

## 論文

## 3차원 유동 시뮬레이션을 위한 Supercompact 다중 웨이블릿

양승철\*, 이도형\*

## Supercompact Multiwavelets for Three Dimensional Flow Field Simulation

Seungcheol Yang\* and Dohyung Lee\*

## ABSTRACT

This paper presents a supercompact multi-wavelet scheme and its application to fluid simulation data. The supercompact wavelet method is an appropriate wavelet for fluid simulation data in the sense that it can provide compact support and avoid unnecessary interaction with remotely located data (e.g. across a shock discontinuity or vortices). thresholding for data compression is applied based on a covariance vector structure of multi-wavelets. The extension of this scheme to three dimensions is analyzed. The numerical tests demonstrate that it can allow various analytic advantages as well as large data compression ratios in actual practice.

## 초 록

본 논문에서는 supercompact 다중 웨이블릿 기법과 이 기법의 유동 시뮬레이션 데이터에의 적용을 발표한다. Supercompact 웨이블릿 방법은 간결한 지원(support)을 제공할 수 있고 또 속성이 다른 떨어져 있는 데이터와(예: 충격파의 불연속구간 또는 와동을 가로지르는 부분) 불필요한 상호작용을 피할 수 있는 점에서 유동 시뮬레이션 데이터를 위한 적합한 웨이블릿 방법이라 할 수 있다. 데이터 압축을 위한 임계치리법(thresholding)은 다중 웨이블릿의 공분산 벡터 구조 기반 하에 적용된다. 본 논문은 3차원으로의 기법 확장이 설명 분석되었다. 수치실험은 본 방법이 여러 이론적인 이점을 제공할 수 있고 실제 결과에 있어서 큰 데이터 압축 비율을 산출 할 수 있음을 보여준다.

**Key Words** : Wavelets(웨이블릿), Compactness(집약), Multiresolution(다중해상도), Data compression(데이터 압축)

## 1. 서 론

웨이블릿은 데이터 분석 분야에 있어서, 물리영역에서의 국부성(locality)과 데이터 표현의 압축성 등 매력 있는 특징을 제공한다. 이러한 특징

때문에 여러 분야에서 활발한 웨이블릿 응용이 이루어지고 있다. 편미분 방정식에 대한 수치해석 방법도 다중해상도(Multiresolution)에 의해 개선될 수 있다.

## 1.1 유체역학을 위한 웨이블릿의 적용

유체역학에서 웨이블릿을 이용하는 방법은 크게 두 가지 방법으로 나누어진다. 하나는 Fast Fourier Transform (FFT) 과 유사하다. 변환 domain에서의 해법을 계산하는 Fast Wavelets

† 2004년 12월 13일 접수 ~ 2004년 7월 11일 심사완료

\* 정회원, 한양대학교 기계공학과  
연락저자, E-mail: dohyung@hanyang.ac.kr  
경기도 안산시 상록구 사1동 1271

Transform (FWT)을 적용하는 것으로 B. Engquist 등이 [1] 시간 독립 계수로 이루어진 선형 시간 진행 방정식 계산을 위한 빠른 웨이블릿 알고리즘의 적용을 발표하였다. 간접적인 방법은 수치 계산 용량을 감소시키고 해법의 정확성을 개선 목적으로 웨이블릿을 간접적으로 응용 하는 것이다. A. Harten[2]은 다중해상도(multiresolution) 표현으로 압축된 해를 계산하는 방법을 보여준다. 이 방법의 효율은 데이터 압축 비율에 비례한다. M. Gerritsen[3]은 충격파, 급격한 구배, 국부 진동 등을 찾아내는 데 웨이블릿 이론을 사용했다.

### 1.2 기체역학 방정식을 위한 웨이블릿의 기초

웨이블릿의 기저(basis) 함수는 Fast Wavelet Transform (FWT)의 효율을 결정한다.

Daubechies 웨이블릿은 이미지 압축을 위한 적절한 도구이다. 그러나 전형적인 사진 이미지와 지문 이미지는 Navier-Stokes 방정식의 수치 해와 매우 다르다. 일반적으로 사진 이미지는 대부분 불연속들로 구성되어 있고 약간의 내재적 매끄러움을 가지고 있다. 한편, 수치 해는 대부분의 영역에서 매끄럽지만 국부적으로 불연속면들을(충격파, 와동, 그리고 전단층) 지닐 수 있다.

Harten[2]에 따르면 Interpolatory 다중해상도 방법이 편미분 방정식의 해법을 나타내는 데 아주 적합한 도구이다. 균일 간격과 periodic 경계 조건 하에서 개발된 Interpolatory 방법은 비 균일 격자와 non-periodic 경계 조건으로 쉽게 확장될 수 있다. 이것은 비 균일 격자에서 하나의 함수가 이동(translation)과 팽창(dilation)에 의해 확장이 어렵고, non-periodic 경계 조건의 적용이 어려운 이산화 웨이블릿의 고전적 이론과 대조를 이룬다.

Harten 알고리즘의 스칼라 version은 Sweldens[4]의 업적과 밀접한 관계가 있다. Sweldens는 이동과 팽창이 필요하지 않는 웨이블릿을 second generation wavelets 으로 호칭하며 이론을 전개하였다. Sweldens이 설명한 Lifting 기법은 스칼라 양의 보존과 같은 전체적(global) 속성을 부여할 수 있다. 한편, 정확도 차수는 그 기본 알고리즘과 같이 변하지 않고 지원(support) 점들의 개수는 급속히 증가된다.

### 1.3 압축 웨이블릿

본 논문에서 높은 정확도 차수의 표현을 하고 적은 지원점을 가진 압축 기법 (compact scheme)

을 연구한다. 앞서 여러 학자들은 높은 차수의 간결한 지원을 가지고 있는 웨이블릿을 개발하고, 동시에 가능하다면 직교성(orthogonality)과 해석적 (analytic, nonfractal) 특징 등의 부가적 장점을 보유하도록 시도했다. 가장 기본적인 Haar 웨이블릿 (1차 근사)은 집약성 (compact), 구분적으로 해석적 (piecewise analytic), 직교성의 성질을 가지고 있다. Daubechies [5]은 직교성을 유지하면서 근사의 차수를 확장했으나 compact 하지는 않다. Geronimo 등 [6]은 다중 웨이블릿을 사용했으나 Daubechies 의 결과와 비슷하다. Strang[7]은 웨이블릿이 Haar 압축의 수준에 대한 압축 지원을 어느 정도 가지고 있다. 이후 여러 해석이 발표되었고 마침내, Alpert [8]의 다중웨이블릿 기초로부터 supercompact 다중웨이블릿이 개발되었다.

Supercompact 다중해상도 알고리즘의 이점은 두 가지로 볼 수 있다. 첫 번째, 다른 웨이블릿과 달리, 유한 구간 경계에서 특별히 웨이블릿 차수 등의 변화를 줄 필요가 없다. 두 번째, 유한 구간 경계 사이에 정의된 구분 연속적인 함수 응용이 효율적으로 구현될 수 있다.

이 논문에서는 1차원 supercompact 웨이블릿을 더 높은 차원으로 일반화시키고 3D 유동 시뮬레이션 데이터에 대한 실질적인 압축의 수치 실험을 시행한다. Supercompact wavelets을 다차원 structured 곡선(curvilinear) 좌표계로 확장하면서 웨이블릿의 직교성 등의 장점이 쉽게 잃어질 수도 있다. 하지만, 다행스럽게도 복잡한 3D 연산 분석 과정을 거친 본 연구 결과, 등 간격 1차 웨이블릿에서 지닌 대부분의 수학적 장점을 3D 웨이블릿에서도 유지되도록 할 수 있었다. 수치 실험에서도 격자 시스템에 급격한 변화가 없는 이상 높은 비율의 (약 50:1) 데이터 압축이 가능함을 볼 수 있다.

## II. Harten의 Interpolatory 다중해상도

Harten[9,10,2]의 interpolatory 다중해상도 알고리즘은 그 분해의 각각의 단계에서, 그 격자의 이분 덩성화(dyadic coarsening)를 하여준다. 그 덩성화 동안에 짝수점(even-point) 값은 투영(project) 되고 홀수점(odd-point) 값은 버려진다. 그 재구성 단계에 대해, 더 상세한 (fine) 격자 단계에서 없어진 홀수점 값을 예측하는 데 보간(Interpolation)을 이용된다. 물론, 대부분 경우, 보간의 오차 때문에 그 보간된 값은 정확하지 않다. 한편 각각의 분해 단계에서, 그 보간 오차는

홀수점 값이 없어지기 전에 저장된다. 보간 다중 해상도 해석에 있어서, 그 보간 오차는 scale 계수이다. Interpolatory 다중해상도 입력 정렬이 한 지점의 값 대신 cell-averaged 값으로 구성될 수도 있다는 것에 유의해야 한다. 이 경우에, 짝수점 값은 단순 분해하는 동안 투영되지 않는다.

단계  $p$  격자에 있는,  $v^p$  데이터를 위한 다중해상도 변환은 다음과 같이 설명한다. 더 세밀한 단계  $p$ 로부터 더 coarse한 단계  $p-1$  으로의 분해는 다음과 같이 진행된다.

$$\begin{aligned} v^{p-1} &= H_p^{p-1} v^p \\ d^p &= G_p e^p \\ &= G_p (v^p - P_{p-1}^p v^{p-1}) \end{aligned} \quad (1)$$

미세한 격자 레벨  $v^p$ 에서의 벡터는 더 낮은 레벨 표현  $v^{p-1}$ 로 분해 (decomposed) 되고, 예측 오차  $e^p$ 로부터 얻어진  $d^p$ 는 scale 계수이다.  $H_p^{p-1}$ 는 레벨  $p$ 로부터  $p-1$  로의 이산화된 정보 내용을 정리하는 decimation 연산자이다. 예측 연산자  $P_{p-1}^p$  는 레벨  $p-1$ 로부터  $p$ 로의 이산화 정보를 근사적(approximation)으로 산출한다. 그 재구성 과정은 다음과 같다.

$$v^p = P_{p-1}^p v^{p-1} + E_p d^p \quad (2)$$

연산자  $G_p$ 는 어떤 기저 함수 상에서 예측 오차를 계산하고 그것의 역인  $E_p$ 는 scale 계수  $d^p$ 에서 나온 예측 오차  $e^p$ 를 단순히 계산한다.

Decimation 연산자와 예측 연산자 사이의 기본적인 속성, 그리고  $E_p$ 와  $G_p$  사이에서 일관성 관계는 다음과 같다.

$$H_p^{p-1} \cdot P_{p-1}^p = I_{p-1} \quad (3)$$

$$E_p \cdot G_p = I \quad (4)$$

몇몇 팽창 계수들이 어떤 한계 값 아래로 떨어져 영으로 대신할 수 있을 때 데이터 압축이 가능하여 진다.

### III. 다차원 Supercompact 웨이블릿

3차원 데이터에 적합한 다차원 Supercompact 웨이블릿을 제안한다. 방법 중 한 가지는 1차원 다중해상도법을 방향을 바꾸어가면서 적용시키는 것이다. 하지만, 이 경우 다차원 기저함수 없이 적용하므로, 교차방향(cross-direction)과 관련된 계수를 명확히 정의할 수 없다. 따라서 교차 계

수들에 대해 부적절한 처리를 하여주는 ad hoc 방법 변환이라 할 수 있다.

여기서는, 정확한 다차원 scaling 함수와 웨이블릿 함수를 이용하여 다차원 다중해상도법을 개발한다. 3차원에서도 1차원 경우와 마찬가지로 직교성을 갖는다.

### 3.1 Pre- and Post- 변환

블록  $\mathbf{x}_{ijk}$ 는  $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ ,  $y_{j-1} \leq y \leq y_j$ ,  $z_{k-1} \leq z \leq z_k$ 에서 다음과 같은 부분구간 (Sub-interval) 점들로 구성된다.

$$\mathbf{x}_{ijk} = \left\{ \left( x_{i-1+\frac{l_i}{l}}, y_{j-1+\frac{l_j}{l}}, z_{k-1+\frac{l_k}{l}} \right) \right\} \quad (5)$$

여기서  $l_i, l_j, l_k$  는 정수이다.

$$0 \leq l_i, l_j, l_k \leq l \quad (6)$$

$l$ 는 다항식의 차수를 표시한다. 다중해상도 과정에서는 텐서형태 대신 벡터형태로  $\mathbf{x}_{ijk}$ 의 순서를 정한다.

$$(\mathbf{x}_{ijk})_n = \left( x_{i-1+\frac{l_i(n)}{l}}, y_{j-1+\frac{l_j(n)}{l}}, z_{k-1+\frac{l_k(n)}{l}} \right) \quad (7)$$

여기서,

$$l_i(n) = \text{mod}(n - l_k(n) q^2, q) \quad (8)$$

$$l_j(n) = \text{quotient}(n - l_k(n) q^2, q) \quad (9)$$

$$l_k(n) = \text{quotient}(n, q^2) \quad (10)$$

$n$ 은 연속 정수이고

$$0 \leq n \leq q^3 - 1 \quad (11)$$

이고  $q$ 는 정확도 ( $q=l+1$ )의 차수이다. 여기에서, **mod**와 **quotient**는 정수 분할에서 나머지와 몫을 각각 나타낸다.

$\vec{u}_{ijk}$ 는 (7)에서처럼 배열되는 열 벡터이다.

$$(\vec{u}_{ijk})_n = u((\mathbf{x}_{ijk})_n) \text{ for } (\mathbf{x}_{ijk})_n \in \mathbf{x}_{ijk} \quad (12)$$

$\vec{\alpha}_{ijk}$ 에서  $\vec{u}_{ijk}$ 로의 변환을 행렬로 표시하면 다음과 같다.

$$\vec{u}_{ijk} = \mathbf{T} \vec{\alpha}_{ijk} \quad (13)$$

함수  $u(x, y, z)_{ijk}$ 를 표현하기 위해  $l$ 차 다항식을 선택한다.

$$(u(x, y, z))_{ijk} \approx \sum_{n=0}^{q^3-1} \alpha_n \varphi_n(x, y, z) \quad (14)$$

다항식 shape 함수는 다음과 같이 차원이 나누어 질 수 있다고 가정한다.

$$\varphi_n(x,y,z) = \phi_{l_i}(x) \phi_{l_j}(y) \phi_{l_k}(z). \quad (15)$$

여기서  $l_i(n), l_j(n), l_k(n)$  는 (8) - (10)에서 결정된다. 한번 기저함수가 동일 차원에서 서로 직교하면, 직교성은 다른 차원의 기저함수에 도 유효하다. 따라서  $\varphi_n(x,y,z)$  또한 서로 직교한다.  $n$ 의 값에 따라  $\mathbf{a}_n$ 는  $\alpha_{l_i} \alpha_{l_j} \alpha_{l_k}$  로 서로 분리될 수 있다. 방정식 (14)은 다음과 같다.

$$\sum_{n=0}^{q^3-1} \alpha_n \varphi_n(x,y,z) = \sum_{l_i=0}^l \alpha_{l_i} \phi_{l_i}(x) \sum_{l_j=0}^l \alpha_{l_j} \phi_{l_j}(y) \sum_{l_k=0}^l \alpha_{l_k} \phi_{l_k}(z) \quad (16)$$

직교성의 가정 아래 계수들은 단순히 다음과 같다.

$$(\alpha_n)_{ijk} = \frac{8}{h_x h_y h_z} \times \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \int_{z_{k-1}}^{z_k} (u(x,y,z))_{ijk} (\varphi_n(x,y,z))_{ijk} dx dy dz \quad (17)$$

이산화 영역(Discrete Domain) 상에서  $u(x)$ 는 (5)의 좌표점  $\mathbf{x}_{ijk}$ 에 대해 다음과 같이 표현된다.

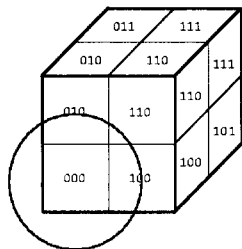
$$u((\mathbf{x}_{ijk})_m) = \sum_{n=0}^{q^3-1} \alpha_n \varphi_n((\mathbf{x}_{ijk})_m) \quad (18)$$

이 방정식은 (13)과 동일하고 그 변환 행렬은 다음과 같다.

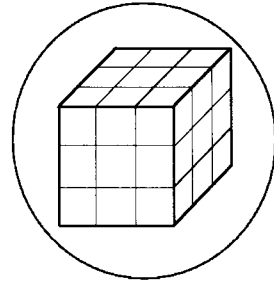
$$\mathbf{T}_{mn} = \varphi_n((\mathbf{x}_{ijk})_m), \quad m, n = 0, 1, \dots, q^3 - 1 \quad (19)$$

### 3.2 분해와 재구성

3차원의 경우, Harten 형태의 분해 (decomposition)는 결합 과정 중 미세한 격자에서 더 많은 셀



(a) One step multiresolution cell merging: 8 subcells merge into one cell during decomposition



(b) 4th order cell configuration: The number of orders (q) or l determines the grid points for data

Fig. 1. 3D cell configuration

(cell)들을 갖는다. 등성한 격자(그림 1)에 있는 한 셀은 미세한 격자의 8개의 부분 셀에 대응된다. 한 단계 분해가 끝나면, 각각의 부분 셀에 대응되는 8개의 벡터는 하나의 평균(보간) 벡터와 7개의 residual 벡터로 대체된다.

한 단계의 분해는 다음과 같은 형태로 수행된다.

$$\mathbf{R}^{p-1} = \mathbf{L} \vec{\mathbf{a}}^p \quad (20)$$

여기서,  $\vec{\alpha}$ 는 등성한 격자에서 보간 벡터 (interpolation vector) 이고  $\vec{\mathbf{r}}$  성분은 다차원 저, 고주파의 보간 오차를 나타내는 residuals이다.  $\mathbf{L}$ 과  $\vec{\mathbf{a}}$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{G} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \vec{\alpha} \\ \vec{\mathbf{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\alpha}_{ijk} \\ r_{100,ijk} \\ r_{010,ijk} \\ r_{110,ijk} \\ r_{001,ijk} \\ r_{101,ijk} \\ r_{011,ijk} \\ r_{111,ijk} \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\vec{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} \vec{\alpha}_{2i-1,2j-1,2k-1} \\ \vec{\alpha}_{2i,2j-1,2k-1} \\ \vec{\alpha}_{2i-1,2j,2k-1} \\ \vec{\alpha}_{2i,2j,2k-1} \\ \vec{\alpha}_{2i-1,2j-1,2k} \\ \vec{\alpha}_{2i,2j-1,2k} \\ \vec{\alpha}_{2i-1,2j,2k} \\ \vec{\alpha}_{2i,2j,2k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\alpha}_{000} \\ \vec{\alpha}_{100} \\ \vec{\alpha}_{010} \\ \vec{\alpha}_{110} \\ \vec{\alpha}_{001} \\ \vec{\alpha}_{101} \\ \vec{\alpha}_{011} \\ \vec{\alpha}_{111} \end{bmatrix} \quad (22)$$

L의 첫 번째 행H는 분해단계의 보간 과정을 나타내고 (1×8) 블록(block) 행렬이다. Residual의 계산을 위해, (7×8) 블록 행렬 연산자G를 사용한다. 즉 방정식 (20)은 두 부분으로 나누어질 수 있다.

$$\vec{\alpha}^{p-1} = \vec{H}\vec{a}^p \quad (23)$$

$$\vec{r}^{p-1} = \vec{G}\vec{a}^p \quad (24)$$

H와G 연산자의 값을 구하는 것은 1차원 경우에서보다 더욱 복잡하다. 연산자의 정확한 형태는 [12]에서 설명된다. 재구성 과정은 분해 과정의 역과정이고 직교성에 의해 다음과 같다.

$$\vec{a}^p = \vec{H}^T \vec{\alpha}^{p-1} + \vec{G}^T \vec{r}^{p-1} \quad (25)$$

#### IV. 임계치리법(thresholding)

데이터 압축은 적절한 한계 값보다 작은 웨이블릿 계수를 버림으로써 달성될 수 있다. 다중웨이블릿의 경우, 스칼라 대신 벡터가 다루어져야 하므로 보다 정교한 처리가 필요하다. 여기서는 신호처리 분야에서 잡음 제거에 사용되며 다중웨이블릿의 공분산 구조에 근거한 T. Downie 와 B. Silverman[11]의 임계치리방법을 적용한다.

다중웨이블릿에서는 pre-transformation을 통해 연관성이 큰 계수들을 얻을 수 있다. 같은 간격에 있는 웨이블릿 계수들은 서로 크게 연관되기 때문에 각각의 계수가 아닌 벡터 값을 전체에 기반을 둔 방법을 개발해야 한다.

다음의 변환을 사용하면 임계치리(threshold)될 양수의 reference 값  $\theta$ 를 구할 수 있다.

$$\theta = \mathbf{R}^T \mathbf{V} \mathbf{R} \quad (26)$$

여기서V는 공분산 행렬이다. 한계값  $\lambda$ 가 정해지면 그에 따른 임계치리법(thresholding) 규칙이 다음과 같이 적용된다.

$$\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{I} (\theta \leq \lambda) \quad (27)$$

$\theta$ 가  $\lambda$ 보다 크다면 웨이블릿 벡터를R로 유지시키고 그렇지 않으면 영으로 만든다. 공분산 행렬은 다음과 같다.

$$\mathbf{V} = \sigma^2 \mathbf{T}^T \mathbf{T} \quad (28)$$

이때 분산(variance)  $\sigma^2$ 은 잡음을 나타낸다. T는 post-transformation 행렬이다. 유동 시뮬레이션 데이터 압축에서는 분산의 크기는 중요하지 않으므로 1로 처리한다.

#### V. 경계 처리법

Supercompact 다중웨이블릿은 다른 웨이블릿들과는 달리 경계근처에서 별다른 처리를 요구하지 않는다. 하지만, 다중해상도 기법을 적용하기 위해서는 각 방향으로 정수와 2의 급수의 곱 ( $k J_m = k 2^m$ ) 크기의 격자가 필요하다. 그렇지 않을 경우 격자수를 줄이거나 늘려야만 한다. 전자의 경우 적용대상에서 제외되는 부분이 남게 되어 압축률을 떨어뜨리게 된다. 또한 후자의 경우에도 추가적인 메모리를 요구하게 되어 결국 압축률을 저하시킨다.

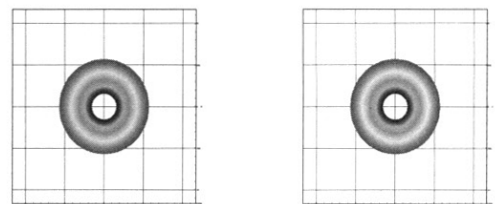
이 두 방법의 선택은 각각의 격자에 따라 달라진다. 일반적으로 격자점의 수가  $J_{m-1}$ 보다  $J_m$ 에 가까울 때는 경계부분의 안쪽을 채우고, 반대의 경우에는 격자를 줄이는 것이 바람직하다.

특히 확장하는 경우에는 경계 안쪽을 채울 때 외삽법을 이용하기 때문에 정확도 문제를 수반하게 된다. 이로 인해 원 데이터와 압축데이터 사이에 오차가 발생하고 압축률을 떨어뜨린다. 확장하는 방법에는 zero-padding, symmetrization, smooth padding이 있고 바깥쪽 경계부분에서는 smooth padding이 가장 보편적으로 사용된다. 여기서는 확장 시에 1차 외삽법을 사용한다.

#### VI. 결 과

Supercompact 웨이블릿을 이용하여 압축성 유동과 비압축성 유동의 데이터를 압축하였다.

첫 번째 데이터는 Rott의 와류(vortex) 전파에 관한 데이터[13]이다. Rott의 해(solution)는 Navier-Stokes 방정식의 해로써 정상상태에서의 3차원 축 대칭 와류를 나타낸다. 이 와류는 자유류 속도의 증가와 함께 유선방향으로 전파된다.



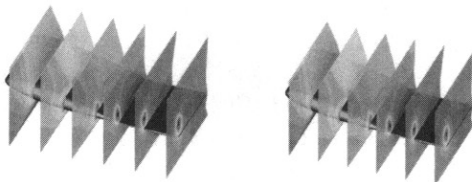
(a) Before compression (b) After compression

Fig. 2. Pressure contour for simple vortex propagation solution in rectangular grid(11×51×51)

그림 2는 유동방향과 직교하는 평면 (51×51)에서의 해를 나타내는데, 와류의 self-similarity 때문에 서로 다른 평면에서도 같은 형태를 갖게 된다. 그림 2(a), (b)는 압력 장에서의 압축 전, 후의 contour이고 3차 supercompact 웨이블릿을 적용하였다. 두 선도는 거의 같아 보이지만, 압축된 데이터는 원 데이터의 2%의 크기밖에 되지 않는다. 그러나 이론적인 압축비는 이보다 더욱 크다. 즉, 다중해상도 단계를 더욱 늘리면, 더 높은 압축률을 얻을 수 있는 것이다. 최대 다중해상도 단계는 3차원 각방향의 격자 중에서의 최소 크기에 의해 결정되는데, 이 문제에서는 x방향의 11개가 제한 요소가 된다. wavelet 적용크기를 (9×49×49)로 줄이면 2단계 다중해상도까지 가능해지고, 압축률은 8:1로 떨어진다. 이때 가장 민감한 다중해상도 단계 격자는 (3×5×5)이고 3차 정확도로 나타낸다. 한편, 크기를 (17×65×65)로 늘리면 3단계까지 가능하고 압축률은 52:1까지 커진다.

두 번째 예는 날개 끝 와동 전파의 경우[14]로 artificial viscosity 알고리즘과 수정 Baldwin-Barth 난류 모델 기반의 INS3D-UP [15]의 해이다. 격자 크기는(155×189×155)이고 C-O 형태의 격자를 사용한다. 그림 3은 곡선(curvilinear) 좌표로 압력 장에 대한 데이터 압축을 보여준다. 그 압축 비율 ( $\mu_1$ )은 40이다. 경계 주위를 제외하고 이 두 선도는 거의 차이가 없다. 또한 경계 근처에 위치된 최대 오차는  $7.93 \times 10^{-2}$ 이고 총 격자점의 수로 표준화(normalize)하면 평균오차 L2는  $2 \times 10^{-6}$ 이다.

문제 크기의 적합성은 특정 유동 특징에 맞는 wavelet의 적용성보다 더 중요하다. 3차의 정확도와 3차 다중해상도 레벨의 가장 알맞은 격자 크기는 (113×177×113)이다. 3차 기법을 위한 실제비율 ( $\mu_2$ )은 모든 오버헤드를 고려하는데



(a) Before compression (b) After compression

Fig. 3. Pressure contour for wingtip vortex propagation solution (115×189×115)

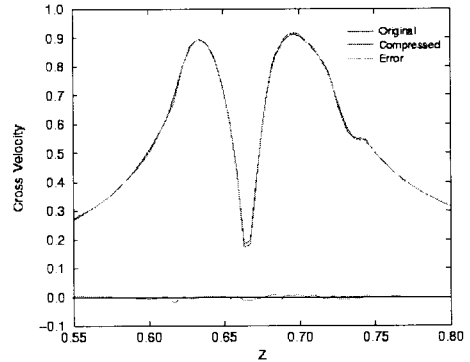
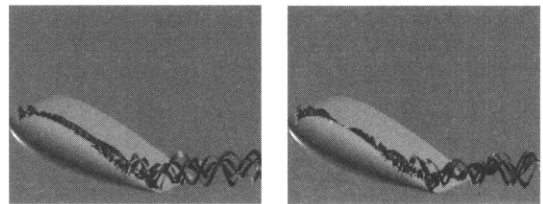


Fig. 4. Cross velocity magnitude across vortex core at  $x/c=1.5$

Table 1. The ratio of data compression

	$\mu_1$	$\mu_2$	$L^\infty$	$L^2$
Scalar (pressure)	40	8.11	$7.93 \times 10^{-2}$	$2. \times 10^{-6}$
Vector (no density)	45.87	8.36	$2.56 \times 10^{-1}$	$3.67 \times 10^{-6}$



(a)Before compression (b)After compression

Fig. 5. Streamline ribbons for wingtip vortex propagation solution

이 비율은 8.11이다.  $\mu_1$ 와  $\mu_2$  사이의 관계는 다음과 같이 주어진다.

$$1/\mu_2 = SF \times OH \times 1/\mu_1 + (1 - SF) \quad (29)$$

SF는 감소(shrinkage) 요소이고, OH는 식의 차수로 인한 오버헤드이다. 감소 요소는 격자에 의해 결정되는데, 격자수가  $(2 \times (q-1))^p$ 에 가까워질수록 이 요소는 1에 접근하게 된다. 여기서 p점은 다중해상도 단계를 나타내는 임의의 정수이다.

또한 벡터 해는 각 성분(component)별로 압축되어진다. 이때 유동 성량 중 conserved variable (예를 들면 운동량과 에너지 보존)은 꼭 보존되어야 한다. 하지만 lossy 데이터 압축은 이러한 보존법칙을 약화시킬 뿐만 아니라, 압축변수의 조합으로 만들어진 새로운 변수에서는 이 보존법

최오차는 더욱 증폭될 수 있다.

현재의 연구는 보존 과정에 대한 특별한 주의 없이 벡터 압축을 수행하고 있다. 꼭 필요한 경우는 특정 보존 변수에 대해 압축대신 보존법칙 적용으로 대체할 수 있다. 벡터 압축 비율( $\mu_1$ )은 45.87이고 실제의 비율( $\mu_2$ )은 8.36이다. 경계 밖에 있는 최대 오차는  $2.56 \times 10^{-1}$ 이며,  $3.67 \times 10^{-6}$ 의 표준화된 L2 오차를 가진다.

그림 4, 5에서는 압축대상변수의 조합으로 이루어진 새로운 변수들에 있어서, 그 압축오차가 어떻게 증폭되는지를 살펴보았다. 그림 4는 완전히 발달된 전형적인 와동 중심의 속도를 보여준다. 그 값( $\sqrt{v^2+w^2}$ )은 와동 중심의 센터에서 영(zero)에 접근하고, 그 인근의 어느 부분에서 최고 값을 가진다. 여기서 이차적인 와류의 초기형성( $z=0.74$ )을 보여준다. 압축된 데이터는  $z=0.68$ 에서 오른쪽 최고부의 취약점(weak point)외에는 원래 데이터와 거의 비슷하다. 입자 궤적과 국부 소용돌이의 세기를 나타내는 그림 5는 유선을 리본으로 표현한다. 압축된 데이터 안에서 영향의 범위는 원래의 데이터 보다 작고 넓다. 그러나 이는 유동상태에서 높은 데이터 압축에 대비하여 편차에 민감하고 항상 흐름의 경로와 함께 기하급수적으로 발달하는 유선 오차는 작게 나타난다.

## Ⅶ. 결 론

본 연구에서는 새롭게 개발한 3차원 supercompact 웨이블릿은 전산유체역학 시뮬레이션의 데이터 압축을 위해 적절한 선택이다. 이는 상당히 간결한 지원(highly compact supply)을 제공할 수 있고, 따라서 관계가 적은 국부 데이터 사이의 불필요한 상호작용을 회피할 수 있다. 강한 비선형성이 있는 불연속 충격파와 벽 경계층이 널리 퍼져 있을 때 이러한 간결한 지원은 더 중요하게 된다.

데이터 압축 비율은 다양한 요소(각 유동 특징에 맞는 웨이블릿 기본 함수의 적합성, 웨이블릿 사용 시에 따른 메모리 오버헤드, 문제 영역의 크기, 적용가능 다중해상도 레벨의 수)에 의해 결정된다. 그 적합성은 충격파와 와동과 같은 각각의 고유특징에 의해 달라질 수 있다. supercompact 웨이블릿은 이러한 국부특이현상(vortex, shout, etc)과 전반적으로 매끄러운 유동이 조합된 데이터에 대해 아주 큰 압축률( $O(1\sim 2)$ )을 보여주고 있다. 따라서 supercompact 웨이블릿은 유체역학

에 적합한 적절한 선택으로 여겨진다.

실제의 비행체 설계 과정은, 유동 시뮬레이션 및 실험의 정확성뿐만 아니라 손쉽고 빠른 대용량 정보 관리 및 추출을 요구한다. 이차원 데이터에 비해 3차원 데이터는 I/O와 적절한 정보 분석/추출 (예:vortex core)을 얻는데 상당한 시간이 요구된다. 이에 따라 이질적인 컴퓨터 시스템에 저장과 데이터 전송에 있어서 심각한 문제를 야기한다[16]. 특히 비정상 데이터의 경우에 그 크기가 기하급수적으로 늘어나므로 압축된 형태의 데이터 관리가 실제 비행 설계에 있어서 점차 필수적인 과정이 될 것이라고 예측할 수 있다. 따라서 본 supercompact 웨이블릿은 비행체 설계과정에 큰 기여를 할 것으로 사료된다.

## 후 기

이 논문은 정부(교육인적자원부)의 재원으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 수행된 연구임 (R05-2004-000-12166-0)

## 참고문헌

- 1) Engquist, B., Osher, S., and Zhong, S., "Fast wavelets based algorithms for linear evolution equations", *ICASE Report*, 1992.
- 2) Harten, A., "Multiresolution algorithm for the numerical solution of hyperbolic conservation laws", *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol. 48, 1995, pp. 1305-1342, Also CAM report 93-03(1993) pp. 153-192.
- 3) Gerritsen, M., *Designing an efficient solution strategy for fluid flows*, Ph.D. thesis, Stanford University, 1996.
- 4) Sweldens, W., "The lifting scheme: a new philosophy in biorthogonal wavelet constructions", *Proc. SPIE*, 1995, pp. 68-79.
- 5) Daubechies, I., "Orthonormal Basis of Compactly Supported Wavelets", *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol. 41, 1988, pp. 909-996.
- 6) Geronimo, J., Hardin, D., and Massopust, P., "Fractal Functions and Wavelet Expansions based on several Scaling Functions", *J. Approx. Theory*, Vol. 78, 1994, pp. 373-401.
- 7) Strang, G. and Strela, V., "Orthogonal Multiwavelets with Vanishing Moments", *J. Opt. Eng.*, Vol. 33, 1994, pp. 2104-2107.
- 8) Alpert, B., "A class of bases in  $L^2$  for

the Sparse Representation of Integral Operators", *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 1993, pp. 246-262.

9) Harten, A., "Discrete multi-resolution analysis and generalized wavelets", *Applied Numerical Mathematics*, Vol. 12, 1993, pp. 152-192.

10) Harten, A., "Multiresolution representation and numerical algorithms: a brief review", Tech. Rep. 94-59, ICASE report, 1994.

11) Downie, T. R. and Silverman, B. W., "The Discrete Multiple Wavelet Transform and 임계처리법(thresholding)", *IEEE trans on Sig Proc.*

12) Lee D., Beam R. M., Warming R. F., "Supercompact Multi-Wavelets for flow field simulation", *Computers and Fluids*, Vol. 30(7-8), 2001, pp. 783-805.

13) Rott, N., "On the Viscous Core of a Line Vortex", *Journal of Applied Mathematics and Physics*, Vol. 9b, No. 5/6, 1958, pp. 543-553.

14) Dacles-Mariani, J., Zilliac, G. G., Chow, J. S., and Bradshaw, P., "Numerical/Experimental Study of a Wingtip Vortex in the Near Field", *AIAA Journal*, Vol. 33, No. 9, 1995, pp. 1561-1568.

15) Rogers, S. E., Kwak, D., and Kiris, C., "Steady and Unsteady Solutions of the Incompressible Navier-Stokes Equations", *AIAA Journal*, Vol. 29, No. 4, 1991, pp. 603-610.

16) Cox, M. and Ellsworth, D., "Managing Big Data for Scientific Visualization", *ACM SIGGRAPH '97 Course #4, Exploring Gigabyte Datasets in Real-Time: Algorithms, Data Management, and Time-Critical Design*, 1997.