임채호, 윤기승, 최병호 (2004). 양해법을 이용한 일차원 지진해일 전파 유한요소모형의 분산보정. 한국해양공학회지, 16(2), 57-63.
- 조용식 (1996). 대양을 횡단하는 지진해일의 수치모의. 대한토목학회논문집, 16(II-3), 303-310.
- Carrier, G.F. (1991). Tsunami propagation from a finite source. Proc. of 2nd UJNR Tsunami Workshop, NGDC, Hawaii, 101-115.
- Cho, Y.-S. (1995). Numerical simulations of Tsunami propagation and run-up. Ph.D. Thesis, School of Civil and Env. Engrg., Cornell University, Ithaca, NY.
- Imamura, F., Shuto, N. and Goto, C. (1988). Numerical simulation of the transoceanic propagation of tsunamis. Proc. of 6th Congress Asian and Pacific Regional Division, IAHR, Japan, 265-271.
- Krenk, S. (2001). Dispersion-corrected explicit integration of the wave equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191, 975-987.
- Liu, P.L.-F., Cho, Y.-S., Yoon, S.B. and Seo, S.N. (1995). Numerical simulations of the 1960 Chilean tsunami propagation and inundation at Hilo, Hawaii. *Tsunami : Progress in Prediction, Disaster Prevention and Warning*, edited by Tsuchiya and Shuto, Kluwer Academic Publishers, 99-115.
- Yoon, S.B. (2002). Propagation of distant tsunamis over slowly varying topography. *J. Geophys. Res.*, AGU, 107(C10), 4(1)-4(11).
- Yoon, S.B. and Liu, P.L.-F. (1992). Numerical simulation of a distant small-scale tsunami. *Recent Advances in Marine Science and Technology, PACON92, Pacific Congress on Marine Science & Technology*, Kona, Hawaii, 67-78.

Received October 29, 2004

Accepted December 20, 2004