한국수학사학회지 제18권 제1호(2005년 2월), 85-92

조화사상의 최근 발달에 대하여

강남대학교 응용수학전공 **박기성**
parkks@kns.kangnam.ac.kr

본 연구는 변분법과 조화사상 사이에 잘 알려진 내용을 개관하고, 조화사상의 성질 및 발전 과정을 정리하고, 구면 위의 라플라스 작용소의 기본 성질을 정리하고, 구면 사이의 고유함수 사상을 구성하기 위하여 스펙트럼과 고유함수를 계산하였다.

주제어 : 조화사상, 라플라스 작용소

0. 서론

1760년 라그랑주(Lagrange)는 극소곡면의 방정식을 유도하고 1762년에 부정적분 공식의 극대·극소를 결정하는 새로운 방법의 시도를 발표하였다. 그리고 100여년 후, 플래토(Plateau)는 비누막에 관한 재미있는 실험을 보고하였다. 이것에 대응하는 수학 문제는 "3차원 공간내의 임의의 조르당(Jordan) 곡선은 적어도 하나의 극소곡면으로 덮어진다."라는 것이 '플래토 문제'이다. 조화사상의 이론은 19세기 플래토 문제에서 시작되었으며, 이 이론은 수학의 여러 분야에 응용되어 기하학의 중요한 이론의 하나가 되었다. 자연계에 공통으로 나타나는 하나의 원리인 변분법으로 여러 종류의 사상 중에서 가장 자연스러운 조화사상(비선형 σ-모델)과 그와 관련된 여러 내용을 연구하였다. 자연계에는 4종류의 힘, 즉 중력, 전자기력, 약한 상호작용, 강한 상호작용이 존재하여 이들 4개의 힘을 통일하고자 하는 연구가 활발히 진행되고 있다. 중력은 아인슈타인의 상대성이론, 전자기력은 맥스웰이론으로 기술되고 있다. 이 4개의 힘은 넓은 의미의 게이지(Gauge)이론이다. 최근 (초)현이론, 공형장이론(위상적) 양자장의 이론이 여러 분야와 관련되어 수학적 관심을 모으고 있다.

본 논문에서는 변분법에서 시작하여 조화사상의 탄생 배경을 조사하고 발전 과정을 알아보았으며 구면 사이의 고유함수사상을 정의하여 Δ_{S^m}의 스펙트럼(spectrum)의 계산을 하고 구면 사이의 새로운 고유함수사상을 구성하여 보았다.

1. 조화사상의 역사적 배경

뉴턴(Newton)과 라이프니츠(Leibniz) 등은 자연의 법칙이 미분방정식으로 기술됨을 인식하게 되었고, 특히 뉴턴의 「만유인력의 법칙」은 미분적분학 탄생의 기원이 되었다. 18세기 중반에 오일러(Euler)와 라그랑주는 뉴턴이 도입한 미분방정식이 최대·최소 문제를 취급함으로써 자연스럽게 유도됨을 발견하였다. 이것이 변분법의 시작이며 해석학의 기원이다. 그 후 코시(Cauchy), 바이어슈트라스(Weierstrass) 등에 의하여 미분적분학의 기초가 확립되었다.

19세기 중반에는 리만(Rimann) 등이 「굽은 공간」과 「리만 계량」의 개념을 발견하여 「굽은 공간 위의 미분적분학」 즉 미분기하학이 탄생되었고 20세기 초 아인슈타인(Einstein)의 상대성 이론은 리만 기하학의 관심을 한층 높여 미분기하학은 급속히 발전하였다.

한편, 기하학은 측지학이 그 기원이고 측지선은 최단선을 의미하는데, 이것이 「곡선 전체의 공간 중에서 길이가 가장 짧은 것」이라는 변분법의 전형적인 예이다. 곡선 전체는 대단히 큰 (무한차원) 공간이며 원래 뉴턴, 오일러 등에 의해서 시작된 미분적분학이나 변분법에는 처음부터 무한차원공간에서의 미분적분학의 연구방향이 있었다.

변분법이 추구하는 방법 중에는 「곡선의 길이에 해당하는 적당한 함수를 생각하고 그의 최소값을 갖는 위치를 구하면 된다.」라는 이론으로 여러 종류의 물리법칙이 기술된다. 모스(Morse)는 이와 같은 측지선의 연구를 하여 굽은 공간 위의 함수의 임계점의 연구를 시작하였다. 그러나 변분법에서 여러 문제를 조직적이고 통일적으로 취급한 것은 양자역학의 흐름이기도 한 무한차원공간을 생각해야만 했다. 곡선전체가 이루는 공간을 잘 취급하자면 굽은 무한차원공간의 개념(무한차원 다양체)이 필요하였다.

1950년대 후반에서 1960년대 전반에 걸쳐 일스(Eells)와 스메일(Smale) 등의 연구로 사상전체의 공간이 무한차원 다양체가 되고 그 위의 함수의 미분, 임계점의 일반론이 성립되었다. 또 일스와 삼손(Sampson)은 에너지(작용적분)의 임계점으로 조화사상의 개념을 확립하였다.

조화사상의 성립에는 19세기 플래토가 제기한 문제가 또 하나의 계기가 되었다. 공간 내에 주어진 폐곡선에 따라 비누막이 형성된 것, 다시 말하면 주어진 폐곡선을 경계로 하는 최소 표면적의 곡면을 구하는 변분문제이다. 이 문제는 1930~31년 라도(Rado)와 더글러스(Douglas)에 의해서 독립적으로 해결하였다. 또 모레이(Morrey)는 1948년에 일반 리만 공간 내에서 플래토 문제에 대한 존재정리를 증명하였다. 이들의 결과는 경계조건을 갖는 영역의 차원이 2차원인 경우의 조화사상의 이론이다.

현재 조화사상의 이론은 여러 분야에 응용되어 아인슈타인 계량(중력이론), 게이지 이론(Yang-Mills 접속)과 함께 기하학의 중요한 이론의 하나로 여러 방향에 응용되고

있다.

그런데 위의 파레스(Palais), 스메일의 일반론으로는 조화사상의 이론은 변분법에 나타나는 여러가지 문제에 적용하기에는 매우 곤란한 점이 있었다. 이것을 해결하기 위해서는 현재 파레스-스메일의 조건(c)로 불리는 조건이 필요하였다.

우렌벡(Uhlenbeck)은 1981년 일스-삼손의 조화사상의 별증명에 성공하고 경계가 없는 경우 플래토 문제나 비슷한 영역이 2차원인 경우의 조화사상의 존재를 증명하였다. 그러나 영역의 차원이 3차원 이상의 존재 문제는 아직도 미해결이다.

2. 조화사상의 개요

리만 다양체 사이의 조화사상의 이론은 플래토 문제의 연구를 출발점으로 하고 있다. 주어진 사상이 조화사상으로 변형가능한가 아닌가 하는 것은 이 이론의 기본적 문제이며 대역변분법의 문제와 깊은 관련이 있다.

(M, g)와 (N, h)를 각 리만계량 $g = \sum g_{ij}\, dx^i\, dx^j$ 및 $h = h_{\alpha\beta}\, dg_\alpha\, dy_\beta$를 갖는 리만 다양체라 하자 C^1-급의 사상 $f: M \to N$에 대하여 다음 적분값을 f의 에너지라 부른다.

$$E(f) = \frac{1}{2}\int_M |df(x)|^2 dx$$

(M은 콤팩트라고 하자) 여기서 $|df(x)|$는 $x \in M$에서 f의 미분사상 df_x : Tf_x: $T_x(M) \to T_{f(x)}(N)$의 힐베르트-슈미트(Hilbert-Schmidt) 노름이고 dx는 리만계량 g에서 M 위에 자연히 정의되는 르베그(Lebesgue) 측도이다. 사상의 에너지 $E(f)$는 함수에 대한 고전적인 디리클레(Dirichlet) 적분의 확장이다. 피적분 함수 $e(f)(x) = |df(x)|^2$은 f의 에너지 밀도라 부른다.

에너지 범함수 $E(f)$의 오일러-라그랑주의 미분방정식은 사상 f에 따른 벡터장, 즉 N의 접벡터속 $T(N)$에서 f에 의한 M 위에 유도되는 벡터속 $f^*T(N)$의 단면 $\tau(f)$를 정의한다.

실제 $f_0 = f$인 임의의 미분가능한 사상족 f_t에 대하여 $E(f)$의 제1변분은 다음과 같이 된다.

$$\frac{d}{dt} E(f_t)\Big|_{t=0} = -\int_M \left\langle \tau(f), \frac{\partial f_t}{\partial t}\Big|_{t=0} \right\rangle dx$$

여기서 $\langle\,,\,\rangle$ 는 f에 따르는 벡터장의 내적을 나타내고, 벡터장 $\tau(f)$ 는 사상 f의 텐션(tension)장이라 부르며, f의 에너지가 가장 빨리 감소하는 방향을 나타내고 있다. 에너지 범함수 $E(f)$ 의 오일러-라그랑주의 미분방정식 $\tau(f)$ 는 2계 준선형 타원형 미분방정식이다. C^2-급 사상 $f: M \to N$ 에 대하여 텐션장 $\tau(f)$ 가 0 벡터장일 때 f는 조화라고 한다.

다음으로 곡면의 조화사상에 대하여 간단히 알아보자. M이 콤팩트 곡면일 때 사상 $M \to N$의 에너지는 디리클레-더글러스(Dirichlet-Douglas)의 범함수에 지나지 않는다. 이때, 조화사상은 플래토 문제의 해와 밀접한 관계가 있다. 실제 등각사상 $f: M \to N$가 면적 범함수를 최소로 할 때 f는 에너지 범함수를 최소로 한다.

M과 N이 각각 종수 p와 q인 콤팩트이고 방향이 주어진 곡면일 때 조화사상의 존재에 관하여 몇 가지 사실이 알려져 있다. 조화사상이 언제 존재하고 이것은 구체적으로 어떻게 구성되며 조화사상 전체로 이루는 공간은 어떤 구조를 갖는가 하는 문제는 조화사상의 개념이 정식화된 4반세기가 지난 현재도 가장 중요한 문제의 하나이다. 구면 사이의 조화사상의 일반적인 존재이론은 여러 가지가 있으나 중요한 몇 가지 방법은 Carmo-Wallach 정리, Calabi 정리, 군동변조화사상 등이 있다.

3. 구면 사이의 고유함수사상의 구성

단위 구면 S^m에 표준 리만 계량이 존재한다고 하자. 구면 사이의 조화사상의 구성 분류는 다음 정리가 기본이 된다.

정리 1. [6] $\varphi: S^m \to S^n$과 포함사상 $i: S^n \to R^{n+1}$에 대하여 $\Phi = i \circ \varphi: S^m \to R^{n+1}$라 놓자. 이때 $\varphi: S^m \to S^n$이 조화사상이 되기 위한 필요충분조건은 $\Delta_{S^m} \Phi = 2e(\varphi)\Phi$ 이고 $\|\Phi(x)\| = 1\ (x \in S^n)$인 경우이다.

특히, $\varphi: S^m \to S^n$의 에너지 밀도함수 $e(\varphi)$가 상수일 때 Φ의 각 성분은 Δ_{S^m}의 고유함수가 된다.

정의 사상 $\varphi: S^m \to S^n$가 고유함수 사상이란 φ가 조화사상이고 에너지 밀도함수 $e(f)$ 가 상수일 때이다.

Δ_{S^m}의 고유치는 $\lambda_k = k(m+k-1)\ (k \in N)$ 로 주어지며 λ_k에 속하는 고유함수는

R^{m+1} 위의 k차 조화제차 다항식의 S^m으로의 제한이다. 따라서 고유함수사상 $\varphi : S^m \to S^n$이 구성되기 위한 필요충분조건은 $\sum_{i=i}^{n+1} \Phi(x)^2 = ||x||^{2k}$인 k차의 조화제차다항식 $\{\Phi\}_{i=1}^{n+1}$이 존재해야 한다. 이때, 조화제차 다항식의 차수를 고유함수 사상의 차수라고 한다.

정의 $\varphi : S^m \to S^n$이 완전(Full)하다라는 것은 $\mathrm{Im}\,\varphi$가 어떤 구면 S^{n-1}에도 포함되지 않을 때이다.

$H(m+1, k) = \{R^{m+1}$ 위의 k차의 조화제차 다항식$\}$라 놓을 때, $\varphi : S^m \to S^n$가 완전하면 $n \langle \dim H(m+1, k) - 1$이다. 특히, $\dim H(m+1, 2) = \frac{1}{2} m(m+3)$이다.

지금부터 차수 2의 고유함수사상의 구성법에 대하여 논하자. 고유함수사상의 구성에 관해서 알려진 결과의 대부분은 2인 경우이다. 그 이유는 아래의 정의하는 직교곱(orthogonal multiplication)의 존재이다.

정의 $F: R^{p+1} \times R^{q+1} \to R^r$가 직교곱이란, F가 겹선형 사상으로 $||F(x, y)|| = ||x||\,||y||$ ($x \in R^{p+1}$, $y \in R^{q+1}$)가 성립할 때이다. 특히, $p = q$이고 $F : R^{p+1} \times R^{q+1} \to R^r$가 존재하면 $\varphi_F(x, y) = (||x||^2 - ||y||^2, 2F(x, y))$로 차수 2의 고유함수사상 $\varphi_F : S^{2p+1} \to S^r$이 정의된다. 이것을 호프구성(Hopf construction)이라 부른다.

다음으로 완전직교곱 $F : R^{p+1} \times R^{q+1} \to R^r$이 존재하기 위한 필요조건을 논하자. $p \le q$라 하자. $x = (x_1, \cdots, x_{p+1}) \in R^{p+1}$, $y = (y_1, \cdots, y_{q+1}) \in R^{q+1}$, $a_{ij} \in R^r$을 이용하여 $F(x, y) = \sum_{i=1}^{p+1} \sum_{j=1}^{q+1} a_{ij}\, x_i\, y_j$로 나타낼 때 $||F(x, y)|| = ||x||\,||y||$에서

$$(*) \begin{cases} \langle a_{ik}, a_{il} \rangle = \delta_{kl} \\ \langle a_{ik}, a_{jk} \rangle = \delta_{ij} \\ \langle a_{ik}, a_{jl} \rangle + \langle a_{il}, a_{jk} \rangle = 0 \ (i \ne j,\ k \ne l) \end{cases}$$

위의 두 개의 식에서 임의의 k_0 $(1 \le k_0 \le q+1)$ 또는 i_0 $(1 \le i_0 \le p+1)$에 대하여 $\{a_{ik_0}\}_{i=1}^{p+1}$ 및 $\{a_{i_0 k}\}_{k=1}^{q+1}$는 R^r의 정규직교기저가 된다. 따라서 $q+1 \le r$,

$\{a_{ij}\}_{1\le i\le p+1,\ 1\le j\le q+1}$의 원소의 개수 $(=(p+1)(q+1))$가 r보다 작으면 F의 상은 r보다 차원이 낮은 선형부분공간에 포함된다. 따라서 F가 완전하면 $r\le (p+1)(q+1)$이다. 따라서 $p\le q$일 때 $F: R^{p+1}\times R^{q+1}\to R^r$이 완전직교곱이면 $q+1\le r\le (p+1)(q+1)$이다.

$F: R^{p+1}\times R^{q+1}\to R^r$에 대하여 $(p+1)(q+1)\times(p+1)(q+1)$ 행렬 $G(F)$를 다음과 같이 정의한다.

$$G(F)=\begin{vmatrix} I_{q+1} & A_{12} & \cdots & A_{1,P+1} \\ A_{21} & I_{q+1} & \cdots & A_{2,P+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{P+1,1} & A_{P+1,2} & \cdots & I_{q+1} \end{vmatrix}$$

단 A_{ij}는 $(q+1)\times(q+1)$ 행렬이고 그 성분은 다음과 같다.

$$(A_{ij})_{kl}=\langle a_{ik}, a_{jl}\rangle \quad 1\le k, l\le q+1$$

(*)의 세 번째 식에서 $A_{ji}=-A_{ij}$ 가 성립함에 주의하자.

$\det G(F)$는 $\{a_{ij}\}$로 결정되며 $\operatorname{rank} G(F)=r$ 이다. $p=1$일 때 다음이 성립한다.

정리 2. 완전직교곱 $F: R^2\times R^{q+1}\to R^r$이 존재하기 위한 필요충분조건은 r이 $q+1\le r\le 2q+2$를 만족하는 짝수일 때이다.

증명 $A=A_{21}$라고 하면

$$G(F)=\begin{pmatrix} I_{q+1} & -A \\ A & I_{q+1}\end{pmatrix}$$

$v(\neq 0)\in R^{2q+2}$가 $\ker G(F)$의 원소라고 가정하자. 종벡터 $v_1, v_2\in R^{q+1}$을 이용하여 $v=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2\end{pmatrix}$로 나타내면 $v\in \ker G(F)\Leftrightarrow \begin{cases} v_1=Av_2 \\ Av_1=-v_2\end{cases}$

따라서 $\bar{v}=\begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1\end{pmatrix}$라고 놓으면 $\bar{v}\in\ker G(F)$이고 $v\neq 0$이면 v와 $\bar{v}$는 일차독립이다. 따라서 $\ker G(F)$는 우수차원이므로 $r=\operatorname{rank} G(F)$는 우수이다.

r이 우수라고 가정하면 직교곱 $F_1: R^2\times R^2\to R^2$, $F_1: R^2\times R^2\to R^4$를 다음과 같이 정의하자.

$$\begin{cases} F_1(x,y)=(x_1y_1+x_2y_2,\ x_1y_2-x_2y_1) \\ F_2(x,y)=(x_1y_1,\ x_1y_2,\ x_2y_1,\ x_2y_2)\end{cases}$$

단, $x=(x_1, x_2)$, $y=(y_1, y_2)$ F_1, F_2는 완전하고 다음을 만족시킨다.

$$||F_1(x, y)|| = ||F_2(x, y)|| = ||x||\,||y||$$

이것을 이용하여 다음과 같이 직교곱을 구성하자.

$q+1=2k$일 때 $R^{q+1}=R^2\oplus\cdots\oplus R^2$와 같이 k개로 분해하여 $i(0\le i\le k)$에 대하여 $F=F_1\oplus\cdots\oplus F_1\oplus F_2\oplus\cdots\oplus F_2$라 하면 직교곱 $F: R^2\times R^{q+1}\to R^{2(q+1-i)}$를 얻는다.

따라서 $q+1\le r\le 2q+2$를 만족하는 짝수 r에 대하여 직교곱 $R^2\times 2^{2k}\to R^r$이 존재한다.

$q+1=2k+1$일 때 $R^{q+1}=R^{2k}\oplus R$로 분해하고 $F: R^2\times R^{2k}\to R^r$를 이용하여 $\widetilde{F}: R^2\times R^{2k+1}\to R^{r+2}$를 다음과 같이 정의하면 된다.

$$\widetilde{F}((x_1, x_2), (y_1, \cdots, y_{2k}, y_{2k+1})) = (F(x_1, x_2), (y_1, \cdots, y_{2k}), (x_1y_{2k+1}, x_2y_{2k+1}))$$

단, $(x_1, x_2)\in R^2$, $(y_1, \cdots, y_{2k}, y_{2k+1})\in R^{2k+1}$.

따라서 $q+2\le r\le 2q+2$를 만족하는 짝수 r에 대하여 직교곱 $R^2\times 2^{2k+1}\to R^r$이 존재한다.

정리 3. 차수 2인 고유함수사상 $f: S^m\to S^n$에서 같은 차수의 고유함수사상 $\varphi: S^{m+2}\to S^{n+r+2}$가 구성된다. 단, r은 $m+1\le r\le 2m+2$인 짝수이며 f가 완전하면 φ도 완전하다.

증명 $g: S^1\to S^1$를 $g(e^{i\theta})=e^{i\theta}$인 사상이라 하자. 이 g와 $f: S^m\to S^n$ 및 정리 2의 직교곱 $F: R^2\times R^{m+1}\to R^r$을 이용하여 $\varphi: R^{m+3}\to R^{n+r+3}$을 다음과 같이 정의하자.

$$\varphi(x, y) = (g(x), f(y), \sqrt{2}F(x, y)) \quad (x, y)\in R^2\times R^{m+1}$$

그러면 $||\varphi(x, y)||^2 = ||(x, y)||^4$가 성립하며 $\varphi: S^{m+2}\to S^{n+r+2}$는 차수 2의 고유함수사상이다.

4. 결론

조화 사상의 탄생 배경과 발전 과정 및 중요한 성질 등을 조사하였으며, 구면 사이의 조화사상의 이론, 즉 구면 위의 라플라스 작용소(Laplacian)의 성질 및 고유함수사상의 개념을 연구하기 위하여 스펙트럼과 고유함수를 계산하였고, 다음과 같은 내용을 증명하였다. 우선 고유함수 사상과 직교곱을 정의하고, 완전직교곱이 존재하는 조건 및 구성되는 조건을 연구하였다.

참고 문헌

1. S. HildeBrandt · H. Kaul · K.O. Widman, "An existence theorem for harmonic mappings of Riemannian manifolds," *Acta Math.* 138(1977), 1-16.
2. J. Eells · L. Lemaire, "A report on harmonic maps," *Bull. London Math. Soc.* 16(1978), 387-524.
3. H. Gauchman · G. Toth, "Construction of harmonic polynomial maps between spheres." *Geometriae Dedicata* 50(1994), 57-79.
4. T. Ziyhou, "New constructions of eigenmaps between spheres," *International J. of Mathematics* Vol. 12, No. 3(2001), 277-288.
5. James Eells · A. Ratto, *Harmonic Maps and Minimal Immersions with Symmetries*, Princeton Univ. Press, 1993.
6. T. Takahashi, "Minimal immersions of Riemannian manifolds," *J. Math. Soc. Japan* 18(1996), 380-385.

A Note on Recent Developments in Harmonic Maps

Department of Mathematics Kangnam University **Ki-sung Park**

We review the well known analogizes between variations and harmonic maps. Second section contains rapid summary of the harmonic maps. In the third section we establish some basic properties of the Laplacian on sphere. In particular we compute its spectrum and eigenfunctions.

Key words: harmonic maps, Laplacian

2000 Mathematics Subject Classification: 53C43

논문 접수 : 2004년 12월 14일, 심사 완료 : 2005년 1월