한국학교수학회논문집 제 8 권, 제 1 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 8, Number 1, 101-116 , March 2005

수학 교사들의 증명에 대한 인식

박은조[1] · 방정숙[2]

본 연구는 설문지를 통한 조사 연구와 수업 관찰을 통하여 증명에 대한 수학 교사들의 전반적인 인식과 증명 표현 양식 및 증명 능력을 조사하고, 교사가 가지고 있는 증명 스키마에 따른 증명 지도 방법의 특징을 살펴보았다. 연구 결과 교사들은 증명을 주로 연역으로만 인식하고 형식적 증명을 선호하는 경향을 가지고 있었다. 또한 학교 수학에서 증명의 중요성은 인정하나 지도 방법에 대한 이해는 부족했으며 증명에 대한 지식 역시 교과서 의존도가 높았다. 한편 수학 교사들의 증명 스키마는 증명 지도 방법을 결정하는 중요한 요인으로 드러났다.

주요용어 : 증명, 교사 인식, 증명 표현 능력, 증명 스키마, 증명 지도

I. 서론

증명은 수학에서 중추적인 개념이다. 이는 개념의 의미를 시험할 수 있게 하고 개념들 사이의 관계를 짓게 하며 새로운 지식을 탐구할 수 있게 한다. 실제 증명은 수학자들이 지식을 만들고 타당하게 하며 조직하는 도구로써 수학에서 중심적인 위치를 차지하고 있다. 학교 수학에서 증명은 연역적 추론 능력을 개발하고 수학적 이해를 증진시킴으로써 수학적으로 사고하는 힘을 육성하는 데에 많은 도움을 줄 수 있다(나귀수, 1998). 따라서 최근의 수학과 교육과정에서 모든 학생들에게 유의미한 방법으로 증명과 관련한 풍부한 기회와 경험을 제공할 것을 강조하고 있다(교육부, 1999; NCTM, 2000).

하지만, 그동안의 많은 연구 결과는 증명 지도 상황에 대한 부정적인 측면과 학생들의 낮은 학업 성취도를 보고하고 있다. 예를 들어, 학생들은 증명을 제대로 이해하지 못할 뿐만 아니라 증명을 다루는 수업 시간을 가장 지루한 시간으로 여긴다. 또한 교사들도 학생들이 창의적으로 증명을 할 수 있기를 기대하기보다는 정리의 활용을 강조하는 편이다(류희찬 & 조완영, 2001). 전반적으로 증명 수업은 교사의 시범, 학생들의 모방, 암기 패턴으로 피상적으로 이루어지고 있다.

교사는 수학을 지도하는 방법과 학습 방법을 변화시키는 데 있어서 주체가 된다. 특히 교사의 인식은 교실 관행을 결정하는 주요한 요소임을 고려할 때, 증명 지도의 개선과 관련하여 교사의 인식을 상세하게 살펴볼 필요가 있다. 증명에 대한 인식은 여러 가지 측면

1) 대현중학교 (cj1209@naver.com)
2) 한국교원대학교 (jeongsuk@knue.ac.kr)

에서 조사될 수 있으나, 본 연구에서는 첫째, 증명의 의미, 증명의 역할, 학교수학에서 증명의 중요성에 대한 수학 교사의 전반적인 인식을 살펴본다. 둘째, 다양한 증명의 표현 양식에 따른 수학 교사의 인식과 교사의 직접적인 증명을 통해 증명 표현 양식에 대한 선호도와 증명 능력을 분석한다. 셋째, 교사가 가진 증명 스키마에 따른 증명 지도 방법을 살펴보고 수업의 특징을 탐구한다.

본 연구에서 증명 표현 양식은 선행 연구를 토대로 경험적 증명, 해설적 증명, 형식적 증명으로 분류하였다. 경험적 증명은 구체적인 실증이나 경험이 특징인 증명 표현 양식을 일컫는 반면에, 해설적 증명은 일상적인 용어를 사용하여 해설적으로 근거가 되는 이유와 설명을 제시한 증명을 말한다. 또한 형식적 증명은 가정과 결론간의 명백한 연계를 가진 논리적 주장을 제시하며 기호를 사용한 연역적 증명을 일컫는다.

한편, 증명 스키마는 "자기 자신이 참임을 확인하기 위해 사용하는 것과 다른 사람을 설득하기 위해 사용하는 모든 것"이다(Harel & Sowder, 1998, p. 241). NCTM(2000)에서는 학생들이 수학적으로 추론하고 수학에서의 증명의 본질과 역할을 반영하는 방법으로 학교수학에서 증명을 지도할 것을 강조한다. 이와 같은 교사의 역할을 성공적으로 수행하는 데에 결정적인 요소가 수학 교사가 가지고 있는 증명 스키마이다(Knuth, 1999). 따라서 본 연구에서는 증명에 대한 수학 교사들의 전반적인 인식을 조사하는 것 외에, 교사가 가진 증명 스키마에 따른 증명 지도 방법을 부분적으로나마 살펴본다.

II. 이론적 배경

1. 증명의 의미와 역할

증명의 의미는 모든 수학자들 사이에서 일치되는 것은 아니다. 수학적 지식의 본질에 대한 인식이 달라짐에 따라 증명에 대한 관점 또한 변하여 왔다. 나귀수(1998)의 연구 결과를 토대로 절대주의, 준경험주의, 사회적 구성주의의 측면에서 증명의 의미를 요약하면 다음과 같다. 우선, 절대주의에서는 수학 명제를 정당화하는 수단으로 증명을 파악하고 공리, 정의, 이전에 증명된 정리 등을 이용하여 명제의 가정으로부터 선형적으로 결론을 이끌어내는 연역의 의미를 강조한다. 한편, 준경험주의에서는 어떤 정리를 정당화하는 수단으로 증명을 파악하지 않고, 증명 분석을 통하여 추측을 개선해 나가고 또한 증명 자체를 반박함으로써 새로운 개념을 발견해 내는 수단으로 파악하면서 추측을 가능한 한 작은 부분으로 분해하여 분석하는 사고실험으로서의 증명의 의미를 강조한다. 마지막으로 사회적 구성주의에서는 수학을 하는 사람들 간의 의사소통과 명제에 대한 확신을 얻기 위한 수단으로서 증명을 파악함으로써, 다른 사람을 확신시키고 이해시키기 위한 설명의 기능을 강조한다.

이와 같은 증명의 의미는 외형상으로는 각각 분리되어 있는 것처럼 보이지만, 실제로는 서로 밀접하게 관련되어 있다. 증명의 심층을 자세히 들여다보면, 추측을 형성하는 발견 이후에 그 추측이 참인지 거짓인지를 조사하는 정당화가 관련되고 마지막으로 그 결과를 다른 사람에게 설명하여 확신시키는 사회적 맥락이 연관되기 때문이다(나귀수, 1998).

한편, 선행 연구를 검토해 보면, 수학에 있어서 증명의 역할은 입증(verification), 설명, 체계화(systematization), 발견, 의사소통으로 정리할 수 있다(류성림, 1998). 여기서 입증은 수

학적인 진술의 정확성을 확신 또는 정당화하는 것이고 설명은 어떤 명제를 잘 알려진 결과에 기초하여 통찰이나 이해를 할 수 있도록 하는 것이다. 또한 체계화는 여러 가지 결과를 공리나 정의, 정리로부터 이루어지는 연역적인 체계를 확립하는 것을 일컫고, 발견은 조건과 결론과의 새로운 관계를 만드는 것 또는 진술된 명제와 그에 따르는 생각과의 새로운 관계를 만드는 것이다. 마지막으로, 의사소통은 설명이나 논쟁을 받아들이는 기준에 따라서 표현 양식을 정리하고 수학적 지식을 전달하는 것을 의미한다.

이러한 증명의 역할은 순수 수학과 학교 수학에서 달리 이해될 수 있다. 학교 수학에서의 증명은 수학적 관행에서의 증명의 본질을 반영하는 것으로 그 다양한 역할들에 대해서 충분한 검토가 있어야 함에도 불구하고 실제 이루어지고 있지 않다(조완영 & 권성룡, 2001). 주어진 명제에 대한 학생들의 이해를 촉진하고 명제가 참임을 의사소통하는 수단으로서의 사회적인 성격이 NCTM(2000)과 제 7차 교육과정에서 공히 증명 수업의 질적 개선을 위한 개혁 방안으로 강조되고 있음을 감안할 때, 증명의 역할에 대한 교사의 인식을 폭넓게 하는 것이 필요할 것이다.

2. 증명 스키마

선행 연구 결과를 토대로 증명 스키마를 정리해 보면 크게 세 가지, 즉 외부적 확신 증명 스키마(external conviction proof scheme), 경험적 증명 스키마(empirical proof scheme), 분석적 증명 스키마(analytic proof scheme)로 나눌 수 있다(Harel & Sowder, 1998; Knuth, 1999). 첫째, 외부적 확신 증명 스키마는 자신이 참임을 확인하는 것과 증명으로써 개인이 다른 사람에게 제공하고자 하는 것이 어떤 외부적 출처에 존재함을 의미한다. 외부적 출처가 교사 또는 교과서에 의존하는 경우는 권위주의 증명 스키마(authoritarian proof scheme), 증명에 포함된 추론의 정확성보다는 형식에 치중할 경우는 의식적 증명 스키마(ritual proof scheme), 문제에 포함된 기호표현을 조작하는 데에 의존하는 경우는 기호적 증명 스키마(symbolic proof scheme)로 그 하위 영역을 분류할 수 있다. 이와 같은 일련의 증명 스키마는 기초가 되는 수학에 대하여 의미 있게 이해하지 않고 공식으로 확인된 절차와 알고리즘에 대한 학습을 강조하는 전통적인 교육적 관행의 결과에서 기인한다(Hoyles, 1997).

둘째, 경험적 증명 스키마는 증명의 귀납적인 과정 즉, 경험적 증거에 기초한 주장을 강조한다. 이는 다시 임의로 선택된 소수의 경우에 기초하여 타당하다고 결론내리는 경우의 소박한 경험주의 증명 스키마(naive empiricism proof scheme), 극단적인 경우나 자신의 확신에 대한 타당성을 실험할 수 있는 평범하지 않은 사례를 적용하는 결정적 실험 증명 스키마(crucial experiment proof scheme), 증명의 대상이 되는 집합에서 대표적인 사례에 집중하는 생성적 예제 증명 스키마(generic example proof scheme)로 그 하위 영역을 분류할 수 있다.

셋째, 분석적 증명 스키마는 기본적으로 타당한 수학적 증명이다. 이는 다시 입증 증명 스키마(verification proof scheme)와 통찰 증명 스키마(illumination proof scheme)로 나눠 볼 수 있다. 전자는 명제의 참을 확립하는 데에 초점을 두고 증명의 연역적인 매커니즘을 강조하는 반면에, 후자는 명제의 참을 설명할 뿐만 아니라 명제가 참인 이유에 대한 통찰을 알리는 증명을 선호한다. 즉, 입증 증명 스키마는 수학적 귀납법에 의한 증명처럼 주어

진 정리가 참인 것만을 제시하는 반면에, 통찰 증명 스키마는 이외에 설명하는 증명의 역할을 강조하는 것이다.

이와 같은 증명 스키마는 다분히 상황 의존적이다. 즉 개인이 참임을 확인하는 것과 다른 사람을 설득시키기 위해 사용하는 것은 상황이 다를 경우 변할 수도 있다(Harel & Sowder, 1998). 이 관점은 특별히 수학 교사들의 증명 스키마를 조사하는 것과 깊은 관련이 있다. 예를 들어, 대학원 수학 과정에 등록한 교사들은 최소한 그 상황에서 입증 증명 스키마를 반영하는 증명을 선호하는 경향이 있는 반면에 자신의 수학 수업에서는 통찰 증명 스키마를 반영하는 증명을 강조할 수 있다. 또한 교사가 학생들로부터 수용하고 학생들에게 제시하는 증명의 본질은 수학이라는 학문에서 타당하다고 인식하는 증명의 본질과 다를 수도 있다. 예를 들어, 교사는 수학적 능력이 부족한 학생에게 경험적 증명 스키마를 반영하는 증명을 교수 방법상 제시할 수도 있다. 이렇듯 상황에 따른 증명 스키마의 복잡성과 융통성 때문에 본 연구에서는 교사의 증명 스키마를 전체 8가지 하위 영역까지 고려하여 상세하게 사용한다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상 및 방법

앞서 기술하였듯이 연구 목적상 본 연구는 증명에 대한 수학 교사들의 전반적인 인식을 조사하는 부분과 증명 스키마에 따른 증명 지도 방법을 분석하는 부분으로 나누어져 있다. 전자를 위한 연구 대상으로 현직 중등 수학교사 200명을 임의로 선택하여 설문지를 통한 조사 연구를 실시하였다. 한편, 증명 스키마에 따른 증명 지도 방법을 분석하기 위해서 증명 수업의 질적 개선에 관심이 많은 중학교 수학 교사 2명(A교사, J교사)을 추가로 선정하여 설문지를 통한 조사, 면담, 그리고 수학 수업을 관찰하였다. 두 교사 모두 충북 지역에 근무하고 각각 경력 14년과 13년을 가지고 있으며, 중학교 1학년과 2학년 수학을 담당하고 있었다.

2. 검사 도구

1) 수학 교사들의 증명에 대한 인식을 조사하기 위한 설문지

이 검사 도구는 Healy와 Hoyles(2000)가 교사와 학생의 증명에 대한 개념을 알아보기 위해서 제작한 질문지를 토대로 본 연구 목적에 맞게 수정하였다. 설문지는 크게 두 부분으로 이루어져 있다. 전반부는 수학교사의 증명에 대한 전반적인 인식을 알아보기 위하여 증명의 의미, 역할, 학교수학에서 증명의 중요성과 가르치는 이유, 교사의 증명 수업 방법, 학생의 반응에 대한 교사의 관점에 대해 기술할 수 있도록 서술형 문항으로 구성하였다.

후반부는 증명 표현 양식에 따른 선호도과 교사의 증명 능력을 알아보기 위한 것인데, 이는 다시 다양한 증명을 읽고 선택하기, 제시된 증명 분석하기, 직접 증명하기 유형의 문항들로 구성하였다. 여기서 '다양한 증명을 읽고 선택하기'는 예를 들어 [그림 1]과 같이 하나의 명제에 대해 5명의 다양한 증명 방법을 제시한 후 교사 자신의 증명과 가장 근접

한 증명을 찾고, 학생을 평가하는 경우 가장 높은 점수를 할당할 증명 방법을 선택한 후 그에 대한 이유를 제시하도록 하였다.

1. 동우, 승엽, 준혁, 지연, 해영은 모두 다음 명제가 참인지 거짓인지 증명하고 있습니다.

"임의의 두 짝수를 더하면, 그 더한 값은 항상 짝수이다"

아래 다섯 명의 증명을 읽고 다음 물음에 답하세요.

1-1. **선생님께서 직접 증명**을 하셨다고 가정할 **때**, 선생님의 증명과 **가장 비슷한 것**을 골라 ∨표 하세요.

□ 동우의 증명 □ 승엽의 증명 □ 준혁의 증명 □ 지연의 증명 □ 해영의 증명

1-2. 선생님께서 학생들의 증명을 **평가**하신다면, 어느 학생의 증명에 **가장 높은 점수**를 주시겠습니까?

해당란에 ∨표 하시고, 그 이유를 아래 빈 칸에 적어주세요.

□ 동우의 증명 □ 승엽의 증명 □ 준혁의 증명 □ 지연의 증명 □ 해영의 증명

이유:

<동우의 증명>

a와 b는 임의의 범자연수(0과 자연수)이다.

2a와 2b는 임의의 두 짝수이다.

$2a+2b=2(a+b)$

따라서, 주어진 명제는 참이다.

<승엽의 증명>

$2+2=4,\quad 4+2=6$

$2+4=6,\quad 4+4=8$

$2+6=8,\quad 4+6=10$

따라서, 주어진 명제는 참이다.

<준혁의 증명>

x 와 y를 임의의 범자연수(0과 자연수)라고 하자.

$x+y=z$

$z-x=y$

$z-y=x$

$z+z-(x+y)=x+y=2z$

따라서, 주어진 명제는 참이다.

<지연의 증명>

짝수는 2로 나누어 떨어진다. 공약수가 있는 두 수를 더하면, 그 합은 동일한 공약수를 가진다. 모든 짝수의 공약수는 2이므로, 임의의 두 짝수를 더한 값도 2를 공약수로 가진다.

따라서, 주어진 명제는 참이다.

<해영의 증명>

짝수는 일의 자리 숫자가 0, 2, 4, 6, 8 중의 하나이다.

0, 2, 4, 6, 8 중 임의의 두 수를 더한 값도 역시 일의 자리가 0, 2, 4, 6, 8이다.

따라서, 주어진 명제는 참이다.

[그림 1] 설문지 문항 예시: 다양한 증명을 읽고 선택하기

또한 '제시된 증명 분석하기'는 앞서 제시된 5가지 각각의 증명 방법에 대해서 교사의 인식을 상세하게 조사하기 위한 것으로 [그림 2]와 같이 다섯 가지 하위 문항으로 구성하였다. 여기서, 문항 1, 2, 3은 증명에 대한 교사 인식의 정확성을 알아보는 것인 반면에(타당도 평가), 문항 4와 5는 증명의 설명력에 대한 인식을 알아보는 것이다(설명력 평가).

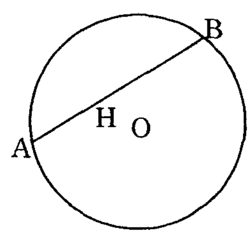
<동우의 증명>

	동의한다	모른다	동의하지않는다.
1. 증명에 **오류가** 있다.	1	2	3
2. 명제가 **항상 참**인지를 보여준다.	1	2	3
3. 명제가 **단지 몇 개**의 짝수에 대해서만 참이라는 것을 보여준다.	1	2	3
4. 명제가 참인 **이유를** 보여준다.	1	2	3
5. 이해하지 못하는 다른 사람에게 **설명하기** 쉬운 방법이다.	1	2	3

[그림 2] 설문지 문항 예시: 제시된 증명 분석하기

마지막으로, '직접 증명하기'는 교사의 증명 능력을 분석하기 위한 것으로, 네 가지 명제를 제시하고 증명하도록 하였다. 두 가지 문항은 앞에서 증명한 명제와 동형인 반면에, 나머지 두 문항은 앞서 증명한 명제의 응용이라 할 수 있다. 예를 들어, 동형인 문제는 "'임의의 두 홀수를 더하면, 그 결과는 항상 짝수이다'라는 명제가 참인지 거짓인지 증명하세요."이고, 응용인 문제는 "'p와 q가 임의의 두 홀수이면, (p+q)x(p-q)는 항상 4의 배수이다'라는 명제가 참인지 거짓인지 증명하세요."이다. 또한 수와 연산 영역이외에 도형 영역에서의 문항도 첨가하였다(예를 들어, [그림 3]).

점 O를 중심으로 하는 원의 내부에 임의의 한 점 H가 있다. 이 점 H를 지나는 현 중에서, $\overline{AH} \times \overline{BH}$ 의 값을 가장 크게 만드는 현 $\overline{AB}$ 를 찾고, 그 근거를 제시하세요.



[그림 3] 설문지 문항 예시: 직접 증명하기

2) 수학 교사들의 증명 스키마를 조사하기 위한 질문지

수업 관찰 대상으로 선정된 수학 교사들의 증명 스키마를 조사하기 위해서 본 연구는 위에서 개발한 설문지와 면담 외에 보조 자료로 Knuth(1999)가 사용한 질문지의 일부를 활용

하였다. 이 질문지는 [그림 4]와 같이 주어진 한 명제에 대해서 다양한 학생들의 증명을 읽고 제시된 평가 기준에 따라서 평가하고 그 근거를 작성하도록 하였다.

1. 여진, 지현, 성모, 진성, 시윤이는 다음 명제를 증명하고 있습니다.

명제 : "1부터 n까지의 자연수의 합을 S(n) 이라고 할 때, $S(n)=\frac{n(n+1)}{2}$ 이다."

각 학생의 증명에 대하여 표1에 따라 평가를 해 주시고, 그 근거를 적어주세요.

<표1. 평가기준>

0점	증명이 아닐 때.
1점	증명의 타당도에 따라, 낮으면 1점, 조금 높으면 2점.
2점	
3점	증명이 타당할 때

1) 여진이의 증명

$S(n)=1+\ 2+\ 3+\cdots+n \quad \leftarrow①$

$S(n)=n+(n-1)+(n-2)+\cdots+1 \quad \leftarrow②$

위의 ①과 ②를 더하면

$$2S(n)=(1+n)+[2+(n-1)]+[3+(n-2)]+\cdots+(n+1)$$
$$=(n+1)+(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)$$
$$=n(n+1)$$

따라서, $S(n)=\frac{n(n+1)}{2}$

점수	근 거

[그림 4] 증명 스키마 조사를 위한 보조 자료 문항 예시

3. 자료수집 및 분석

우선, 연구의 목적상 교사에게 부담을 최소화하면서 가능한 다양하고 최대한 정직한 답변을 얻기 위하여 개발한 설문지를 우편으로 발송하여 우편으로 회수하였다. 전체 200부 중 회수된 설문지는 141부이고, 이 중 분석이 불가능한 16부를 제외한 125부의 설문지를 분석하였다.

분석 방법은 질문 방식에 따라 다양하게 하였는데, 전반부의 자유 응답형 문항은 문헌연구에서 요약된 틀에 맞춰 일차적으로 분류하고 예상하지 못했던 유의미한 영역은 새로운 범주를 만들어 제시하였다. 또한 후반부의 문항 중 '다양한 증명을 읽고 선택하기'는 각각의 증명 유형별로 빈도수를 계산하였고, '제시된 증명 분석하기'는 하위 문항을 묶어서 증명에 대한 타당도 평가와 설명력 평가로 나누어 분석하였다. 타당도 점수는 모두 맞은 경우는 2점, '모른다'라고 답한 문항을 제외한 다른 문항이 모두 맞은 경우 1점, 그 외의 경우는 0점으로 처리하여 산출하였다. 또한 설명력 점수는 모두 동의한 경우는 2점, 한 문항에 대해 동의한 경우는 1점, 그 외의 경우는 0점으로 처리하여 산출하였다. 마지막으로 '직접 증명하기'는 이전의 증명 표현 양식에 대한 선호도와 연계하여 경험적 증명, 형

식적 증명, 해설적 증명으로 그 유형을 분류하였고, 증명에 대한 근거가 없을 경우는 0점, 적절한 내용은 있지만 연역이 없는 경우는 1점, 부분적인 증명은 2점, 완벽한 증명은 3점으로 처리하였다.

한편, 증명 스키마에 따른 수업의 특징을 조사하기 위해서 선정된 두 교사에 대해서 설문지와 면담을 실시하여 증명 스키마를 분석하고, 각각의 교사에 대해서 2주간 증명 단원에 대한 수업을 관찰하였다. 녹화된 수업에 대해서 트랜스크립트를 만들어 분석의 기초를 삼았으며 각 수업 후에 수업 내용을 이해하고 분석의 정확성을 위해서 간단한 면담을 실시하였다. 수업 분석은 연구 목적상 수업에 반영된 증명의 의미에 대한 도입, 증명의 목적, 증명의 중요성, 증명의 역할, 발문의 형태, 직접 증명하기의 지도방법, 학생들의 반응으로 나누어 분석하였다.

Ⅳ. 연구 결과 및 분석

1. 증명에 대한 전반적인 인식 조사

첫째, 증명의 의미에 대하여 상당히 많은 교사들이 가정으로부터 결론을 이끌어 내는 연역으로 인식하고 있었다. 다른 사람을 확신시키거나 이해시키기 위한 설명으로 증명의 의미를 이해하는 교사의 비율은 9.6%였으며, 사고 실험으로 이해하고 있는 교사는 3.2%에 지나지 않았다.

둘째, 증명의 역할에 대하여 32.8%의 교사들이 입증(verification)의 범주에 속한 반면에, 설명과 의사소통, 발견과 체계화의 범주에는 각각 9.6%, 8%로 그 비율이 매우 적었다. 한편, 선행 연구에서 분석되지 않은 논리적 사고력 배양이라는 범주에 32.8%가 속했는데, 이는 설문지 문항에서 "수학이라는 학문에서 증명의 역할"에 대해서 질문하고 있음에도 불구하고, 학교 수학에서의 증명의 역할과 연계시켜 답한 것으로 추측된다.

셋째, 학교 수학에서 증명의 중요성에 대해서는 거의 대부분의 교사들이 인정하고 있는 것으로 나타났다. 중요성에 대한 이유는 논리적이고 수학적인 사고 과정의 지도, 수학의 이해와 분석 용이, 수학의 학문적 성격에 대한 근거 등을 들었다. 다만 소수의 교사들은 중학교 과정에서 너무 세밀하게 증명을 다루는 것에 반대하고 더 나아가 암기식의 지도와 학생들의 무관심 및 이해 부족을 근거로 들면서 학교 수학에서 증명이 중요하지 않다고 답하기도 하였다.

넷째, 증명과 관련된 교사들의 수업 방법으로는 가정과 결론을 구분하고 이에 따라 증명을 전개하는 종합적 접근 방법에 63.2%, 주어진 명제의 특수한 경우를 예로 드는 방법에 13.6%, 도형 모형이나 컴퓨터 소프트웨어 등을 활용한 시각적인 접근 방법에 11.2%, 결론을 먼저 분석하여 결론이 성립되기 위한 조건을 탐색하는 분석적 접근 방법에 7.2% 등으로 나타났다.

마지막으로, 증명과 관련된 수업에 대한 학생들의 반응에 대해서 대다수의 교사들이 어려워한다고 생각하고 있고 교사의 수업 방식에 따라서 다를 수 있다고 반응한 교사는 6.4%에 지나지 않았다.

2. 증명 표현 양식과 증명 능력에 대한 조사

1) 증명의 표현 양식에 대한 인식

'다양한 증명을 읽고 선택하기'를 통해 드러난 수학 교사들의 인식을 살펴보면 <표 1>과 <표 2>와 같다. 분석에 대한 이해를 돕기 위해서 먼저 설문지에서 사용한 문항을 간단히 요약하여 나타내고 분석 결과를 제시하였다.

명제 "임의의 두 짝수를 더하면, 그 결과는 항상 짝수이다"에 대해 아래에 제시된 다섯 명 각각의 증명에 대하여 교사 자신이 직접 증명했다고 가정할 때 가장 비슷한 증명을 선택하는 것과 가장 높은 점수로 평가할 증명을 선택하고 그 이유를 적는다.

<동우의 증명>

a, b : 범자연수
2a와 2b는 임의의 두 짝수이다.
$2a+2b=2(a+b)$

따라서, 명제는 참

< 승엽이의 증명 >

$2+2=4,\ 4+2=6$
$2+4=6,\ 4+4=8$
$2+6=8,\ 4+6=10$

따라서, 명제는 참이다.

<준혁의 증명>

x, y : 범자연수
$x+y=z,$
$z-x=y$
$z-y=x,$
$z+z-(x+y)=x+y$
$=2z$

따라서, 명제는 참이다.

<지연의 증명 >

짝수는 2로 나누어 떨어진다.
공약수가 있는 두 수를 더하면, 그 합은 동일한 공약수를 가진다.
모든 짝수의 공약수는 2이므로, 임의의 두 짝수를 더한 값도 2를 공약수로 가진다.
따라서, 명제는 참이다. .

<해영의 증명>

짝수는 일의 자리 숫자가 0, 2, 4, 6, 8 중의 하나이다.
0, 2, 4, 6, 8 중 임의의 두 수를 더한 값도 역시 일의 자리가 0, 2, 4, 6, 8이다.
따라서, 명제는 참이다.

<표 1> 증명 표현 양식에 대한 수학 교사들의 인식 1

증명 표현 양식	자신의 증명과 가장 근접한 증명	가장 높은 점수로 평가한 증명
동우의 증명(형식적/타당함)	116(92.8%)	99(79.2%)
승엽의 증명(경험적/구체적 실증)	3(2.4%)	1(0.8%)
지연의 증명(해설적/추상적 성질)	2(1.6%)	6(4.8%)
해영의 증명(해설적/구체적 성질)	3(2.4%)	14(11.2%)
준혁의 증명(형식적/오류 있음)	0	2(1.6%)
동우, 지연	0	1(0.8%)
동우, 승엽	1(0.8%)	0
동우, 지연, 해영	0	2(1.6%)

<표 1>에서 제시되듯이, 교사들은 자신의 증명과 가장 근접한 증명으로 형식적 증명 방법을 반영한 동우의 증명을 선택했고, 역시 가장 높은 점수로 평가하였다. 교사들이 제시한 평가의 근거는 간결성, 논리성, 일반성, 대수적 표현 사용 등을 들었다. 한편, 구체적인 성질을 사용하여 해설적 증명 방법을 반영한 해영의 증명에 대해서도 11.2%의 교사들이 높은 점수를 주었다. 이에 대한 주된 이유로는 짝수의 정의를 이용하여 간단하면서도 누구나 쉽게 이해할 수 있도록 증명하였다고 생각했다. 수학적 기호를 사용한 형식적인 증명을 선호

하는 경향은 <표 2>에서 보는 바와 같이 다른 문항 분석에서도 일관되게 드러났다. 또한 학생 평가 중 성모의 증명에 대해서 창의적인 방법으로 증명했기 때문에 가장 높은 점수를 주는 교사들도 있었다.

명제 "임의의 삼각형의 내각의 총합은 항상 180°이다."에 대해 아래에 제시된 다섯 명 각각의 증명에 대하여 교사 자신이 직접 증명했다고 가정할 때 가장 비슷한 증명을 선택하는 것과 가장 높은 점수로 평가할 증명을 선택하고 그 이유를 적는다.

<민화의 증명 >

나는 각 세 개를 오려서 함께 붙여 보았더니, 직선이 되었다.
직선은 180°이다.
정삼각형과 이등변 삼각형에 대해서도 역시 동일한 결과가 나타났다.
따라서 명제는 참이다.

<혜라의 증명>

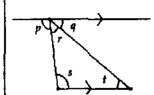
나는 모든 종류의 삼각형의 각을 정확하게 측정하여 표를 만들었다.

a	b	c	합계
110	34	36	180
95	43	42	180
35	72	73	180
10	27	143	180

모든 삼각형의 내각의 합은 180°이다.
따라서, 명제는 참이다.

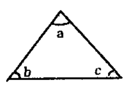
<예진의 증명 >

나는 삼각형의 밑변과 평행한 선분을 그렸다.



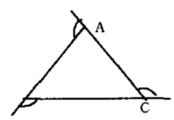
$\angle p = \angle s$, $\angle q = \angle t$ (엇각)
$\angle p + \angle q + \angle r = 180°$
(세 각이 일직선을 이루므로)
$\therefore \angle s + \angle t + \angle r = 180°$
따라서 명제는 참이다.

<민준의 증명>



나는 $\angle b = 65°$인 이등변 삼각형을 그렸다.
이등변 삼각형의 두 밑각의 크기는 같으므로,
$\angle a = 180° - 2\angle b$ $\therefore \angle a = 50°$
$\therefore \angle c = 180° - (\angle a + \angle b) = 65°$
이등변삼각형의 두 밑각의 크기는 같으므로, $\angle c = \angle b$.
$\therefore a + b + c = 180°$
따라서, 주어진 명제는 참이다.

<성모의 증명 >



삼각형의 변을 따라 줄곧 걷는다면, 처음 출발점으로 다시 돌아온다.
그러면 실제로 한바퀴를 돈 것이므로 360°회전을 한 것이다.
한 내각과 한 외각의 크기의 합은 180.
따라서, 세 외각과 세 내각의 크기의 합은 540°-360°=180°
따라서, 주어진 명제는 참이다.

<표 2> 증명 표현 양식에 대한 수학 교사들의 인식 2

증명 표현 양식	자신의 증명과 가장 근접한 증명	가장 높은 점수로 평가할 증명
민화의 증명(경험적/구체적 행동)	4(3.2%)	5(4%)
혜라의 증명(경험적/구체적 실증)	0	0
예진의 증명(형식적/타당함)	118(94.4%)	107(85.6%)
민준의 증명(형식적/오류 있음)	0	0
성모의 증명(해설적/구체적 성질)	0	10(8%)
민화, 예진	3(2.4%)	2(1.6%)
예진, 성모	0	1(0.8%)

2) 증명의 타당도와 설명력에 대한 인식

위에서 제시된 각각의 증명 표현 양식에 대해서 교사들의 인식을 보다 상세히 알아보기 위해서 타당도와 설명력을 분석한 결과는 다음과 같다. <표 3>은 명제 "임의의 두 짝수를 더하면 그 결과는 항상 짝수이다"에 대한 다섯 가지 증명에 대해서 교사들이 평가한 타당도와 설명력을 분석한 것이고, <표 4>는 명제 "임의의 삼각형의 내각의 총합은 항상 180도이다"에 대한 다섯 가지 증명에 대한 결과이다. <표 3>에 나타난 바와 같이, 타당도 평가에서는 오류가 없는 형식적 증명인 동우의 증명의 평균이 1.66, 표준편차 0.74로 가장 정확하게 인식하였다. 또한 해설적 증명을 반영하는 지연과 해영의 증명 방법을 그 다음으로 정확하게 인식하였다. 한편, 설명력이 가장 높은 증명으로 평가된 것은 구체적 성질을 이용한 해설적 증명인 해영의 증명이었으며, 타당한 형식적 증명인 동우의 증명도 그 다음으로 설명력 점수가 높았다. 주목할 것은 형식적 증명을 사용하긴 했지만, 오류가 있는 준혁의 증명에 대해서 교사들은 타당도와 설명력 측면에서 낮게 평가함으로써 증명에 대한 인식이 형식에만 치중한 것은 아니라는 점이다.

<표 3> 수학 교사들의 타당도 평가와 설명력 평가 1

	동우의 증명 (형식적)	준혁의 증명 (형식적, 오류)	승엽의 증명 (경험적/구체)	지연의 증명 (해설적/추상)	해영의 증명 (해설적/구체)
타당도 평균	1.66	1.25	1.20	1.33	1.29
표준편차	0.74	0.87	0.94	0.92	0.93
설명력 평균	1.37	0.14	0.97	0.9	1.53
표준편차	0.57	0.39	0.63	0.63	0.7

이와 같은 전반적인 경향은 다른 문항에 대한 분석에서도 비슷하게 나타났다. 구체적으로 <표 4>에 나타난 바와 같이, 타당한 형식적 증명인 예진의 증명의 타당도 점수 평균이 1.82, 표준편차 0.56으로 대부분의 교사들이 정확하게 인식하고 있었다. 또한 설명력이 높은 증명으로 평가된 것은 형식적 증명을 반영한 예진의 증명과 구체적 행동을 동반한 경험적 증명인 민화의 증명이었다. 주목할 것은 민화의 증명의 경우, 타당도에 대해서는 0.45로 가장 낮게 평가한 반면에 설명력은 상대적으로 매우 높은 것으로 평가했다는 점이다. 실제 현행 중학교 7-나 교과서에서 주어진 명제에 대해서 민화의 증명을 먼저 제시하여 삼각형의 내각이 총합이 180도임을 학생들이 경험해 보게 한 후, 형식적 증명인 예진의 증명을 제시하고 있다. 한편, 교과서에서 제시되지 않은 새로운 유형인 성모의 증명에 대해 상대적으로 많은 교사들이 그 타당성이나 설명력을 제대로 인식하지 못하고 있는 것으로 드러났다.

3) 증명 능력에 대한 분석

교사들에게 제시된 직접 증명하기 문항들에 대해서 분석한 결과, 문항에 따라 약간의 차이는 있지만 전반적으로 형식적 증명을 택하여 타당하게 증명할 수 있었다. 한편, 형식적 증명 외에 해설적 증명 방법을 사용한 경우는 도형 영역에서의 증명이었다.

<표 4> 수학 교사들의 타당도 평가와 설명력 평가 2

	예진의 증명 (형식적)	민준의 증명 (형식적, 오류)	민화의 증명 (경험적/구체적행동)	혜라의 증명 (경험적/구체적실증)	성모의 증명 (해설적/구체)
타당도 평균	1.82	0.94	0.45	1.06	0.91
표준편차	0.56	0.89	0.81	0.94	0.96
설명력 평균	1.58	0.32	1.46	0.95	0.79
표준편차	0.53	0.56	0.68	0.73	0.83

교사들의 전반적인 증명 능력 점수가 매우 높은 반면에, [그림 3]의 문항에 대해서는 그 의미를 제대로 이해하지 못하여 평균 점수가 낮았다. 즉, 문항에서 요구하는 것은 $\overline{AH} \times \overline{BH}$ 의 값을 가장 크게 만드는 현 $\overline{AB}$를 찾는 것으로써 보조선을 그어 닮은 삼각형의 성질을 이용하여 그 값이 항상 일정하다는 것을 증명하는 것임에도 불구하고, 가장 긴 현을 찾는 문제로 해석하거나 점 H를 이동하는 점으로 생각하여 현 중에서 가장 긴 현은 지름이고 지름에서 점 H를 산술과 기하평균 사이의 관계 또는 이차함수의 최대값을 구하는 식에서 $\overline{AH} \times \overline{BH}$ 의 값을 가장 크게 하는 위치로 점 H를 이동하는 것으로 해석하여 증명하기도 하였다.

3. 증명 스키마에 따른 수업 특징

설문지를 통한 조사와 면담 분석 결과 A교사는 경험적 증명 스키마의 소박한 경험적 증명 스키마와 분석적 증명 스키마의 통찰 증명 스키마를 가지고 있었고, J교사는 외부적 입증 증명 스키마의 의식적 증명 스키마와 분석적 증명 스키마의 통찰 증명 스키마를 가지고 있었다. 두 교사의 수업 모두 기본적으로 교과서 위주의 증명 방법을 중심으로 이루어졌다. 두 교사의 증명 스키마에 따른 수업의 특징을 증명의 의미에 대한 도입, 발문의 형태, 직접 증명하기의 지도, 학생들의 반응으로 나누어 비교 분석한 결과는 다음과 같다.

첫째, 증명의 의미에 대한 도입과 관련하여 두 교사 모두 교과서 전개에 따라 '정의'의 뜻을 간단히 설명하고 참임을 밝히는 것이 증명이라고 간단하게 소개하였다. 증명의 목적이나 중요성, 또는 증명의 역할에 대해서는 수업 중에 직접적으로 언급하지 않았다.

둘째, 발문의 형태와 관련하여 두 교사는 기본적으로 단답형의 질문을 많이 제시하였는데, 경험적 증명 스키마를 가진 A교사는 내용을 묻는 부분에 더 많은 초점을 두었고 의식적 증명 스키마를 가진 J교사는 증명의 내용 이해와 더불어 기호로 표현하는 내용에 더 많은 초점을 두었다.

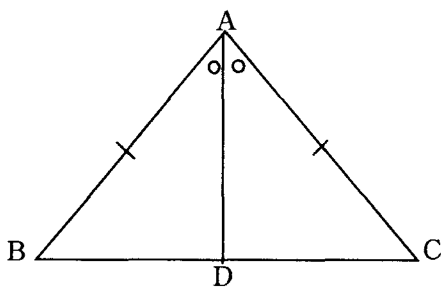
셋째, 직접 증명하기의 지도와 관련한 특징을 비교 분석해 보면 다음과 같다. 우선 두 교사 모두 비형식적이고 직관적인 증명을 중요하다고 생각하였으나 수업에서의 구현 방법에서는 차이가 있었다. 경험적 증명 스키마를 가진 A교사의 경우, 특수한 몇 가지 예를 대입하여 직접 해 보는 것을 강조하였고(예를 들어, [그림 5] 참조), 의식적 증명 스키마를 가진 J교사의 경우 직관적 활동을 연역적인 증명과 연계시키기 위해 '말로 하는 증명'이라

는 단계를 만들어 수업에 적극 활용하였다(예를 들어, [그림 6]참조). A교사의 경우 교과서에 제시되어 있는 내용은 연역적 증명을 그대로 활용하는 반면에 교사의 재량에 따라 새로운 내용이나 응용문제를 제시하는 경우는 경험적 증명 스키마의 영향으로 몇 가지 예를 가지고 증명을 시도하는 경향을 보였다.

$\sim p \rightarrow \sim q$
3의 배수가 아니면 6의 배수가 아니다.
(증명) 3의 배수가 아닌 수들은 어떤 것이 있을까?
1, 2, 4, 5, 7, 8, ...
이런 것들이 있다. 이 수들은 6의 배수가 아니다.

[그림 5] A교사의 증명 제시 방법

J교사: 가정과 결론할 때 요쪽에는 우리말로 증명하는 것을 말로 서술할 것이고, 이쪽에는 말로 서술한 것을 기호화하는 그런 두 가지를 할 거예요. 이등변 삼각형 이게 가정이었거든요. 여기에는 말로, 이쪽에다가는 수식으로 쓰는 거야. 일단 이등변삼각형을 그려 놓고요. (중략) '이등변 삼각형이다'라는 얘기는 이등변 삼각형의 정의를 가지고 얘기를 해야 되지? 이등변삼각형은 뭐가 같은 거야. 두 변의 길이가 같은 거죠. 삼각형 ABC에서 두 변 어떤 변이 같다고 표시되어 있어? 선분 AB와 뭐가 같다? 선분 AC가 같다($\triangle ABC$, $\overline{AB}=\overline{AC}$). 이게 바로 이등변 삼각형을 기호화 한 거예요. (중략)



명제 : 이등변삼각형의 두 밑각의 크기는 같다.	
<가정> 이등변 삼각형 <결론> 두 밑각의 크기는 같다. <증명> 꼭지각의 이등분선과 밑각이 나는 점을 D라고 하자. 두 변의 길이가 같다. 선분 AD는 공통	<가정> $\triangle ABC$에서, $\overline{AB}=\overline{AC}$ <결론> $\angle B=\angle C$ <증명> $\angle BAD=\angle CAD$ $\overline{AB}=\overline{AC}$ $\overline{AD}$: 공통 $\therefore$ $\triangle ABD \equiv \triangle ACD$(SAS합동) $\therefore$ $\angle B=\angle C$

[그림 6] J교사의 증명 제시 방법

또한 A교사는 증명 표현 양식을 중요시하여 간단하고 시각적으로 깔끔한 증명을 학생들에게 제시하는 것을 중요시하였다. 결과적으로 교과서에 제시된 증명을 기호 “⇒”를 사용하여 설명이 보다 함축된 간결한 증명으로 다시 정리하여 제시하는 경향을 가지고 있었다. J교사는 말로 하는 증명과 기호화된 증명을 동시에 제시하면서 완벽한 증명은 기호화된 증명이고 말로 하는 증명은 이해를 돕기 위해서 학생 수준에서 할 수 있는 증명임을 강조하였다. 직관적인 조작적 활동과 기호화된 형식적 연역적 증명의 연계를 통해 학생들의 증명 능력을 향상시키고자 노력하고 있었으나 수업을 통해 궁극적으로 지향하고 강조한 것은 기호화된 형식적 증명이었다.

마지막으로, 학생들의 반응과 관련하여 A교사의 학생들은 증명에 대해 매우 부정적으로 인식하고 있었던 반면에, J교사의 학생들은 증명을 어려워하면서도 도입 부분에서 조작적 활동인 종이 접기를 통해 직접 증명에서 쓰이는 성질이나 내용을 찾아보는 활동을 많이 경험해 봄으로 인해서 증명에 대한 부정적인 인식은 상대적으로 적었다. 특히 교과서 증명을 말로 하는 증명으로 번역하도록 하는 교사의 지도 방법에 따라 학생들은 어렵지만 증명을 이해하려고 시도하는 경향이 두드러졌다.

V. 결론 및 제언

첫째, 본 연구에서 수학 교사들은 대부분 증명의 의미를 가정에서 결론을 이끌어 내는 연역으로만 제한하고 증명의 역할 역시 설명이나 의사소통과 같은 다양한 측면을 고려하기보다는 입증과 논리적 사고력을 기르는 수단으로 인식하는 경향을 보였다. 또한 학교 수학에서 증명을 지도하는 과정이 절대적으로 중요하다고 인식하고 있었으나, 지도 방법은 제한되어 있었고, 이에 따라 학생들도 증명 수업을 상당히 어려워하고 있었다.

NCTM(2000)에서는 증명을 추론과 함께 하나의 과정 영역으로 강조하면서 하나의 학습 주제로 간단히 다룰 것이 아니라 수학적으로 사고하는 방법을 배우기 위한 필수 불가결한 것으로 다루어야 한다고 권고한다. 즉, 직접 증명하기와 증명 사용을 통해 수학 학습을 습관화할 필요가 있음을 강조하고 있다. 하지만, 본 연구 결과 대부분의 교사들은 교과서에서 제시된 증명을 이해해야 하는 일련의 학습 과제로만 다루고 지도 방법 역시 교과서의 전개 방식에 의존하고 있음을 알 수 있다. 우선 교사들이 증명의 다양한 의미와 역할, 그리고 지도 방법을 접할 수 있는 기회가 시급하다고 할 수 있다. 도형과 관련된 영역에서 증명을 국소적으로 다룰 것이 아니라 학습 방법적 측면에서 수학적 사고력을 기르기 위한 적절한 수단으로, 그리고 증명의 다양한 역할을 학생들이 학교 수학을 통해 경험하고 활용할 수 있는 방법을 적극적으로 모색해야 할 것이다.

둘째, 본 연구에서 수학 교사들은 다양한 증명을 읽고 선택하기, 제시된 증명을 분석하기, 직접 증명하기에서 공통적으로 기호화된 연역적·형식적 증명을 선호하였다. 따라서 자신의 경험에 비추어 수업 중에도 이와 같은 증명을 궁극적으로 강조하게 되고 학생들 역시 형식적 증명을 가장 이해하기 쉬울 것이라고 판단할 수 있다. 하지만, 많은 학생들은 형식적이고 추상적인 기호를 어려워하므로 연역적인 증명을 상대적으로 어려워할 수 있다. 또한 수학이라는 학문에서 증명의 목적은 확신시키는 것임에 비해서 학교 수학에서 증명의 목적은 학생의 이해를 자극하고 설명하는 것임을 감안해볼 때(Hersh, 1993), 주어진 명제에 대해서 형식적 증명뿐만 아니라 설명력이 높은 경험적 증명이나 해설적 증명을 적절히 병행하여 활용할

수 있어야 할 것이다.

셋째, 상대적으로 적은 교사의 수와 짧은 기간 동안의 수업 관찰이었음에도 불구하고, 본 연구에서의 두 교사의 증명 스키마의 본질적 특성이 증명 수업 방법에 직접적인 영향을 끼침을 암시하였다. 즉, 증명 스키마가 다양한 상황에서 여러 가지 방법으로 다르게 반영되기보다는 각 교사의 특징적인 증명 스키마로써 먼저 증명을 시도해 보는 경향이 강했다. 따라서 수학 교사들은 자신의 학습 과정을 통해서 고유하게 획득한 증명 스키마가 어떤 것인지 나름대로 분석하고 그 스키마가 수업에서 어떻게 반영되는지 그 장점과 단점을 반성적으로 검토해 봄으로써 증명 수업을 보다 상세하게 분석해 볼 필요가 있다. 또한 다양한 수업 상황에 맞는 증명 방법을 결정할 수 있는 교사의 증명 스키마를 형성할 수 있도록 증명에 대한 다양한 경험과 학습을 제공해야 할 것이다.

참고문헌

교육부 (1999). 중학교 교육과정 해설: 수학, 과학, 기술, 가정. 서울: 대한 교과서 주식회사.

나귀수 (1998). 증명의 본질과 지도 실제의 분석: 중학교 기하단원을 중심으로. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

류성림 (1998). 피아제의 균형화 모델에 의한 증명의 지도 방법 탐색. 한국교원대학교 대학원 박사학위 논문.

류희찬·조완영 (1999). 학생들의 정당화 유형과 탐구형 소프트웨어의 활용에 관한 연구. 수학교육학연구, 9(1), 245-261.

조완영·권성룡 (2001). 학교 수학에서의 '증명'. 수학교육학 연구, 11(2), 385-402.

Harel, G. & Sowder, L. (1998). Types of students' justifications. *Mathematics Teacher, 91*(8), 670-675.

Healy, L. & Hoyles, C. (2000). A study of proof conception in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(4), 396-428.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics, 24*(4), 389-399.

Hoyles, C. (1997). The curricular shaping of students' approaches to proof. *For the Learning of Mathematics, 17*(1), 7-16.

Knuth, E. J. (1999). *The nature of teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics.* Unpublished doctorial dissertation, University of Colorado.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: The Author.

박은조 · 방정숙

A Survey on Mathematics Teachers' Cognition of Proof

Park, Eun Joe[3] · Pang, JeongSuk[4]

Abstract

The purpose of this study is to survey mathematics teachers' cognition of proof along with their proof forms of expression and proof ability, and to explore the relationship between their proof scheme and teaching practice. This study shows that mathematics teachers tend to regard proof as a deduction from assumption to conclusion and that they prefer formal proof with mathematical symbols. Mathematics teachers also recognize that proof is an important area in school mathematics but they reveal poor understanding of teaching methods of proof. Teachers tend to depend on the proof style employed in mathematics textbooks. This study demonstrates that a proof scheme is a major factor of determining the teaching method of proof.

Key Words : Proof, Teachers' cognition, Proof forms of expression, Proof scheme, Teaching methods of proof.

3) Daihyun middle school (cj1209@naver.com)
4) Korea National University of Education (jeongsuk@knue.ac.kr)