한국수학사학회지 제18권 제1호(2005년 2월), 33-48

동양의 영부족술과 서양의 가정법

단국대학교 **장혜원**
chwlyon@hanmail.net

가정법은 중세 서양에서 상용된 대수 방정식의 산술적 해법이며, 보통 그 근원을 중국 수학의 영부족술이라 말한다. 이와 관련하여 중국 및 조선의 산학서와 이집트, 아랍, 인도 및 서양의 수학 교재를 고찰함으로써 수학사에 있어 그 역사적 자취를 추적하고 두 가지 사실을 확인한다. 첫째, 중국의 영부족술은 일차연립방정식의 해법인 방정술과는 구별되어 일차방정식으로 해석되는 특정 수량 관계를 다루기 위한 계산 알고리즘이며, 둘째, 동양의 영부족술과 서양의 가정법의 명확한 관계는 전자에서의 가정을 포함하는 응용 부분이 후자에서의 이중 가정법과 상응한다는 것이다. 나아가 가정법의 수학적 가치를 수학 교육적 가치로 환원하기 위한 제안을 포함한다.

主제어 : 영부족술, 단순 가정법, 이중 가정법, 중국 수학

0. 머리말

산술에서 대수로의 수학적 발전 과정을 감안할 때 오늘날 가정법(rule of false position)을 이용하여 방정식을 푸는 것은 대수 문제의 산술적 풀이에 해당하며, 한편으로는 등식의 성질을 이용한 방정식의 대수적 풀이가 불가능했던 과거로의 시대착오적 발상으로 간주될지 모른다. 그러나 등식의 성질에 대한 의미는 잊혀진 채, 풀이 규칙에 의존하기만 해도 해를 얻을 수 있는 방정식 해법에 대비하여 그러한 조작이 가능하기 이전 시대의 풀이 과정에 대해 연구하는 것은 수학적 내용의 보다 심오한 탐구를 자극할 수 있고, 이것이 바로 수학사를 연구해야 하는 이유이기도 하다. 나아가 방정식에 의한 해법보다 가정법이 효과적인 문제 상황의 경험, 알고리즘적 특성이 강한 산술적 해법의 타당성을 입증하기 위해 대수 연산에 의존하는 활동 등은 수학 교육에서 수학사의 활용이라는 측면에서 주목되어야 할 것이다.

보통 가정법의 기원으로 중국의 영부족술(盈不足術)이 언급된다. 그리고 그 영부족술은 오늘날의 시각에서 보면 이원일차연립방정식으로 설명 가능하기 때문에, 중국 수학 고전의 해설서나 그 밖의 수학사 서적에서 영부족술 관련 문제를 연립방정식에 의해 설명하는 것이 사실이다.

이에 본 연구자는 수학사적 관점에서 영부족술과 가정법에 대한 다음과 같은 두 가지 문제를 제기한다.

- 많은 저자들이 언급하듯이, 영부족술은 연립방정식의 해법인가?
- 가정법의 기원으로 알려져 있는 영부족술, 양자는 구체적으로 어떤 관련이 있는가?

이와 같은 문제를 해결하기 위해 본고에서는 가정법이라는 대수 법칙을 고찰하고 그 법칙의 역사상 자취를 추적함으로써, 그 기원에서 동양의 영부족술의 위상을 재확인하고 양자의 명확한 관계를 규명할 것이다. 나아가 오늘날 무용지물로 여겨지는 가정법의 수학적 가치를 교수학적 활용의 측면에서 조명함으로써 수학 교육적 가치로 환원하고자 한다.

1. 가정법에 대한 수학적 고찰

가정법을 두 가지로 구분한다. 단순 가정법과 이중 가정법이 그것이다. 이항의 원리를 알지 못했던 고대인들은 $ax=c$와 $ax+b=c$가 표현하는 수학적 현상이 서로 다른 것이라고 생각하였다[8]. 전자는 하나의 값을 가정하고 삼수법(rule of three)에 의존하는 단순 가정법으로, 후자는 두 개의 값을 가정하는 이중 가정법으로 풀 수 있다. 이를테면 단순 가정법을 적용한 풀이 과정을 대수적으로 일반화하여 구한 x가 처음 가정한 값에 대해 독립적인지 종속적인지에 따라 전자의 경우에는 단순 가정법, 후자의 경우에는 이중 가정법을 이용해야 한다.

$ax=c$에서 $x=a_0$를 가정하여 그 때의 결과를 c_0라 하면 $a=\dfrac{c_0}{a_0}$이므로 $x=\dfrac{a_0c}{c_0}$를 구하는 것이 단순 가정법이다. 이것은 삼수법에 의해 설명된다. 즉 x일 때 c이고 a_0일 때 c_0이므로 $a_0 : c_0 = x : c$이고 따라서 $x=\dfrac{a_0c}{c_0}$를 얻는다.

한편 이중 가정법은 $ax+b=c$를 풀기 위해 x의 값으로 두 경우 a_1과 a_2를 가정하고 그 때의 오차를 각각 c_1과 c_2라 하면, $x=\dfrac{a_2c_1-a_1c_2}{c_1-c_2}$를 얻는 것이다. 이것을 대수적으로 정당화해보자.

$\begin{cases} x=a_1\text{일 때, } aa_1+b=c+c_1 \\ x=a_2\text{일 때, } aa_2+b=c+c_2 \end{cases}$라 하면, $a=\dfrac{c_1-c_2}{a_1-a_2}$이고 $c-b=\dfrac{a_2c_1-a_1c_2}{a_1-a_2}$이므로, 결국 $x=\dfrac{c-b}{a}=\dfrac{a_2c_1-a_1c_2}{c_1-c_2}$이다.

2. 영부족술

우리가 가정법이라 부르는 계산 법칙은 그 기원을 중국에 두고 있으며[1] 아랍을 거쳐 중세에 유럽에 소개된 것으로 알려진다. 이러한 견해는 [8], [9] 등에 의해 입증되는데, 그 증거로 간주되는 것 중 하나가 유럽 수학자들이 그 법칙에 붙인 이름이다. 유럽 수학자들은 가정법을 초기에 'Hisab al Khatayym' 또는 'Regula Augmenti et Diminutionis'라 불렀는데, 전자는 중세에 아랍인들이 부른 중국 명칭 'Khitai'를 담고 있으며 후자는 중국 명칭인 영부족술(excess and deficit rule) 자체에 해당한다.

이 장에서는 동양의 영부족술에 대해 알아보기 위해, <구장산술> 및 중국 산학의 직접적인 영향을 받은 조선 시대 산학서의 관련 내용을 고찰할 것이다.

(1) <구장산술>의 영부족술

중국 수학의 핵심은 최고의 산서 <구장산술>에 스며있다고 해도 과언이 아닐 듯싶다. 그만큼 이후 중국 수학의 대부분은 <구장산술>의 내용을 근간으로 하여 확장, 발전된 것으로 볼 수 있다. 영부족술 역시 <구장산술> 제7권인 영부족[2]에서 볼 수 있다. 여기에 수록된 20개의 문제는, 오늘날 연립방정식을 세워 대수적으로 간단하게 풀 수 있는 문제이지만 당시에는 오늘날의 이원일차연립방정식의 해법에 해당하는 방정술[3]과 구분하여, 남거나 모자라는 특정 수량 관계를 나타내는 문제 상황을 위한 산술적 알고리즘으로 다루어진다. 20문제 중 전반부 8개는 남음과 부족(盈不足), 두 개의 남음 또는 두 개의 부족(兩盈 / 兩不足), 남음과 딱 맞음 또는 부족과 딱 맞음(盈適足 / 不足適足)의 5가지 수량 관계[4]를 다룬다. 이후 12문제는 수량 관계가 문제에 주어지는 것이 아니라, 두 개의 값을 가정하여 수량 관계를 직접 도출함으로써 영부족술을 적용하는 응용문제로서, 정확한 의미로 이중 가정법에 해당한다. 논의의 중복을 피하기 위해 자세한 설명은 다음 절로 미루기로 한다.

(2) 조선 시대 산학서의 영부족술

조선 시대 산학서에서 발견되는 영부족의 또 다른 이름은 영비(盈朏) 또는 영뉵(盈朒)이다.

1) 가정법의 기원을 인도로 보는 학자(예: [7])도 있지만, 본고의 고찰을 살펴보면 그것이 잘못된 것임을 재확인할 수 있다.
2) 유휘는 이 법칙을 비뉵(朏朒)법칙이라 불렀는데, 영부족이나 비뉵이나 모두 달의 운동과 관련있는 용어이다[9].
3) 계수들의 행렬을 이용한 Gauss-Jordan 소거법과 동일한 연립방정식의 해법에 해당한다. [2] 참조.
4) 5가지 각 경우의 풀이법을 영부족술, 양영술, 양부족술, 영적족술, 부족적족술이라 일컫지만, 결국 동일한 알고리즘이므로 여기서는 영부족술로 통칭하기로 한다.

> 영이란 몫이 되는 수보다 많다는 것이고, 부족이란 몫이 되는 수보다 적다는 것이다. 영은 바로 남는다는 것이고 적은 것이 곧 부족이다[5].

> 영비: 영은 많다는 것이다. 비는 줄어든다는 것이다. 수가 나타난 것은 볼 수 있으나 숨어있는 것은 볼 수 없다. 나타난 것으로부터 숨어있는 것을 미루어 짐작하는 것이다. 가령 남는 것, 부족한 것을 알아내는 법이 있다면 이것을 써서 감추어진 것과 보이지 않는 것이 뒤섞인 수를 구한다. 영비는 한편으로는 영부족이라고도 한다. 영은 남음이 있다는 것이다. 비는 한편으로는 뉵이라고도 한다. 감추어진 것과 보이는 것이 서로 뒤섞인 것을 다룬다 [5].

> 영뉵이라는 것은 보통 말하는 만(滿), 부족(不足)을 뜻하는 것이며, 실제 수(원수)를 감추어 두고 얼마의 비율이면 원수에 얼마가 남고, 또 다른 비율로 하면 얼마가 모자란다는 것으로 만들어 각각 그 비율을 색출하는 방법을 말한다[3].

영부족술은 곧 남고 모자라는 수량 관계의 문제를 풀기 위해 적용하는 계산 규칙으로 파악된다.

조선 시대의 여러 산학서들은 중국 산학서의 직접적인 영향을 받은 것이 분명하므로, <구장산술>로 거슬러 오르는 영부족술을 이용하여 푸는 문제들이 다수 발견된다. 예를 들어 홍정하(1684~?)의 <구일집>에서는 13개의 문제, 황윤석(1719~1791)의 <산학입문>에서는 14개의 문제를 다룬다. 양자에서 모두 알고리즘에 따른 계산 규칙으로 해석된다는 면에서 일치하지만, <구일집>에서는 아래에서 고찰할 특정 방법[5]을 선호하여 알고리즘에 따라 사람 수를 먼저 구하고 구한 값을 문제 상황의 조건에 비추어 물건 값을 구하는 방법을 이용하며[2] 풀이 과정에서 해를 가정하는 문제는 단 한 개뿐인데 그나마 가정한다는 사실을 강조하고 있지도 않은 반면, <산학입문>에서는 내는 몫과 영부족량을 사각행렬로 늘어놓고 서로 엇갈려 곱(유승)하여 계산하는 알고리즘을 따르며 해를 가정하여 영부족 조건을 생성하는 해법도 다수 있어 가정법의 진면목을 보여준다. 뿐만 아니라, <구장산술>에서의 방법을 문제의 각 유형에 맞게 두루 사용하고 있음을 알 수 있다.

한편 홍대용(1731~1783)이 저술한 문집 <담헌서> 중 외집 4, 5, 6권인 <주해수용>은 산학에 대한 내용을 담고 있는데, 영부족술에 관한 5개의 문제를 포함한다. 이 문제들은 영부족술 문제의 원형으로 간주되는 물건을 사기 위해 돈을 모으는 상황에 대한 것으로, <구장산술>이 다룬 수량 관계 5가지를 설명한다. 알고리즘은 <산학입문>과 마찬가지로 내는 돈과 영부족의 유승을 이용하는 것이지만, 물건을 사는 특수 상황만을 다룬다는 점에서 제한된다. 따라서 영부족술로 푸는 전형적인 문제 유형인 다음 문제와 해법을 <산학입문>에서 설명한 알고리즘에 따라 고찰해본다.

---

5) <구장산술>에서 별해(其一術)에 해당하는 해법으로, 아래에 나오는 남음(또는 부족)과 딱 맞는 경우를 참조.

문제 x명이 y원인 물건을 사려고 하는데, 한 명마다 a_1원씩 내면 c_1원이 남고 한 명마다 a_2원씩 내면 c_2원이 모자란다. 사람 수와 물건 값을 구하라.($a_1>a_2$, c_1, $c_2>0$)

풀이 먼저 수를 배열한다. $\begin{matrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{matrix}$

유승하여 합한 것($a_1c_2+a_2c_1$)을 실, 남음과 부족의 합(c_1+c_2)을 법[6]으로 한다. 즉 $\dfrac{(\text{유승한 것의 합})}{(\text{남음과 부족의 합})}=\dfrac{a_1c_2+a_2c_1}{c_1+c_2}\cdots(1)$을 얻고, 실과 법을 각각 내는 몫의 차(a_1-a_2)로 나누면 전자 $\dfrac{a_1c_2+a_2c_1}{a_1-a_2}$은 물건 값 , 후자 $\dfrac{c_1+c_2}{a_1-a_2}$는 사람 수이다.

이 알고리즘의 타당성은 다음과 같은 분석으로부터 검증된다.[7] 위 문제의 수량 관계를 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{cases} a_1x=y+c_1\cdots① \\ a_2x=y-c_2\cdots② \end{cases}$$

1단계: $\begin{cases} ①\times c_2 : a_1c_2x=c_2y+c_1c_2 \\ ②\times c_1 : a_2c_1x=c_1y-c_1c_2 \end{cases}$

$$(a_1c_2+a_2c_1)x=(c_1+c_2)y$$

이것은 남음과 부족이 없는 딱 맞는 상황이므로 $\dfrac{y}{x}=\dfrac{a_1c_2+a_2c_1}{c_1+c_2}$은 곧 한 명당 내야할 돈이 된다.[8]

2단계: $\begin{cases} ①\times a_2 : a_1a_2x=a_2y+a_2c_1 \\ ②\times a_1 : a_1a_2x=a_1y-a_1c_2 \end{cases}$

$$(a_1-a_2)y=a_1c_2+a_2c_1$$

$y=\dfrac{a_1c_2+a_2c_1}{a_1-a_2}$, 이것이 곧 물건 값이다.

---

6) 나눗셈의 경우에는 피제수를 실(實), 제수를 법(法)이라 한다.

7) 알고리즘의 타당성을 검증하는 것은 어렵지 않지만, 대수적 처리가 불가능했던 시대에 그러한 알고리즘을 어떻게 생각하게 되었는지 알 수 없다는 한계가 있다. 중국 수학에서의 많은 경우와 마찬가지로, 당시 저술가들이 밝히고 있지 않기 때문에 오늘날의 입장에서는 단지 추측의 수준에 머물고 있는 수학적 지식의 발생적 측면에 대한 지속적인 연구가 필요하다.

8) x명이 한 명마다 a원씩 내면 y원이 되므로 $ax=y$이다. 여기서 a의 값으로 a_1과 a_2를 가정하여 $a=\dfrac{y}{x}=\dfrac{a_1c_2+a_2c_1}{c_1+c_2}$을 구한 것이다.

3단계: ①−②: $(a_1-a_2)x=c_1+c_2$

$x=\dfrac{c_1+c_2}{a_1-a_2}$, 이것이 곧 사람 수이다.

이것이 기본 알고리즘이며, 그 변형으로 두 개의 남음 또는 두 개의 부족인 경우와 남음과 딱 맞는 경우 또는 부족과 딱 맞는 경우에 대해서도 생각할 수 있다.

먼저 두 개의 남음(또는 두 개의 부족)이 있는 경우에는 c_2(또는 c_1)의 부호를 반대로 생각하여야 하므로 식 (1)의 실과 법이 합이 아닌 차(물론 큰 것에서 작은 것을 빼는 것이고, ~로 나타내기로 함)가 된다. 즉 $\dfrac{a_1c_2\sim a_2c_1}{c_1\sim c_2}$ 이다.

다음은 남음과 딱 맞는(또는 부족과 딱 맞는) 경우인데, 이는 $\begin{cases} a_1x=y+c_1 \\ a_2x=y \end{cases}$ 과 같이 표현되므로 $x=\dfrac{c_1}{a_1-a_2}$ 을 구하고, 이를 $y=a_2x$에 대입하여 $y=\dfrac{a_2c_1}{a_1-a_2}$ 을 구한다.

마지막 경우의 방법은 앞의 두 방법과 구별된다. 앞의 두 방법도 이와 같이 푼다면, 먼저 사람 수 $x=\dfrac{c_1+c_2}{a_1-a_2}$ 를 구한 다음, 그것을 식 ①이나 ②(즉 문제에서의 두 조건 중 하나)에 대입하여 물건값 y를 구하는 것으로, 식이 두 개 있으므로 항상 두 가지 방법이 가능하게 된다. 이 해법을 <구장산술>에서는 별해로 다루며 <구일집>에서 이용한 방법도 바로 이것이다.

이제 다음과 같이 좀 더 일반화된 상황을 고려해보자.

문제 x명이 y원인 물건을 사려고 하는데, b_1명마다 a_1원씩 내면 c_1원이 남고 b_2명마다 a_2원씩 내면 c_2원이 모자란다. 사람 수와 물건 값을 구하라. ($a_1>a_2$, c_1, $c_2>0$)

풀이 수를 배열한다.

a_1	a_2	내는 돈
b_1	b_2	사람 수
c_1	c_2	영부족

내는 돈과 사람 수를 유승하여 뺀 것 $a_1b_2\sim a_2b_1$을 약법으로 한다. (이것은 나중에 실과 법을 나누기 위한 분모에 해당한다.) 다시 영부족과 유승하고 더하여 실 $a_1b_2c_2+a_2b_1c_1$을 얻고, 사람 수를 곱한 b_1b_2를 영부족과 곱하여 더한 $b_1b_2c_1+b_1b_2c_2$를 법으로 한다. 즉 물건 하나의 값 $\dfrac{a_1b_2c_2-a_2b_1c_1}{b_1b_2c_1+b_1b_2c_2}$ 이다. 이제 위에서 구한 약법으로 실과 법을 각각 나누면, 물건 값 $\dfrac{a_1b_2c_2+a_2b_1c_1}{a_1b_2\sim a_2b_1}$, 사람 수 $\dfrac{b_1b_2c_1+b_1b_2c_2}{a_1b_2\sim a_2b_1}$ 를 얻는다.[9]

이 알고리즘의 타당성은 $\begin{cases} \dfrac{a_1}{b_1}x = y + c_1 \\ \dfrac{a_2}{b_2}x = y - c_2 \end{cases}$ 을 풀어 확인할 수 있다.

또 다른 문제들은 영부족술의 응용 문제로서, 가정법의 본질인 해를 가정하여 영부족술을 적용할 두 개의 조건을 생성하여 푸는 것이다. 따라서 엄밀하게 말하자면, 영부족술의 응용 부분이 곧 이중 가정법이다. 이런 유형의 문제의 가시적인 특징은 하나의 가정을 위해 '假令…', 또 하나의 가정을 위해 '令之…'로 시작하는 형식을 들 수 있다. 예를 들어 다음 문제를 보자.

> 지금 한 사람이 술을 갖고 봄 놀이를 하는데, 술의 양은 알 수 없다. 다만, 일을 만나면 가진 술의 양만큼 더하고 꽃을 만나면 3말 4되를 마신다고 한다. 지금 일을 만나고 꽃을 만나기를 각각 4차례 하여 술을 다 마시고 술 단지가 비었다. 처음 지니고 간 술의 양은 얼마인가? [5]

이 문제의 풀이에서는, 처음 지닌 술이 3말 2되라면 2되가 남고(假令元酒三斗二升有餘二升) 3말이면 3말이 부족하다(令之元酒三斗 不足三斗)는 수량 관계를 도출하여 영부족술을 적용한다. 먼저 다음과 같이 배열하고 유승하여 3.2×3과 3×0.2이다.

3.2 처음 술　3　처음 술
0.2　남음　　3　부족

그리고 유승한 결과를 더한 1섬 2되를 실로 하고 남음과 부족을 더한 3말 2되를 법으로 하여 나누어($\dfrac{3.2\times3+3\times0.2}{0.2+3} = \dfrac{10.2}{3.2}$) 답을 얻는다.

3. 가정법 및 영부족술에 해당하는 그 밖의 법칙들

이 장에서는 중세 서양의 가정법이 있기까지 중국을 제외한 지역에서의 자취들을 추적하고자 한다. 인용한 사료는 [6]과 [8]에서 재인용한 것이다.

(1) 이집트의 방정식 해법

이집트의 린드 파피루스에 적힌 87개의 문제 중 24번에서 38번까지의 문제는 일차 방정식의 해법을 다루는데, 그 중 24번 문제와 풀이는 다음과 같다[6].

9) 쌍투영뉵(雙套盈朒)이라 불리며, $b_1 = b_2 = 1$이면 곧 영부족술이다.

어떤 양에 그 양의 $\frac{1}{7}$을 더하니 19가 된다.

/ 1	7	1	8	/ 1	$2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$
/ $\frac{1}{7}$	1	/ 2	16	/ 2	$4+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$
		$\frac{1}{2}$	4	/ 4	$9+\frac{1}{2}$
		/ $\frac{1}{4}$	2		
		/ $\frac{1}{8}$	1		

과정대로 해보면 양은 $16\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$

$\frac{1}{7}$은 $2\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$

합은 19

풀이의 첫 단계는 구하는 수를 7이라 가정하여 결과로 8을 얻은 것이고, 7의 선택은 물론 계산상의 편리함을 위한 것이다. 둘째 단계는 이집트인들의 곱셈 방법을 이용하여 8과 곱하여 19가 되는 수, 즉 $8x=19$인 $x=2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$을 구한 것이다. 셋째 단계는 $2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$에 $1+2+4$, 즉 7을 곱하여 오른쪽 세 식의 합인 $16\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$을 구한 것이다. 이상의 세 단계는 $7:8=x:19$에서 x를 구하는 과정과 일치함을 알 수 있다. 마지막 단계는 검산 과정으로 구한 양 $16\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$과 그 $\frac{1}{7}$인 $2\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$을 더하여 19가 되는 것을 확인한 것이다.

이와 같은 이집트의 해법은 하나의 값을 가정하여 수량 관계를 얻고 문제에서 주어진 데이터와 함께 삼수법을 이용한 단순 가정법에 해당한다.

(2) 인도의 가정의 과정

인도의 12세기 이후 문헌에서 등장하는 가정의 과정 역시 단순 가정법에 해당한다. 바스카라(Bhaskara)의 <릴라바티(Lilavati)>에 나오는 3개의 명제를 보자[8].

> 명제 50: 임의로 가정된 수가 특정 문제에서 구체적인 것으로 취급되어, 곱해지고 나누어지고 분수에 의해 증가 또는 감소된다. 그런 다음 주어진 양을 가정된 수로 곱하고 앞 단계의 결과로 나누면 구하는 수를 얻는다. 이것을 '가정의 과정'이라 한다.

여기서 첫 단계는 해를 가정하여 문제의 조건에 따라서 계산하는 과정이며 둘째 단계는 삼수법을 적용하여 비례 연산을 하는 과정으로, 이어지는 두 명제에서 예를 볼

수 있다.

명제 51: 5를 곱하고 그 곱의 $\frac{1}{3}$을 빼고, 나머지를 10으로 나누고, 원래 양의 $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$를 더하면 68이 되는 수는 무엇인가?

3을 놓자. 5를 곱하면 15이다. 그 $\frac{1}{3}$을 덜면 10이고, 10으로 나누면 1이다. 가정된 양의 $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$인 $\frac{3}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{4}$을 더하면 그 합은 $\frac{17}{4}$이다. 가정된 3을 주어진 수 68에 곱하여 이것으로 나누어라. 몫은 48이다. 이 답은 1 또는 그 밖의 어떤 다른 가정된 수에 대해서도 동일하다.

이 과정은 찾는 수를 3이라 가정할 때 문제의 조건에 따라 얻은 $\frac{17}{4}$을 이용하여 세운 비례식 $3 : \frac{17}{4} = x : 68$로부터 $x = 68 \times 3 \div \frac{17}{4}$을 구한 것으로, 명제 50의 과정대로 주어진 양과 가정한 수를 곱하고 앞 단계의 결과로 나눈 것에 해당한다.

명제 52: 연꽃 무더기로부터 $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$을 각각 시바(Siva), 비슈누(Vishnu), 태양신에게 바치고, $\frac{1}{4}$은 바바미(Bhavami)에게 바쳤다. 나머지 6송이는 덕망 있는 성직자에게 주어졌다. 전체 꽃송이를 빨리 말하여라.

이 문제의 풀이 역시 꽃의 수를 1로 가정하고 명제 50의 과정을 적용하면 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$6 \times 1 \div \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right) = 120$$

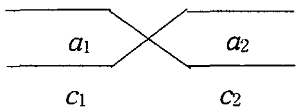
(3) 아랍의 가감법칙

러시아의 유쉬케비치(Youschkevitch)가 저서 <중세의 수학사>에서 "아랍 세계의 중심인 바그다드에는 알콰리즈미 시대(9세기)에 아마도 이중 가정법이 있었다([8]재인용)."고 하였듯이, 아랍 수학자들에 의한 저서에서도 많은 흔적을 찾아볼 수 있다.

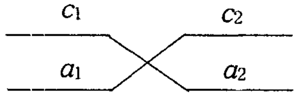
11세기에는 아랍어를 번역하여 라틴어로 쓴 <가감의 책>이 있었다. 거기서 말하는 소위 가감 법칙이란 방정식 $ax+b=c$에 대해 두 개의 가정이 있는 다음과 같은 절차로서, 영부족술과 같은 답을 유도한다.

$x=a_1$일 때, $aa_1+b=c+c_1$
$x=a_2$일 때, $aa_2+b=c+c_2$

라 하자. 이제 교차선을 그어 두 선 사이에 a_1과 a_2를 쓰고, c_1과 c_2만큼 남으면(양) 아래에, 부족하면(음) 위에 적는다.



c_1, c_2 남음



c_1, c_2 부족

이때 답은 다음과 같다.

$$x=\frac{a_2c_1-a_1c_2}{c_1-c_2}, \quad c_1,\ c_2\text{가 같은 레벨}$$

$$x=\frac{a_2c_1+a_1c_2}{c_1+c_2}, \quad c_1,\ c_2\text{가 다른 레벨}$$

또한 15세기에 알카시(al-Kashi)는 저서 <산술의 열쇠>에서 이 법칙을 논한 다음, “어떤 수에 3을 곱하고 10을 더하고 그 합을 2배하고 10을 더하여 90을 얻는다. 원래 수는 무엇인가? ([8]재인용)”라는 문제를 다룬다. 5와 7을 가정하면 그 결과 60, 72는 참값 90에 각각 30, 18이 모자란다. 따라서 $a_1=5$, $c_1=-30$; $a_2=7$, $c_2=-18$이고, 법칙을 적용하여 답으로 $\frac{7\times30-5\times18}{30-18}=10$을 얻는다. 이것은 이중 가정법으로서 두 개 부족인 경우의 영부족술에 해당한다.

4. 중세 이후 서양의 가정법

서양 수학사에 가정법이 처음 등장하는 것은 13세기 초 이탈리아에서였다. 피보나치(Fibonacci)는 책 <산판의 책(Liber Abaci)>에서 이중 가정법을 뜻하는 아랍어 ‘Elchataieym’을 소개하며, 마테오 리치(Matteo Ricci)의 스승이었던 클라리우스(Clarius)는 <실용 산술 개설(Epitome Arithmeticae Practicae, 1583)>에서 전형적인 영부족 관계의 상황을 담고 있는 문제를 다룬다[8].

중세 이후에는 가정법이 유럽에서 상용되었음을 보여주는 많은 저서와 교재가 등장한다. 예컨대 프랑스의 쟈크 펠르티에(Jacque Peletier, 1517~1582)는 자신의 대수 교재에서 가정법을 다음과 같이 소개한다.

아랍인들이 카텐(Catain)의 법칙이라 부른 가정법은 가정된 거짓 경우로부터 참인 경우를

찾는 것을 알려주기 때문에 그렇게 일컫는다… 가정법은 삼수법과 거의 유사한 연산을 한다. 삼수법에서는 세 항을 알지만, 여기서는 그 중 하나만을 알고… 나머지 두 개를 그로부터 유사하게 만들어 낸다는 것을 제외하고는…

예: 일정액의 돈을 6%의 연리로 은행에 예치시켰더니 10년 뒤 모두해서 500ε를 찾았다. 원금은 얼마인가?

임의로 하나의 수를 골라 그것이 우리가 구하는 원금이듯이 전개하자. 예를 들어, 내가 처음에 넣은 돈을 200ε라 하자. 6%의 비율이므로 10년 뒤 120ε가 된다. 이제 120을 200과 합하면 320ε가 된다. 그러나 500이 되어야 한다. 이것이 삼수법을 위해 세 항을 갖는 방법이다: 문제에 포함된 500이 그 하나, 나머지 두 개는 내가 인위적으로 만들었는데, 200과 320이 되었다. 그래서 320대 200은 500대 여기서 구하는 항이다. 진짜 원금을 알게 된다. 따라서 나는 여기서 삼수법에 의존했다…([6]재인용)

이 예는 구하는 원금을 x라 할 때 받은 돈은 500이고, 원금이 200이라면 받은 돈은 320이므로 비례식 $x:500=200:320$을 세워 푼 것이다. 여기서 가정법이 사용된 것은 삼수법을 적용하고자 하는데 주어진 데이터는 하나밖에 없으므로 나머지 두 항을 얻기 위해 하나의 값을 임의로 가정(200)하고 가정한 값에 문제의 조건을 적용한 결과(320)를 필요한 세 번째 데이터로 얻은 것이다. 즉 하나의 값을 가정하고 삼수법을 이용하는 단순 가정법의 특징을 보여준다.

한편 오노프리오(Onofrio)의 <산술(1670)>에 나오는 다음 문제를 보자.

오타비오 셈프로니(Ottavio Semproni)는 세 개의 보석을 샀다. 두 번째 것은 첫 번째 것보다 4온 비싸고 세 번째 것은 첫 번째 것과 두 번째 것의 합보다 5온 비싸다. 세 개 모두는 81온이다. 각각의 값을 구하라([8]재인용).

이 문제의 풀이에서 첫 번째 보석의 값을 24와 20이라 가정한다. 가정한 두 값에 대한 결과는 각각 109와 93이므로 참값 81과의 차이는 28과 12이고, 이하 과정을 다음과 같은 도식으로 나타낸다.

$$\begin{array}{lll} 24 & 28 & 560 \\ 20 & \underline{12} & \underline{288} \\ & 16 & 272 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{lll} a_1 & c_1 & a_2c_1 \\ a_2 & \underline{c_2} & \underline{a_1c_2} \\ & c_1-c_2 & a_2c_1-a_1c_2 \end{array}$$

첫 번째 보석은 $\frac{272}{16}=17$이다. 이중 가정법인 이 과정 역시 두 개 남음인 경우의 영부족술로서, 특히 가정과 결과를 사각행렬로 배치하여 유승하는 것은 영부족술의 알고리즘과 일치한다는 점에서 주목할 만하다.

이 방법은 후일 러시아로 전파되어, 마그니키(Magnickii)의 <산술(1703)>에서는 한 문제에 대해 가정하는 값을 달리하여 두 개의 부족, 두 개의 남음, 남음과 부족의 세 가지 경우를 야기시키고 각각을 풀어서 그 결과가 동일함을 확인한다.

마지막으로, 19세기 영국의 토머스(K. Thomas)가 저술한 교재 <완전 실용 산술(The complete practical arithmetician, 1815)>은 당시에도 이중 가정법을 가르쳤음을 보여준다.

> 법칙 : 임의의 두 편리한 수를 가정한 다음, 참값보다 넘치는지 모자라는지에 따라 오차를 (+ 또는 −로) 표시하면서 문제의 조건에 따라 그것들을 처리한다. 그리고 나서, 첫 번째 가정을 두 번째 오차와 곱하고 두 번째 가정을 첫 번째 오차와 곱한다. 오차가 다른 부호이면 곱의 합을 오차의 합으로 나누고, 오차가 같은 부호이면 곱의 차를 오차의 차로 나눈다. 그 몫이 구하는 수이다.
>
> 예 : 3을 곱하고 그 곱에 4를 더하고 그 합을 8로 나누면 몫이 32인 수는 무엇인가?([6]재인용)

이 문제의 풀이는 다음과 같다. 12라 가정하면 오차는 −27이고 108이라 가정하면 오차는 +9이다. 위의 법칙을 적용하면 오차가 다른 부호이므로 두 곱의 합 3024를 오차의 합인 36으로 나누어 84가 구하는 수이다. 이 법칙의 계산 알고리즘 역시 영부족술과 정확히 일치한다.

이상에서 동서양을 막론하고 모든 데이터를 양수로 취급하였음을 주목하자. 오차를 +, −로 표시한 것은 남음과 부족의 표시로서 적용할 법칙을 구분하기 위한 것일 뿐이며, 실제 법칙을 적용하는 계산 절차에서 다루는 것은 절대값이다. 그러나 영, 부족량을 각각 +, − 부호가 있는 데이터로 고려한다면 경우를 구분할 필요 없이 $\frac{\text{유승한 것의 차}}{\text{영부족의 차}}$로 일반화가 가능하다.

5. 수학 교육적 함의

가정법은 대수 연산을 자유자재로 하는 오늘날의 관점에서 보면 거의 무용지물에 가깝게 느껴진다. 16세기까지만 해도 유용한 계산술로 통용되었던 가정법이 그 위력을 잃게 되는 것은 간단한 기호의 등장으로 인한 등식 표현 및 방정식의 대수적 해법 때문이다. 실제로 가정법은 오늘날 수학사 관련 서적을 제외한 대부분의 수학 교재에서 찾아보기 어렵다. 그럼에도 불구하고 그 교육적 가치는 종종 논의되어왔다. 예컨대 샌퍼드(Sanford, [6]재인용)는 대수를 배우기 시작하는 8학년 학생이 대수적 해법 대신 배운 적도 없는 간단한 대입법을 암묵적으로 사용한다고 주장하면서 다음 문제를

대수적인 방법과 이중 가정법으로 풀어 보고 비교할 것을 권한다.

> 어머니께서 갖고 있는 사탕 전부를 세 명의 아들에게 나누어준다. 첫째는 가진 것의 반보다 2개 많게 받고, 둘째는 그 나머지의 반보다 2개 많게 받고, 셋째는 남은 것의 반보다 2개 많게 받았다. 어머니는 전부 몇 개의 사탕을 갖고 있었는가?

샌퍼드가 요구한 대로 두 방법을 모두 적용하여 풀어보자. 먼저 처음 갖고 있는 사탕을 x개라 하여 방정식을 세우면 다음과 같다.

$$\left(\frac{x}{2}+2\right)+\left(\frac{x-\left(\frac{x}{2}+2\right)}{2}+2\right)+\left(\frac{x-\left(\frac{x}{2}+2\right)-\left(\frac{x-\left(\frac{x}{2}+2\right)}{2}+2\right)}{2}+2\right)=x$$

너무 복잡하므로 단계별로 다시 식을 세워보자.

첫째: $\frac{x}{2}+2$

둘째: $\frac{x-\left(\frac{x}{2}+2\right)}{2}+2=\frac{x}{4}+1$

셋째: $\frac{x-\left(\frac{x}{2}+2\right)-\left(\frac{x}{4}+1\right)}{2}+2=\frac{x}{8}+\frac{1}{2}$

따라서 $\left(\frac{x}{2}+2\right)+\left(\frac{x}{4}+1\right)+\left(\frac{x}{8}+\frac{1}{2}\right)=x$

훨씬 간단해졌지만 역시 분수 계산 및 대수적 연산이 요구된다.

이제 가정법으로 풀어보자. 20개라 가정하면, 첫째는 12개, 둘째는 6개, 셋째는 3개이므로 총 21개가 되어 오차가 $+1$이다. 한편 30개라 가정하면 각각 17개, $\frac{17}{2}$개, $\frac{17}{4}$개이므로 총 $29\frac{3}{4}$개가 되어 오차가 $-\frac{1}{4}$이다. 따라서 다음을 얻는다.

$$\begin{array}{cccc} 20 & \searrow & 1 & \rightarrow\ 30 \\ 30 & \nearrow & -\frac{1}{4} & \rightarrow\ -5 \end{array}$$

영부족의 차는 $\frac{5}{4}$, 유승한 것의 차는 35이므로 구하는 개수는 $35\div\frac{5}{4}=28$이다.

이와 같이 해를 가정하여 푸는 것이 방정식을 세워 푸는 것보다 훨씬 간편한 경우가 있고, 한편 아직 대수적 접근이 불가능한 초등 수준에서 이러한 문제를 다룰 경우에는 더욱 진가를 발휘할 것이다. 즉 방정식의 해법을 배우지 않은 상태에서 가정에

의해 데이터를 얻어 다른 법칙의 도움을 받아 해를 구하는 것이다. 그러나 대수적 타당성을 근거로 하는 계산 알고리즘인 영부족술의 지나친 강조보다는 단순 가정법과 같이 가정하는 추측의 사고와 삼수법을 이용하는 비례적 사고를 조장하는 것이 바람직할 것으로 생각한다.

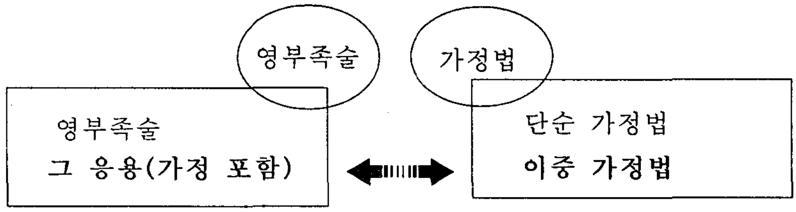
나아가 대수적 처리가 가능한 좀 더 높은 수준에서라면 영부족술 알고리즘의 정당화를 요구할 수도 있다. 대수적 증명을 요구하는 상황을 자연스럽게 접하게 된다는 장점이 있다. 또한 단순 가정법으로 해결되는 문제를 이중 가정법을 적용하여 풀 수 있는지 질문하여 탐구 활동을 유발할 수 있다. 또는 반대로 단순 가정법을 적용하면 충분치 않기 때문에(즉 가정한 값에 따라 구한 답이 다른 경우) 반드시 이중 가정법을 적용해야 하는 문제를 이용할 수도 있다. 예컨대 앞서 예시한 아랍의 가감법칙에서 가정한 값이 5와 7일 때 그 결과는 60과 72로 다르다. 이때 값을 a_0라 하여 x의 일반해를 구하면 $x=\frac{a_0}{2(3a_0+10)+10}$가 된다. 즉 x를 나타내는 일반식에 a_0가 남아 있어 가정한 값에 따라 결과가 달라지는 경우이다. 따라서 단순 가정법으로는 불충분하며 이중 가정법이 적용되어야 함을 확인한다. 이러한 예로부터 단순 가정법과 이중 가정법이 적합한 경우를 분별하는 준거[10]를 발견하게 하는 활동 등은 수학적 사고를 조장하는 의미 있는 학습 활동이 될 것이다.

6. 맺음말

본고에서는 중국의 영부족술과 그것이 전래되어 서양에서 정착된 것으로 알려지는 가정법의 역사적 자취를 추적함으로써 본고에서 제기한 두 가지 문제에 대해 다음과 같은 결과를 확인할 수 있었다. 첫째, 중국 수학에서 영부족술은 연립방정식의 해법인 방정술과는 구별되며, 일차방정식으로 해석되는 남거나 모자라는 수량 관계를 다루기 위한 산술적 알고리즘이다. 둘째, 영부족술은 문제에서 주어진 두 가지 가정과 그 결과를 데이터로 하여 계산하는 알고리즘 자체가 강조되며 영부족술의 응용에서야 문제해결자가 직접 수를 가정하여 데이터를 얻는 반면, 가정법은 값을 가정함으로써 수량 관계를 창출하는 과정이 강조되며 그 가정이 하나인지 둘인지에 따라 단순 또는 이중이란 수식어가 붙게 된다. 하나의 가정을 할 때는 삼수법을 이용하고 두 개의 가정을 할 때는 바로 영부족술에 해당하는 알고리즘을 따르는 것이다. 따라서 정확히 말하자면, 영부족술의 **가정을 포함한 응용** 부분이 **이중** 가정법에 해당하는 것이다.

---

10) 예컨대, 4장의 토머스는 다음과 같은 준거를 제시한다([6]재인용).
$ax+bx+cx+\cdots+mx=p$ (단순 가정법)
$ax+bx+cx+\cdots+mx+k=p$ (이중 가정법)



한편 교육적 측면에서는 초등 수준에서 단순가정법을 이용하여 방정식 없이도 다양한 문제를 해결한다든지, 대수적 처리가 가능한 중등 이상의 수준에서 풀이의 다양성, 보다 효과적인 해법의 경험, 익숙하지 않은 수학적 산물에 대해 탐구하고 그 타당성을 확인하는 활동 등은 수학사적 자료를 수학교육에서 활용하는 진정한 의미를 찾게 할 것이다.

참고 문헌

1. 유휘 주, 구장산술/ 차종천 역(2000), 구장산술 · 주비산경, 범양사 출판부.
2. 장혜원, “조선시대의 산학서 <구일집>의 내용 분석 및 교육적 활용 방안 탐구,” 대한수학교육학회지 수학교육학연구 제13권 4호(2003), 429-446.
3. 홍대용, 담헌서, 민족문화추진회(1974), 국역 담헌서 III, 고전국역신서 75.
4. 홍정하, 구일집/ 강신원, 장혜원 역(미간행).
5. 황윤석, 산학입문(1774)/ 강신원, 장혜원 역(미간행).
6. Arcavi, A., *History of Mathematics as a Component of Mathematics Teachers Background,* Ph.D. thesis: Part II: the learning materials, 1985.
7. Eves, H., *An Introduction to the History of Mathematics*, 1953/ 이우영 · 신항균 역, 수학사, 서울: 경문사
8. Kangshen, S. · Crossley, J.N. · Lun, A.W.-C., *The Nine Chapters on the Mathematical Art*, Beijing: Oxford University Press, 1999
9. Needham, J. · Wang Ling, *Science and Civilisation in China*, Mathematics and the Sciences of the Heavens and the Earth vol. 3, Cambridge at the University Press, 1959.

The Excess and Deficit Rule and The Rule of False Position

Dankook University **Hyewon Chang**

The Rule of False Position is known as an arithmetical solution of algebraical equations. On the other hand, the Excess-Deficit Rule is an algorithm for calculating about excessive or deficient quantitative relations, which is found in the ancient eastern mathematical books, including *the nine chapters on the mathematical arts*. It is usually said that the origin of the Rule of False Position is the Excess-Deficit Rule in ancient Chinese mathematics. In relation to these facts, we pose two questions:

- As many authors explain, the excess-deficit rule is a solution of simultaneous linear equations?
- Which relation is there between the two rules explicitly?

To answer these questions, we consider the Rule of Single/Double False Position and research the Excess-Deficit Rule in some ancient mathematical books of Chosun Dynasty that was heavily affected by Chinese mathematics. And we pursue their historical traces in Egypt, Arab and Europe. As a result, we can make sure of the status of the Excess-Deficit Rule differing from the Rectangular Arrays(the solution of simultaneous linear equations) and identify the relation of the two rules: the application of the Excess-Deficit Rule including supposition in ancient Chinese mathematics corresponds to the Rule of Double False Position in western mathematics.

In addition, we try to appreciate didactical value of the Rule of False Position which is apt to be considered as a historical by-product.

Key words: rule of single/double false position, excess and deficit rule, Chinese mathematics

2000 Mathematics Subject Classification: 01A13, 15A06, 97-03

ZDM Subject Classification: A30

논문 접수: 2004년 11월 11일,　　　심사 완료: 2004년 12월