한국학교수학회논문집 제 8 권, 제 1 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 8, Number 1, 89-100, March 2005

한국과 러시아의 수학교과서에 제시된 '삼각형의 합동'에 관련된 학습내용의 비교 연구

한인기[1)]

연구에서는 한국과 러시아의 수학교과서에 제시된 '삼각형의 합동'에 관련된 학습 내용을 분석하여, '삼각형의 합동'의 내용 기술 체계, 삼각형의 합동조건과 작도문제, 삼각형 합동조건의 정당화 방법 등을 비교하였다. 이를 통해, 우리나라 수학교과서의 질적 개선을 위한 의미로운 자료들을 제시하였다.

주요용어: 수학교과서, 삼각형의 결정조건, 삼각형의 합동조건, 작도문제, 교수학적 선택

I. 서론

수학과 7차 교육과정 해설서(교육부, 1999, p.69)에 보면, '평면이나 공간에서의 기하학적 도형에 관한 기본적인 사실의 이해는 중요하며, 연역적 추론 방법은 다른 어떤 영역보다도 기하 영역에서 적절하며 효과적이다. ...기하 문제는 그 해결 방법이 다양하기 때문에, 학생들로 하여금 탐구력과 창의적인 사고력 배양을 위한 좋은 소재'라고 기술하고 있다. 다시 말하면, 중학교의 기하교육은 도형의 성질 탐구, 연역적 추론 활동의 경험, 수학적 탐구 활동과 창의적인 사고 활동의 개발, 육성을 위해 중요한 역할을 한다.

중학교 기하교육의 내용은 삼각형의 합동, 삼각형의 성질, 사각형의 성질, 직선들의 평행, 삼각형의 닮음, 원의 성질, 피타고라스 정리, 다면체의 성질 등을 포함한다. 삼각형의 합동은 삼각형의 성질, 사각형의 성질, 원의 성질, 피타고라스 정리 등의 학습에 바탕이 되는 중요한 주제이다. 그러므로 삼각형의 합동에 대한 내용이 수학교과서에 어떤 방식으로 기술되며, 다른 학습 주제들과 어떤 관계를 통해 기술되었는가를 조사, 분석하는 것은 중학교의 성공적인 기하교육을 위해 중요한 기초자료를 제공할 수 있을 것이다.

수학교과서는 수학교과의 교육목표를 교사와 학생의 교수-학습 과정으로 구체화시키는 주된 매체이다. 수학을 학생들에게 가르치기 위해, 학문으로서의 수학적 지식을 가르칠 지식으로 교수학적 변환을 하게 되는데, 이러한 교수학적 변환의 구체적인 산물 중의 하나가 교과서이다. 우정호(2000, p.454)는 '가르친 내용이 목표로 하는 지식을 알게 하는데 실패하는 것은 가르치고자 하는 지식의 적절한 교수학적 변환에 실패했기 때문'이라고 주장하면서, 수

1) 경상대학교 사범대학 수학교육과 (inkiski@gsnu.ac.kr)

학적 지식의 교수학적 변환 및 수학교과서의 중요성을 역설하였다.

수학교과서에 관련된 최근의 국내 연구들은 크게 세 가지 방향으로 나눌 수 있는데, 첫째 수학교과서의 문제점, 구성 방향, 교과서 체계에 관련된 연구들(김홍기, 2001; 황혜정, 2000; 한인기, 2004 등), 둘째 수학교과서의 국제 비교 연구들(최택영 · 김인영, 1998; 박문환, 2002; 박경미 · 임재훈, 2002; 이용곤 · 신현용 · 서보억, 1995; 한인기 · 신현용 · 서보억, 1995 등), 셋째 수학교과서에서 교과 내용의 연계성, 사용되는 정의, 교과 내용의 분석 연구들(송순희 · 김윤영, 1998; 박경미, 2000; 조영미, 2002 등) 등으로 나눌 수 있다.

기술한 연구들은 수학교과서의 구성 및 체계, 교과 내용의 연계성, 교과 내용 등의 분석을 통해 수학 교수-학습의 실질적인 개선 방안을 모색하고 있다. 특히, 수학교과서의 국제 비교 연구는 우리의 수학교과서와 외국의 수학교과서를 비교하여, 수학교과서의 제시 내용, 교과서의 외적 및 내적인 틀에 대한 새로운 관점을 소개하였다는 측면에서 교육적 의미를 부여할 수 있을 것이다. 그러나, 우리의 수학교과서와 외국의 수학교과서 내용에 대한 심층적인 분석을 통해, 구체적인 학습주제의 도입 방법, 다른 주제들과의 관련성에 대한 새로운 관점을 제시한 연구는 드물다.

본 연구에서는 한국과 러시아의 수학교과서에 제시된 '삼각형의 합동'에 관련된 학습 내용을 분석하여, '삼각형의 합동'의 내용 기술 체계, 삼각형의 합동조건과 작도문제, 삼각형 합동조건의 정당화 방법 등을 비교할 것이다. 이를 통해, 우리나라 수학교과서의 질적 개선을 위한 의미로운 자료들을 제시할 수 있을 것으로 기대된다.

II. 한국과 러시아의 수학교과서에서 '삼각형의 합동'의 기술 체계

한국의 수학교과서들은 삼각형의 합동 및 합동조건을 수학 7-나에서 다루고 있으며, 삼각형의 합동을 활용한 삼각형의 성질 탐구(이등변삼각형의 성질, 직각삼각형의 성질, 삼각형의 외심과 내심)는 수학 8-나에서 다루고 있다. 반면에, 러시아의 기하교과서들은 삼각형의 합동 및 합동조건, 이들을 활용한 삼각형의 성질탐구를 7학년에서 함께 다루고 있다(러시아에서는 1~6학년까지 수학교과목의 명칭으로 '수학'을, 7~9학년에서는 '대수'와 '기하'를, 10~11학년에서는 '대수와 기초해석'과 '기하'를 사용하므로, 러시아의 수학교과서를 기하교과서라 부르기로 함).

한국의 수학교과서 7-나에서 삼각형의 합동 및 합동조건의 기술 체계를 살펴보자. 한국에서 출판되는 모든 수학교과서는 삼각형의 합동 및 합동조건에 관련된 학습내용 기술에 있어, 체계가 모두 동일하다. 이들 수학교과서에서는 ① 각의 이등분선 작도, 선분의 수직이등분선 작도, 주어진 각과 같은 각의 작도, 평행선의 작도 등을 수행하고, ② 세 변이 주어진 삼각형, 두 변과 끼인각이 주어진 삼각형, 한 변과 양 끝각이 주어진 삼각형을 작도한 다음 이들로부터 삼각형의 결정조건을 유도하고, ③ 포갬을 이용하여 삼각형의 합동을 정의하고, ④ 삼각형의 결정조건을 바탕으로 삼각형의 합동조건을 제시하였다. 이때, 주목할 것은 첫째, 작도문제의 해결이 먼저 제시되고 삼각형의 합동조건이 제시되며, 둘째 삼각형의 합동조건이 증명되지 않으며, 셋째 삼각형의 합동조건은 대응하는 세 변이 같은 경우, 대응하는 두 변과 끼인각이 같은 경우, 대응하는 한 변과 양 끝각이 같은 경우의 순서로 제시되어 있다는 점이다.

Atanacyan외 4인(1996)의 기하교과서에서는 ① 포갬을 이용하여 삼각형의 합동을 정의하고, ② 두 변과 끼인각이 서로 같은 두 삼각형의 합동(SAS 합동조건)을 증명하고, ③ 이등변삼각형의 두 밑각이 같다는 것, 이등변삼각형에서 중선, 각의 이등분선, 높이의 성질을 증명하고, ④ 한 변과 양 끝각이 서로 같은 두 삼각형의 합동(ASA 합동조건)을 증명하고, ⑤ 세 변이 서로 같은 두 삼각형의 합동(SSS 합동조건)을 증명하고, ⑥ 주어진 각과 같은 각의 작도, 각의 이등분선의 작도, 주어진 직선의 수선의 작도 등과 같은 작도문제의 해결을 다루었다.

Pogorelov(1996)의 기하교과서에서는 ① 두 삼각형의 합동을 상응하는 각들, 상응하는 변들이 같은 것으로 정의하고, ② '임의의 삼각형에 대해, 주어진 반직선과 반평면에 주어진 삼각형과 합동인 삼각형이 존재한다'는 공리를 제시하고, ③ SAS 합동조건을 증명하고, ④ ASA 합동조건을 증명하고, ⑤ 이등변삼각형의 두 밑각이 같다는 것, 이등변삼각형에서 중선, 각의 이등분선, 높이의 성질을 증명하고, ⑥ SSS 합동조건을 증명하고, ⑦ 세 변이 주어진 삼각형의 작도, 주어진 각과 같은 각의 작도, 각의 이등분선의 작도, 주어진 선분의 이등분, 주어진 직선의 수선의 작도 등과 같은 작도문제의 해결을 다루었다.

Sharygin(1997)의 기하교과서에서는 ① 포갬을 이용하여 삼각형의 합동을 정의하고, ② 축대칭(선대칭)을 이용하여 이등변삼각형의 두 밑각이 같다는 것, 이등변삼각형에서 중선, 각의 이등분선, 높이의 성질을 증명하고, ③ SAS 합동조건을 증명하고, ④ ASA 합동조건을 증명하고, ⑤ SSS 합동조건을 증명하고, ⑥ 주어진 직선의 수선의 작도, 주어진 삼각형과 합동인 삼각형의 작도, 주어진 각과 같은 각의 작도, 각의 이등분선의 작도, 주어진 직선과 평행인 직선의 작도, 원에 대한 접선의 작도 등과 같은 작도문제의 해결을 다루었다.

살펴본 바와 같이, 러시아의 기하교과서에서는 삼각형의 합동조건을 결정조건을 통해 유도하지 않고, 이들 세 합동조건을 엄밀하게 증명하였으며, 합동조건은 SAS 합동조건, ASA 합동조건, SSS 합동조건의 순서로 제시되었고, 이등변삼각형의 성질 탐구를 삼각형의 합동조건과 함께 다루었으며, 삼각형의 합동조건을 다룬 후에 작도문제의 해결을 제시하고 있다.

Ⅲ. 삼각형의 합동조건과 작도문제

한국의 수학교과서에서 작도문제는 독특한 역할, 즉 삼각형의 합동조건을 유도하기 위한 도구적인 역할을 한다. 한국의 모든 수학교과서에서는 삼각형의 합동조건을 도입하기 전에, 세 변이 주어진 삼각형, 두 변과 끼인각이 주어진 삼각형, 한 변과 양 끝각이 주어진 삼각형을 작도하는 방법이 제시되어 있다. 그리고, '삼각형이 결정되는 데는 위의 세 가지 결정조건 이외에도 여러 가지 변과 각의 크기를 알아도 되지만, 이 세 조건이 최소 조건이므로 특별히 결정조건이라 부른다(금종해외 3인, 2002, p.68)'고 삼각형의 결정조건을 정의한다. 그러나, 러시아의 수학교과서에서는 삼각형의 결정조건이라는 용어 자체가 사용되지 않는다.

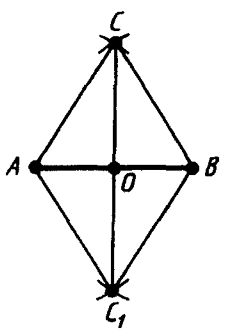
한편, 한국의 수학교과서에서는 삼각형의 결정조건이 정의되면, 이를 이용하여 삼각형의 합동조건이 유도된다. 예를 들어, 금종해외 3인(2002, p.72-73)의 수학교과서에서 삼각형의 합동조건을 유도하기 위해, '$\triangle ABC$와 $\triangle DEF$에 대하여 $\overline{AB}=\overline{DE}$, $\overline{BC}=\overline{EF}$, $\overline{AC}=\overline{DF}$, $\angle A=\angle D$, $\angle B=\angle E$, $\angle C=\angle F$이면, 이 두 삼각형은 완전히 포개어지므로 합동이 된다. 그러나 위의 6가지 조건 중에서 몇 가지만 알아도 두 삼각형이 합동이 됨을 알 수 있다. 즉,

삼각형의 합동을 조사할 때, 앞에서 배운 삼각형의 결정조건을 이용하면 세 변의 길이와 세 각의 크기를 모두 조사하지 않아도 두 삼각형이 합동임을 알 수 있다. ...삼각형의 결정조건으로부터 다음과 같은 삼각형의 합동조건을 알 수 있다'고 기술하고 있다. 물론, 한국의 다른 수학교과서들도 같은 접근 방법을 취하고 있다.

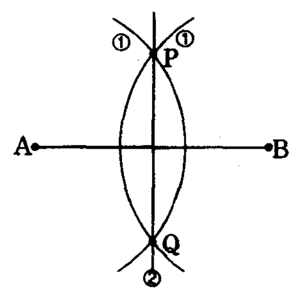
러시아의 기하교과서에서는 삼각형의 합동을 먼저 다루고 작도문제를 해결하며, 삼각형의 합동조건을 이용하여 작도방법의 타당성을 증명한다. Pogorelov(1996, p.72)의 기하교과서에 제시된 '주어진 선분을 이등분하여라'는 작도문제의 해결을 살펴보자.

'AB를 주어진 선분이라 하자(그림 1). 점 A, B를 중심으로 반지름이 AB인 원을 작도하자. 이들 원의 교점을 C, C_1이라 하자. 이들은 직선 AB에 대해 서로 다른 반평면에 속한다. 선분 CC_1은 직선 AB와 어떤 점 O에서 교차한다. 이 점이 선분 AB의 중점이다.

실제로, 삼각형 CAC_1과 CBC_1은 삼각형의 세 번째 합동조건에 의해 합동이다. 이로부터, 각 ACO와 BCO는 같다. 삼각형 ACO와 BCO는 삼각형의 첫 번째 합동조건에 의해 합동이다. 이들 삼각형에서 AO, BO는 대응하는 변들이므로, 이들은 서로 같다. 결국, 점 O는 선분 AB의 중점이다.'



<그림 1>



<그림 2>

살펴본 바와 같이, Pogorelov의 기하교과서에서는 선분의 중점에 대한 작도 순서 뿐만 아니라, 작도의 타당성도 증명되어 있다. 그러나, 한국의 수학교과서에서는 작도순서만 제시되어 있다. 한 가지 예로, 박규홍외 7인(2000, p.51)의 수학교과서에 제시된 '주어진 $\overline{AB}$의 수직이등분선을 작도하여라'는 문제의 풀이를 살펴보자.

'① 두 점 A, B를 각각 중심으로 하여 반지름의 길이가 같은 두 원을 그려서 그 교점을 P, Q라 한다(그림 2). ② 두 점 P, Q를 지나는 $\overleftrightarrow{PQ}$를 그으면 $\overleftrightarrow{PQ}$가 구하는 $\overline{AB}$의 수직이등분선이다.'

한국의 수학교과서에서는 얻어진 작도과정의 타당성에 대한 어떤 논의도 제시되지 않았으며, 결국 학생들은 수학교과서나 수학교사의 권위에 전적으로 의존하여 작도과정의 타당성을 정당화의 절차 없이 수용하게 된다.

일반적으로, 작도문제는 분석-작도-증명-탐구의 과정을 거쳐 해결된다(한인기, 1999; Horblit & Nielsen, 1947). 수학교과서는 대부분 발생적으로 기술되기보다는 논리적으로 기술된다. 그리하여, 작도문제의 해결을 위한 탐색수행 과정인 '분석'은 수학교과서의 기술에서 대부분 생략되며, 다른 해의 존재를 조사하는 '탐구' 단계는 꼭 필요한 경우를 제외하고는

생략된다. 그러나, 작도과정에 대한 타당성을 확인하는 '증명' 단계의 생략은 수학교과의 논리성에 비추어 납득되기 어려우며, 학생에게는 '과연 얻어진 작도가 문제의 조건을 만족시키는 타당한 것인가?'라는 의문을 남길 수도 있다.

실제로, '선분의 수직이등분선' 작도문제에서 얻어진 해의 타당성을 보이려면, 삼각형의 합동조건을 이용해야 한다. 그러나, 한국의 수학교과서에서는 삼각형의 합동조건이 작도문제를 다룬 후에 제시되므로, 삼각형의 합동조건을 작도문제의 해결과정에 사용할 수 없다. 결국, 한국의 수학교과서에서는 삼각형의 합동조건을 증명없이 삼각형의 결정조건(작도)를 통해 도입하는 교수학적 선택으로 인해, 작도문제에 대한 충분하고 타당한 풀이를 수학교과서에 제시하지 못하는 단점을 지니게 되었다. 이것은 또한 수학 8-나, 수학 9-나의 기하학 학습에서 작도문제의 활용 가능성을 제한한다. 그 결과, 한국의 수학교과서에서는 수학 8-나, 수학 9-나에서의 도형의 성질 탐구에 작도문제가 전혀 활용되지 못하고 있다.

반면에, 러시아의 기하교과서에서는 삼각형, 사각형, 다각형, 평행선, 닮음, 원 등의 주제를 다루면서 작도문제를 연습문제로써 체계적으로 제시하면서 활용하고 있다. 예를 들어, Atanacyan외 4인(1996, pp.103-104)의 기하교과서에서 소단원 '평행사변형과 사다리꼴'의 연습문제에 다음과 같은 작도문제가 제시되어 있다.

1. 다음 조건이 주어진 평행사변형을 작도하여라.
(1) 인접한 두 변과 그 끼인각
(2) 두 대각선과 이들 사이의 끼인각
(3) 인접한 두 변과 한 대각선
2. 한 직선에 속하지 않은 세 점 A, B, C가 주어졌다. 주어진 세 점을 각각 꼭지점으로 가지는 평행사변형을 작도하여라. 그러한 평행사변형은 몇 개나 작도할 수 있는가?
3. 예각 hk와 두 선분 P_1Q_1, P_2Q_2가 주어졌다. 평행한 직선 AB와 DC사이의 거리가 P_1Q_1이고, $AB=P_2Q_2$, $\angle A=\angle hk$을 만족하는 평행사변형 ABCD를 작도하여라.
4. 주어진 선분 AB를 n등분하여라.
5. 다음 조건이 주어진 등변사다리꼴 ABCD를 작도하여라.
(1) 밑변 AD, 각 A, 옆변 AB
(2) 밑변 BC, 옆변 AB, 대각선 BD
6. 두 밑변과 밑변에 직교하는 옆변 AD가 주어진 직각사다리꼴 ABCD를 작도하여라.

기하교육에서 작도문제의 교수학적 활용가능성 및 의의에 대해서는 국내에서도 한인기(1999, 2000a, 2000b), 정창현(1992), 장혜원(1997) 등의 연구를 통해 폭넓은 논의된 바가 있으며, 역사적으로도 작도문제는 기하학의 발전에서 중요한 역할을 하였다. 그러므로, 합동조건의 직관적 도입을 위해 작도문제의 활용가능성을 제한하는 현재의 교수학적 선택에 대해서는 좀더 진지한 논의가 이루어져야 할 것이다.

IV. 한국과 러시아의 수학교과서에서 삼각형 합동조건의 정당화

1. 한국의 수학교과서

한국의 수학교과서에서 삼각형의 합동조건은 삼각형의 결정조건에 근거하여 정당화된다.

삼각형의 결정조건은 세 변이 주어진 삼각형의 작도, 두 변과 끼인각이 주어진 삼각형의 작도, 한 변과 양 끝각이 주어진 삼각형의 작도로부터 유도된다. 이제, 박규홍외 7인(2000, pp.53-55)의 수학교과서를 중심으로 삼각형의 결정조건에 상응하는 삼각형의 작도 방법을 살펴보자.

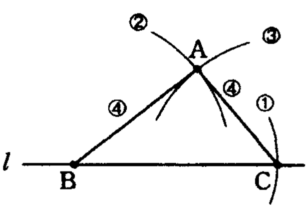
작도 1. 세 변이 주어진 삼각형의 작도(그림 3)

(1) 먼저 직선 l을 긋고, 그 위에 길이가 a인 $\overline{BC}$를 잡는다.

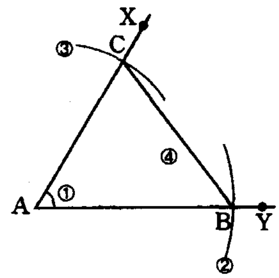
(2) 점 B를 중심으로, c를 반지름으로 하는 원을 그린다.

(3) 점 C를 중심으로, b를 반지름으로 하는 원을 그려서 (2)의 원과 만나는 점을 A라 한다.

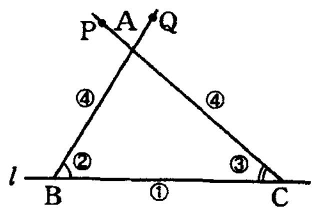
(4) 점 A와 B, 점 A와 C를 이으면, △ABC가 그려진다.



<그림 3>



<그림 4>



<그림 5>

작도 2. 두 변과 끼인각이 주어진 삼각형의 작도(그림 4)

(1) ∠A와 크기가 같은 ∠XAY를 작도한다.

(2) 점 A를 중심으로 하고 반지름이 c인 원을 그려서, 반직선 AY와의 교점을 B로 한다.

(3) 점 A를 중심으로 하고 반지름이 b인 원을 그려서, 반직선 AX와의 교점을 C로 한다.

(4) 점 B와 C를 이으면 △ABC가 그려진다.

작도 3. 한 변과 끼인각이 주어진 삼각형의 작도(그림 5)

(1) 한 직선 l을 긋고, 그 위에 길이가 a인 선분 BC를 잡는다.

(2) 반직선 BC를 한 변으로 하는 ∠B를 작도하고, 그 각을 ∠CBQ라고 한다.

(3) 반직선 CB를 한 변으로 하는 ∠C를 작도하고, 그 각을 ∠BCP라고 한다.

(4) 반직선 BQ와 CP의 교점을 A라 하면, △ABC가 그려진다.

한국의 모든 수학교과서에는 기술한 것과 같은 작도 방법이 제시되어 있지만, 이들 작도의 타당성에 대한 정당화를 제시하고 있는 수학교과서는 없다. 이들 삼각형의 작도에는 '기본작도'라 불리는 각의 이등분선 작도, 선분의 수직이등분선 작도, 주어진 각과 같은 각의 작도 등이 사용되지만, 이들 기본작도의 타당성 또한 제시되어 있지 않다.

한편, 삼각형들의 작도 순서를 보면, 한국의 수학교과서에서는 우선 세 변이 주어진 삼각형을 작도하고, 두 변과 끼인각이 주어진 삼각형, 한 변과 끼인각이 주어진 삼각형의 순서로 작도되어 있다. 이에 따라, 삼각형의 결정조건은 세 변의 길이가 주어지는 경우, 두 변과 끼

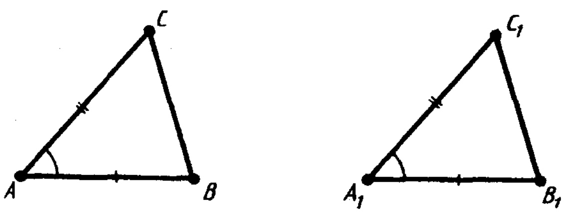
인각이 주어지는 경우, 한 변과 양 끝각이 주어지는 경우의 순서로 기술되며, 합동조건도 SSS, SAS, ASA의 순서로 제시되어 있다.

2. 러시아의 기하교과서

러시아의 모든 기하교과서에서 삼각형의 합동조건은 엄밀한 증명을 통해 정당화되며, 증명방법은 교과서마다 약간씩 다르다. 본 연구에서는 Pogorelov(1996, pp.32-33, p.35, p.40)의 기하교과서에 제시된 증명방법을 살펴보자.

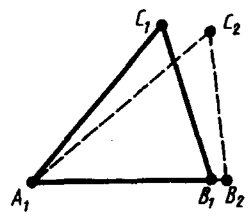
정리 1. 한 삼각형의 두 변, 이들의 끼인각이 각각 다른 삼각형의 두 변, 이들의 끼인각과 같으면, 이들 삼각형은 합동이다.

증명. 삼각형 ABC와 $A_1B_1C_1$에서 $\angle A = \angle A_1$, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$이라 하자(그림 6). 이제, 삼각형들의 합동을 증명하자.

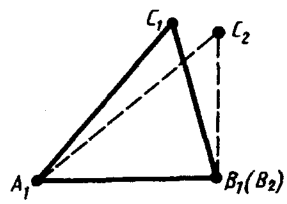


<그림 6>

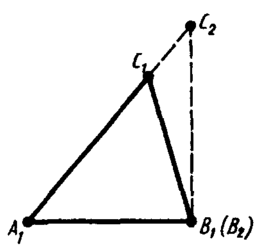
꼭지점 B_2는 반직선 A_1B_1에 속하며 꼭지점 C_2는 직선 A_1B_1에 대해 꼭지점 C_1과 같은 반평면에 속한다. 이제, 삼각형 $A_1B_2C_2$가 삼각형 ABC와 합동이라 하자(그림 7a).



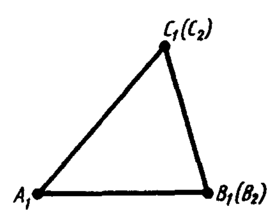
<그림 7a>



<그림 7b>



<그림 7c>



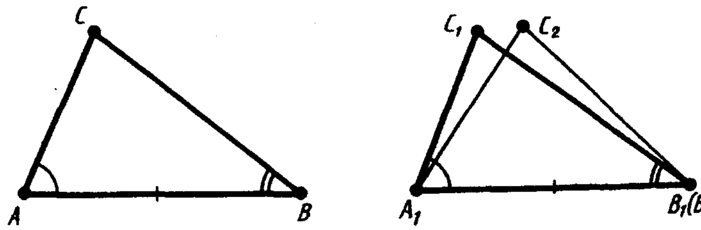
<그림 7d>

$A_1B_1 = A_1B_2$이므로, 꼭지점 B_2는 꼭지점 B_1과 일치한다(그림 7b). $\angle B_1A_1C_1 = \angle B_2A_1C_2$이므로, 반직선 A_1C_2는 반직선 A_1C_1과 일치한다(그림 7c). $A_1C_1 = A_1C_2$이므로, 꼭지점 C_2는 꼭지점 C_1과 일치한다(그림 7d).

결국, 삼각형 $A_1B_1C_1$은 삼각형 ABC와 합동인 삼각형 $A_1B_2C_2$와 일치하며, 정리가 증명된다.

정리 2. 한 삼각형의 한 변, 변의 양 끝각이 각각 다른 삼각형의 한 변, 변의 양 끝각과 같으면, 이들 삼각형은 합동이다.

증명. 삼각형 ABC와 $A_1B_1C_1$에서 $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$이라 하자(그림 8). 이제, 이들의 합동을 증명하자.



<그림 8>

꼭지점 B_2는 반직선 A_1B_1에 속하며 꼭지점 C_2는 직선 A_1B_1에 대해 꼭지점 C_1과 같은 반평면에 속한다. 이제, 삼각형 $A_1B_2C_2$가 삼각형 ABC와 합동이라 하자.

$A_1B_2 = A_1B_1$이므로, 꼭지점 B_2는 꼭지점 B_1과 일치한다. $\angle B_1A_1C_2 = \angle B_1A_1C_1$이고 $\angle A_1B_1C_2 = \angle A_1B_1C_1$이므로, 반직선 A_1C_2는 반직선 A_1C_1과 일치하고 반직선 B_1C_2는 반직선 B_1C_1과 일치한다. 이로부터, 꼭지점 C_2는 꼭지점 C_1과 일치한다.

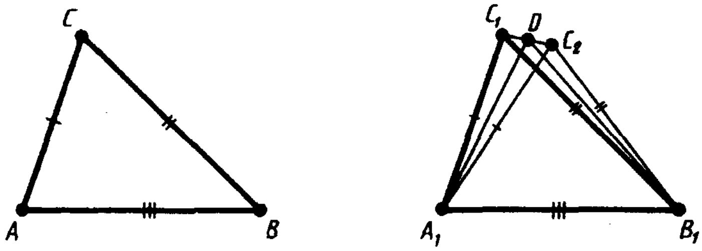
결국, 삼각형 $A_1B_1C_1$은 삼각형 ABC와 합동인 삼각형 $A_1B_2C_2$와 일치한다. 이로부터, 정리가 증명된다.

정리 3. 한 삼각형의 세 변이 각각 다른 삼각형의 세 변과 같으면, 이들 삼각형은 합동이다.

증명. 삼각형 ABC와 $A_1B_1C_1$에서 $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$이라 하자(그림 9). 이제, 이들 삼각형이 합동임을 보이자.

가령, 이들 삼각형이 합동이 아니라고 가정하자. 그러면, $\angle A \neq \angle A_1$, $\angle B \neq \angle B_1$, $\angle C \neq \angle C_1$이다. 그렇지 않으면, 이들 삼각형은 첫 번째 합동조건에 의해 합동이 된다.

꼭지점 C_2가 직선 A_1B_1에 대해 꼭지점 C_1과 같은 반평면에 속하는 삼각형 $A_1B_1C_2$가 삼각형 ABC와 합동이라 하자(그림 9).



<그림 9>

이제, 선분 C_1C_2의 중점을 D라 하자. 삼각형 $A_1C_1C_2$, $B_1C_1C_2$는 공통의 밑변 C_1C_2를 가지는 이등변삼각형이다. 그러므로, 이들의 중선 A_1D, B_1D는 높이가 된다. 결국, 직선 A_1D, B_1D는 직선 C_1C_2와 직교한다. 점 A_1, B_1, D가 한 직선에 속하지 않으므로, 직선 A_1D, B_1D는 일치하지 않는다. 그러나, 점 D를 지나 직선 C_1C_2에 직교하는 직선은 오직 하나만을 그을 수 있다. 이로부터, 모순이 발생하며, 정리가 증명된다.

정리 1, 정리 2의 증명과는 달리, 정리 3의 증명에서는 이등변삼각형의 중선, 높이의 성질이 사용된다. Pogorelov의 기하교과서에서는 정리 1, 정리 2를 다룬 후에, 이들 정리를 이용하여 이등변삼각형의 두 밑각이 같다는 정리와 정리의 역, 이등변삼각형에서 밑변에 그은 중선, 높이, 이등분선이 일치한다는 정리를 증명하였다. 결국, 정리 1, 정리 2와 병행하여 이등변삼각형의 성질을 다룬 결과, Pogorelov의 기하교과서에서는 정리 3에 대한 엄밀한 증명을 위한 어떤 논리적 문제도 발생되지 않았다. 한편, SSS 합동조건의 증명에서 다른 합동조건이 간접적으로 사용되므로, 러시아의 기하교과서에서는 SSS 합동조건이 가장 나중에 제시된다.

IV. 결론

본 연구에서는 한국과 러시아의 수학교과서에 제시된 '삼각형의 합동'에 관련된 학습 내용을 분석하여, '삼각형의 합동'의 내용 기술 체계, 삼각형의 합동조건과 작도문제, 삼각형 합동조건의 정당화 방법 등을 비교하였다.

한국과 러시아의 수학교과서에 제시된 '삼각형의 합동'의 내용의 기술을 살펴보자. 한국의 수학교과서에서는 삼각형의 합동 및 합동조건을 수학 7-나에서 다루고 있으며, 이것을 활용한 도형의 성질 탐구는 수학 8-나에서 다루고 있다. 반면에, 러시아의 기하교과서는 삼각형의 합동 및 합동조건, 이들을 활용한 삼각형의 성질 탐구를 7학년에서 함께 다루고 있다.

한국의 수학교과서에 제시된 삼각형의 합동에 관련된 학습내용 기술의 체계를 살펴보자. 우선, 작도문제의 해결이 먼저 제시되고 삼각형의 합동조건이 제시되며, 삼각형의 합동조건이 증명되지 않으며, 삼각형의 합동조건은 SSS 합동조건, SAS 합동조건, ASA 합동조건의 순서로 제시되어 있다. 한편, 러시아의 기하교과서에서는 삼각형의 합동조건을 결정조건을

통해 유도하지 않고, 이들 합동조건을 엄밀하게 증명하였으며, 합동조건은 SAS 합동조건, ASA 합동조건, SSS 합동조건의 순서로 제시되었고, 이등변삼각형의 성질 탐구를 삼각형의 합동조건과 함께 다루었으며, 삼각형의 합동조건을 다룬 후에 작도문제의 해결을 제시하고 있다.

삼각형의 합동조건과 작도문제의 관계를 살펴보자. 한국의 수학교과서에서 작도문제는 삼각형의 합동조건을 유도하기 위한 도구의 역할을 한다. 한국의 수학교과서에서는 삼각형의 작도를 통해 삼각형의 결정조건을 정의하고, 이를 이용하여 삼각형의 합동조건을 유도하는 교수학적 선택이 이루어졌다. 이러한 교수학적 선택의 결과, 한국의 수학교과서에서는 제시된 작도과정의 타당성에 대한 논리적 근거를 제시할 수 없었으며, 수학 8-나와 수학 9-나에서의 도형의 성질 탐구에 작도문제가 활용되지 못하였다. 한편, 러시아의 기하교과서에서는 삼각형의 합동을 먼저 다루고 작도문제를 해결하며, 삼각형의 합동조건을 이용하여 작도방법의 타당성을 증명한다. 그 결과, 러시아의 기하교과서에서는 삼각형, 사각형, 다각형, 평행선, 닮음, 원 등의 주제를 다루면서 작도문제가 연습문제로 체계적으로 제시되고 있었다.

이제, 한국과 러시아의 수학교과서에서 삼각형 합동조건의 정당화 방법을 살펴보자. 한국의 수학교과서에서 삼각형의 합동조건은 삼각형의 결정조건에 근거하여 정당화된다. 한편, 삼각형의 결정조건은 '기본작도'라 불리는 각의 이등분선 작도, 선분의 수직이등분선 작도, 주어진 각과 같은 각의 작도 등에 근거하지만, 이들 기본작도의 타당성이 제시되어 있지 않다. 한편, 러시아의 기하교과서에서 삼각형의 합동조건은 엄밀한 증명을 통해 정당화되며, 증명방법은 교과서마다 약간씩 다르게 제시되어 있다. 본 연구에서는 Pogorelov의 기하교과서에 제시된 삼각형의 합동조건 증명방법을 제시하였다.

참고문헌

강행고 외 9인 (2000). 수학 7-나. 서울: 중앙교육진흥연구소.

교육부 (1999). 수학과 교육과정 해설(III). 서울: 대한교과서주식회사.

금종해, 이만근, 이미라, 김영주 (2000). 수학 7-나. 서울: 고려출판.

김홍기 (2001). 제 7차 교육과정과 교과서의 문제점, 수학교육, 40권 1호, 139-159.

박경미 (2000). 중학교 수학 교육과정 및 교과서 내용의 양과 난이도 수준 분석, 수학교육학연구, 10권 1호, 35-56.

박경미, 임재훈 (2002). 한국, 일본과 미국, 영국의 수학 교과서 비교, 학교수학, 4권 2호, 317-331.

박규홍외 7인 (2000). 수학 7-나. 서울: 두레교육.

박문환 (2002). 교과서에 나타난 '수학적 귀납법'에 대한 남・북한 비교, 수학교육학연구, 12권 2호, 181-192.

송순희, 김윤영 (1998). 초・중・고 수학교과서 해석 영역의 연계성에 관한 연구, 수학교육, 37권 1호, 87-100.

우정호 (2000). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울: 서울대출판부.

이용곤, 신현용, 서보억 (1995). 한국과 러시아의 수학교과서 비교 분석 연구 I, 수학교육, 34권 1호, 107-118.

장혜원 (1997). 중학교 기하 영역 중 작도 단원에 관한 고찰, 대한수학교육학회논문집, 7권 2

號, 327-336.
정창현 (1992). 평면 도형의 작도에 관한 고찰, 수학교육, 31권 4호, 83-92.
조영미 (2002). 수학 교과서에서 사용하는 정의의 특성 분석과 수준 탐색-기하 영역을 중심으로, 학교수학, 4권 1호, 15-28.
최택영, 김인영 (1998). 남북한 수학 교과서 비교, 수학교육 37권 1호, 35-54.
한인기 (2000a). 분석적 활동의 활성화를 위한 작도 문제의 활용, 수학교육논문집, 10집, 189-200.
한인기 (2000b). 작도 활동을 통한 기하학 탐구. 서울: 한국교육개발원(수탁연구 CR2000-15-13).
한인기 (2004). 학습자의 개인차를 고려한 수학교과서에 관한 연구-구세프의 실험 교과서를 중심으로-, 한국학교수학회논문집, 7권 1호, 37-48.
한인기(1999). 작도 문제 해결 방법, 수학교육논문집, 9집, 153-164.
한인기, 신현용, 서보억 (1995). 한국과 러시아의 수학교과서 비교 분석 연구 II, 수학교육, 34권 1호, 119-130.
황혜정 (2000). 수학과 2종 교과서 개발 및 검정 기준에 관한 소고, 수학교육 39권 1호, 1-10.
Atanacyan L.S., Butuzov V.F., Kadomtsev S.B., Poznyak E.G. & Yudina I.I. (1996). *Geometriya: Ucheb.* dlya 7-11 kl. Moskva: Prosveshenie.
Horblit M. & Nielsen K.L. (1947). Plane Geometry problems. New York: Barnes & Noble.
Pogorelov A.V. (1996). *Geometriya: Ucheb.* dlya 7-11 kl. Sankt-Peterburg: Hardford.
Sharygin I.F. (1997). *Geometriya.* 7-9 kl. Moskva: Drofa.

한인기

A Comparative Study on Contents Related with 'Congruence of Triangles' of Korean and Russian Mathematics Textbooks

Han, In-Ki[2)]

Abstract

This study is to compare contents of mathematics textbooks of Korea and Russia laying stress on topic 'congruence of triangles'. We analyze and compare contents description system, relation between congruent conditions of triangles and construction problem, and justification methods of congruent conditions of triangles in Korean and Russian mathematics textbooks.

Key words: Mathematics textbook, Congruence of triangles, Construction problem, Didactical selection

2) Gyeongsang National University, Dep. of Math. Ed. (inkiski@gsnu.ac.kr)