

# CIP법을 이용한 구 좌표계에서의 천수 방정식 해석

윤성영<sup>1\*</sup>, 김수연<sup>1</sup>, 김현철<sup>2</sup>

## NUMERICAL ANALYSIS FOR THE SHALLOW WATER EQUATIONS ON THE SPHERE BY CIP METHOD

Seong Young Yoon, Soo Youn Kim, and Hyun Chul Kim

*In this study, the shallow water equations on the sphere is simulated by the proposed method which has high spatial resolution and is based on the CIP(Cubic Interpolated Pseudoparticle) method. The governing equations are approximated on the longitude-latitude coordinate system. To avoid the problems resulting from the convergence of the meridians toward high-latitude and singularities on the poles, the semi-Lagrangian and finite volume method are employed. In addition, the CIP method is employed to solve the advection equations and is extended to apply on the equations in the polar coordinate system. The mathematical formulation and numerical results are also described. To verify the efficiency, accuracy and capability of proposed algorithm, the standard test cases proposed by Williamson et. al are simulated and the results are compared with other results. As a result, it is found that the present scheme gives a good properties in preserving shapes of solution and settles the pole problems in solving the shallow water equations on the sphere.*

**Key Words:** CIP Method, Shallow water equation, Grid method, Spectral method, Semi-Lagrangian method

### 1. 서 론

구면상에서의 천수 방정식은 전구순환모델을 개발하고 개발된 모델을 검증하는데 중요한 기초자료를 제공해 주기 때문에 중요한 연구과제가 되어 왔다. Williamson 등[1]은 1992년 회전하는 구면상에서의 천수 방정식을 계산하는 모델을 검증하는 표준 벤치마크 문제를 제시하였다.

이 모델이 제안된 이후, 이 방정식을 계산하기 위해서 유한 차분법[2], 유한 체적법[3], Semi-Lagrangian법[4] 그리고 spectral법[5]을 이용한 수치결과들이 발표되었다.

현재 기상학에서 수치계산 모델에 사용되고 있는 방법을 크게 분류하면 유한 차분법과 유한 체적법과 같은 격자법(grid method)과 spectral 법으로 분류된다.

Jakob 등[5]은 spectral법을 이용하여 Williamson의 표준검

증문제 7가지를 계산하였으며 해석해가 존재하지 않는 문제들에 대한 수치해도 제시하여 많은 연구자들의 reference solution으로 많이 이용되고 있다.

이 방법은 계산의 정확도는 높지만 고해상도에서 계산을 할 경우 Legendre 변환에 따른 많은 계산부하가 증가하여 격자법에 비해서 비효율적인 단점이 있다. 이러한 문제점을 개선하기 위해서 정[6]은 구형 조화함수 대신 이중 Fourier 변환을 이용한 새로운 spectral법을 제안하였지만 이 방법 또한 고해상도에서의 문제점은 여전히 남아 있다.

Spectral법을 대체할 방법으로서 격자법이 사용되고 있다. 격자법은 spectral법보다는 정확도면에서는 우수하지 않지만 고해상도에서 병렬화를 고속화할 수 있는 점과 현재 열 유동계산 분야에서 개발된 다양한 수치방법을 적용할 수 있는 장점 등으로 인하여 많이 사용되고 있다.

이러한 장점에도 불구하고 이 방법은 구형 좌표계에서 극에서 특이점이 발생하거나 극에서 격자가 집중되어서 CFL제약 조건에 의한 적분시간이 많이 소요되는 문제점이 있다.

접수일: 2004년 6월11일, 심사완료일: 2004년 8월16일.

1 경희원, 영남대학교 기계공학부

2 비희원, 자동차부품연구원 첨단동력-IT융합연구센터

\* Corresponding author E-mail: syoon@yumail.ac.kr

따라서 본 연구에서는 shape conserving, 단조성을 만족하고 그리고 극 문제 해결을 할 수 있는 고차 Semi-Lagrangian법을 제안한다. 이를 위해서 Lagrangian법의 일종이고 높은 정확도와 수치적으로 안정성을 가지고 이류 계산방법으로 주목을 받고 있는 CIP법[7]을 사용하였다. 이 방법을 사용하여 구 좌표계에서의 천수 방정식을 계산하였다. 특히 구 좌표계에서 천수 방정식을 사용할 때 양 극에서 발생하는 singularity 문제를 해결하고 해의 정확도를 향상시키는데 그 목적을 두고 연구를 수행하였다.

또한 제안된 수치 방법의 유효성을 검토하기 위해서 구 좌표계에서 천수방정식을 사용하여 그 결과를 해석해와 다른 수치계산결과와 비교하여 본 수치방법의 정확성과 타당성을 검토하였다.

## 2. 수치해석방법

### 2.1 천수 방정식(Shallow Water Equations)

천수 방정식은 중력이 작용하는 공간에서 운동의 수직 성분이 수평성분에 비해서 무시할 수 있는 경우 자유표면의 운동을 기술하는 운동방정식이다. 이 방정식에서 운동의 수직 성분을 무시하기 때문에 연직방향으로는 hydrostatic 상태이며 그 운동은 수면두께를 평균한 비압축성 Navier-Stokes 방정식으로 귀환된다. 따라서 이 방정식은 대기·해양에 있어서 기류나 해류를 계산하는 중요한 계산모델에 많이 이용되고 있다. 현재 대부분의 대기 해양 수치모델은 구형좌표계를 사용하고 있으며 이 구형 좌표계에서 천수 방정식을 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial u}{\partial \theta} = - \left( f + \frac{u}{a} \tan \theta \right) v - \frac{g}{a \cos \theta} \frac{\partial h}{\partial \lambda} \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \theta} \frac{\partial v}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \left( f + \frac{u}{a} \tan \theta \right) u - \frac{g}{a} \frac{\partial h}{\partial \theta} \quad (2)$$

$$\frac{\partial h^*}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \theta} \frac{\partial h^*}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial h^*}{\partial \theta} = - \frac{h^*}{a \cos \theta} \left( \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial v \cos \theta}{\partial \theta} \right) \quad (3)$$

여기서  $f$  는 Coriolis 파라미터,  $g$  는 중력가속도,  $a$  는 지구 반경이다. Coriolis 파라미터는  $2\Omega \sin \theta$  로 주어지고,

$h^*$  는  $h - h_s$  로 정의된다.  $h$  와  $h_s$  는 각각 자유 표면의 높이와 지표면의 높이를 나타낸다.

### 2.2 이류항의 계산(Lagrangian Phase)

본 연구에서는 식 (1)-(3)으로 기술된 구형 좌표계에서의 천수 방정식을 이류항과 비이류항으로 분리하여 계산하였다. 이류항은 Semi-Lagrangian법을 이용하여 계산하였으며 비이류항은 오일러 격자계를 사용하여 유한 차분법을 사용하였다. 천수 방정식에서 이류항은 전미분을 사용하여 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad (4)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \theta} \frac{\partial v}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad (5)$$

$$\frac{dh^*}{dt} = \frac{\partial h^*}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \theta} \frac{\partial h^*}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial h^*}{\partial \theta} \quad (6)$$

여기서  $a$  는 구의 반경을 나타내고,  $\lambda$  와  $\theta$  는 각각 경도와 위도를 의미한다.

식을 간단히 나타내기 위해서 경도와 위도 방향의 속도 성분을 다음과 같이 정의한다.

$$U = \frac{u}{a \cos \theta}, V = \frac{v}{a} \quad (7)$$

식 (7)로 정의된 속도 성분을 사용하면 구면 좌표계에서의 이류 방정식은 다음과 같이 직교좌표계의 식과 같은 형식으로 나타낼 수 있다.

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + U \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} + V \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \quad (8)$$

여기서  $\phi = (u, v, h^*)$  는 2차원 천수 방정식의 종속 변수를 나타낸다.

그리고 위도와 경도 방향으로의 1차 미분에 대한 방정식은 식 (8)을 각각 경도와 위도에 대하여 1차 미분을 한 후 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \phi_\lambda}{\partial t} + U \frac{\partial \phi_\lambda}{\partial \lambda} + V \frac{\partial \phi_\lambda}{\partial \theta} = - U_\lambda \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} - V_\lambda \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \quad (9)$$

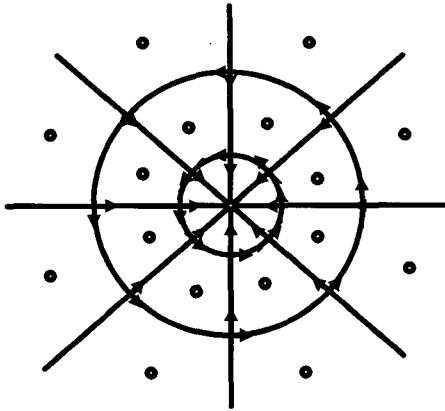


Fig.1 The distribution of variables on the Arakawa B grid around the pole (The hollow circle denotes the position of the  $h$ -variable)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_\theta}{\partial t} + U \frac{\partial \phi_\theta}{\partial \lambda} + V \frac{\partial \phi_\theta}{\partial \theta} \\ = -U_\theta \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} - V_\theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (10)$$

식 (8)-(10)을 사용하여 각 물리량과 그의 공간좌표에 대한 1차 미분에 대한 시간변화를 계산할 수 있다. 이 들 식은 참고문헌[8,9]에 기술되어 있는 방법을 사용하여 계 산하였다.

특히 구면 좌표계를 사용할 때 발생하는 극 문제를 해 결하기 위해서 양극( $\theta = \pm \pi/2$ ) 점에서는 스칼라량에 대 한 계산점만 위치하도록 하였다. 벡터량인 속도에 대한 계 산점은 극점에서 다가함수(multi-value function)를 가지게 됨으로 이러한 문제를 방지하기 위해서 Fig. 1과 같이 스 칼라량이 정의된 위치와 어긋나도록 하였다.

### 2.3 비이류항 계산(Eulerian Phase)

구형 좌표계상에서 천수 방정식을 Arakawa B 격자계를 사용하면 극문제 해결과 Coliris 항을 보다 정확하게 계산 할 수 있으므로 이 격자계를 사용하여 차분화를 하였다. 비이류항을 Arakawa B 격자계에서 유한 차분식을 사용하 면 다음과 같이 기술할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{du_{i,j}^{n+1}}{dt} = & - \frac{g}{a \cos \theta_{i,j}} \frac{\overline{h_{i+1/2,j}^n} - \overline{h_{i-1/2,j}^n}}{\Delta \lambda} \\ & + \left( f_{i,j} + \frac{u_{i,j}^n}{a} \tan \theta_{i,j} \right) v_{i,j}^n \end{aligned} \quad (11)$$

$$\frac{dv_{i,j}^{n+1}}{dt} = - \frac{g}{a} \frac{\overline{h_{i,j+1/2}^n} - \overline{h_{i,j-1/2}^n}}{\Delta \theta} \quad (12)$$

$$- \left( f_{i,j} + \frac{u_{i,j}^n}{a} \tan \theta_{i,j} \right) u_{i,j}^n$$

$$\begin{aligned} \frac{dh_{i,j}^{*n+1}}{dt} = & - \frac{h_{i,j}^{*n}}{a \cos \theta_{i,j}} \left( \frac{\overline{u_{i+1/2,j}^n} - \overline{u_{i-1/2,j}^n}}{\Delta \lambda} \right. \\ & \left. + \frac{\overline{v_{i,j+1/2}^n} \cos \theta_{i,j+1/2} - \overline{v_{i,j-1/2}^n} \cos \theta_{i,j-1/2}}{\Delta \theta} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

여기서  $\overline{u, v, h^*}$  는 검사체적의 표면에서 각 물리량을 선형 평균한 값을 나타낸다.

식 (11)-(12)은 운동량 방정식으로 극에서는 계산점이 없기 때문에 극에서 특이점을 가지지 않지만 스칼라량에 대한 방정식 (13)은 극에서 특이점을 가지기 때문에 계산 이 불가능하다. 그래서 Mc.Donald[10]가 사용한 것과 같이 극 주위에서는 유한 체적법을 사용하였다.

극 스칼라량에 대한 방정식 (13)을 벡터로 기술하면 다 음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{dh^*}{dt} = & - \frac{h^*}{a \cos \theta} \left( \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial v \cos \theta}{\partial \theta} \right) \\ = & - h^* \nabla \cdot \mathbf{u} \end{aligned} \quad (14)$$

위 식을 극을 둘러싸고 있는 검사면적에 대해서 적분을 하고 다시 가우스의 divergence 정리를 사용하면 스칼라량 에 대한 비이류 방정식은 선적분 형태로 변하여 식(15)의 형태로 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} \int_A \frac{dh}{dt} dA = & - \int_A h \nabla \cdot \mathbf{u} dA \\ = & - \int_s h \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} \end{aligned} \quad (15)$$

여기서  $A$ 와  $s$ 는 각각 면적분과 선적분을 나타낸다.

따라서 극 좌표계에서 천수 방정식을 계산할 때 발생하 는 극 문제는 진술한 semi-Lagrangian법과 식 (15)를 사용 함으로써 피할 수 있고 그리고 고차의 CIP법을 사용함으 로써 극 주위에서의 물리량의 변화를 보다 정확하게 계산 할 수 있다.

### 3. 수치해석 및 결과

구면상에서의 천수 방정식 해석을 위해 제안된 수치모델을 Williamson등이 제시한 검증문제에 적용하여 본 수치모델의 정확성과 실제문제에 적용 가능성 등을 검토하였다.

수치실험은 주로 극문제 해결 능력, 비선형항의 계산 정확도등에 목표로 수행되었다. 대상이 되는 문제로서 대기모델의 검증문제로서 많은 모델 개발자들이 많이 사용하고 그리고 많은 수치결과들이 발표되어 있는 Williamson[1]의 표준 검증 문제를 사용하였다. 이 검증문제는 초기조건, 경계조건 등과 같은 계산조건과 비교를 위해서 결과에 대한 형식 등이 잘 표준화 되고, 총 7가지의 검증문제가 제시되어 있다.

본 연구에서는 그 중에서 해석해가 존재하는 case 1과2 그리고 해석해가 존재하지 않는 case 5를 해석하였다. 해석해가 존재하지 않는 문제는 spectral 방법으로 얻어진 수치해를 사용하여 비교하였다. 정량적 비교를 위해서 Williamson[1]이 사용한 다음과 같은 표준오차식을 이용하였다.

$$\begin{aligned}
 I_1(\phi) &= \frac{I[|\phi(\lambda, \theta) - \phi_T(\lambda, \theta)|]}{I[|\phi_T(\lambda, \theta)|]} \\
 I_2(\phi) &= \frac{\{I[(\phi(\lambda, \theta) - \phi_T(\lambda, \theta))^2]\}^{1/2}}{I[\phi_T(\lambda, \theta)^2]^{1/2}} \\
 I_\infty(\phi) &= \frac{\max_{\lambda, \theta} |\phi(\lambda, \theta) - \phi_T(\lambda, \theta)|}{\max_{\lambda, \theta} |\phi_T(\lambda, \theta)|}
 \end{aligned} \tag{16}$$

여기서  $I(\phi)$ 는 다음과 같이 정의되는 전 지구에 대한 면적적분이다.

$$I(\phi) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \phi(\lambda, \theta) \cos\theta d\theta d\lambda \tag{17}$$

여기서  $\phi$ 는 해석해이고  $\phi_T$ 는 수치해를 나타낸다.

#### 3.1 Advecting cosine bell(case I)

Williamson이 제안한 강제 회전 문제[1]는 구형 좌표계에서 이류문제를 해석하는데 발생하는 여러 문제를 검증하는데 많은 연구자들에 의해서 인용되고 있다. 본 연구에서도 이 문제를 사용하여 제안된 수치방법에 의해서 계산을 수행하였고 그 결과를 해석해나 다른 연구자의 결과와

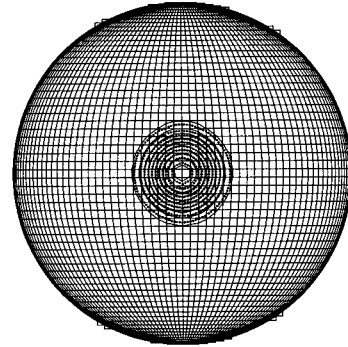


Fig.2 The comparison result for the rotating cosine bell after one revolution for  $\alpha = 0$  (solid : numerical, dotted : analytic)

비교하였다.

초기 조건으로 속도에 관해서는 경도방향,  $u(\lambda, \theta)$  과 위도방향,  $v(\lambda, \theta)$  의 성분은 각각 식 (18)로 주어진다.

$$\begin{aligned}
 u(\lambda, \theta) &= u_0(\cos\theta \cos\alpha + \sin\theta \cos\lambda \sin\alpha) \\
 v(\lambda, \theta) &= -u_0 \sin\lambda \sin\alpha
 \end{aligned} \tag{18}$$

여기서  $\alpha$ 는 구 좌표계의 두 극을 지나는 축과 실제 구형이 회전하는 축과 이루는 각을 나타낸다.

스칼라 함수  $h(\lambda, \theta)$ 에 대한 초기조건으로서 식 (19)에 주어진 것 같이 높이가  $h_0$ 인 cosine bell의 중심위치( $\lambda_c, \theta_c$ )에 위치하도록 설정하였다.

$$\begin{aligned}
 h(\lambda, \theta) &= \begin{cases} h_0/2 [1 + \cos(\pi r/R)] & \text{if } r < R \\ 0 & \text{if } r \geq R \end{cases}
 \end{aligned} \tag{19}$$

여기서

$$\begin{aligned}
 r &= \arccos[\sin\theta_c \sin\theta \\
 &\quad + \cos\theta_c \cos\theta \cos(\lambda - \lambda_c)]
 \end{aligned}$$

이다.

여기서 cosine bell의 중심위치( $\lambda_c, \theta_c$ )는 Fig. 2와 같이  $(3\pi/2, 0)$ 로 설정하였고, 그 밖의 상수 값은 Williamson이 사용한 것과 동일한 것을 이용하였다.

Table. 1 The comparison of standard global errors (grid : 128x64, time step : 256)

	$l_1$	$l_2$	$l_\infty$
CISL-N[11]	0.051	0.035	0.032
CISL-M[11]	0.094	0.091	0.108
Present	0.046	0.032	0.026

수치실험으로써 초기에 적도 상에 경도 270에 위치한 cosine bell이 적도를 따라서 지구를 1회전하는 수치실험을 하였다. 이 실험의 목적은 초기에 주어진 함수의 형태가 지구를 1회전 한 후 그 함수의 형태가 얼마나 잘 유지되는가를 검증하는 것이다.

Fig. 2에서는 cosine bell이 적도를 따라서 지구를 12일 동안 한바퀴 돌아서 원래자리로 돌아왔을 때를 형상을 나타낸 것이다. 그림에서 점선으로 표시된 것이 해석해이고 실선으로 나타낸 것이 수치해석의 결과이다. 이 그림에서 나타난 바와 같이 해석해와 본 계산결과로 얻은 cosine bell의 중심이 잘 일치하고 있으며 등고선의 분포에 있어서도 다른 수치결과들 보다 정확하게 계산된 것을 알 수 있다.

Fig. 3에서는 본 계산의 결과로서 Williamson이 제안한 표준오차의 12일 동안 변화를 나타낸 것이며, Table. 1은 표준오차를 다른 계산결과와 비교를 위해서 time step을 256으로 고정한 후 계산한 것을 Nair[11]의 계산 결과와 비교한 것이다.

Table. 1에서와 같이 본 계산의 결과를 Nair[11]의 결과와 비교하여 보면 CISL-N(no filter)과 CISL-M(단조-filter)의 결과 보다는 비교적 좋은 결과를 얻었다.

Fig. 4는 격자간격의 변화에 따른 표준오차( $l_1$ )의 변화를 나타낸 것이다. 그림에서 Grid level 1은 128x64에 해당하는 격자간격이며 grid level 2는 grid level 1에서 사용한 격자수의 2배를 의미한다. 그림에서처럼 계산격자수가 많아짐에 따라서 표준오차는 감소하지만 정확하게 3승에 비례해서 감소하는 경향은 보이지 않고 있다. 이것은 이류항 이외의 항은 중앙차분법을 사용하였고 또한 시간에 대한 적분도 2차정도의 정확도만 가지기 때문이며 이에 대한 개선이 요구된다.

### 3.2 Global steady state nonlinear zonal geostrophic flow(case II)

이 문제는 정상상태의 문제로서 초기에 정상상태의 해를 초기조건으로 사용하여 완전한 천수 방정식을 계산한

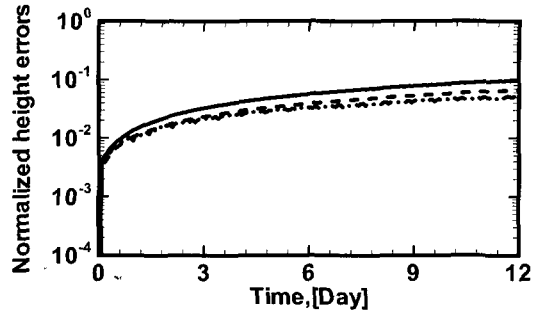


Fig. 3 The height errors  $l_1$ (solid),  $l_2$ (dash), and  $l_\infty$ (dash dot) versus time during one rotation for  $\alpha = 0$  ( time step :3600)

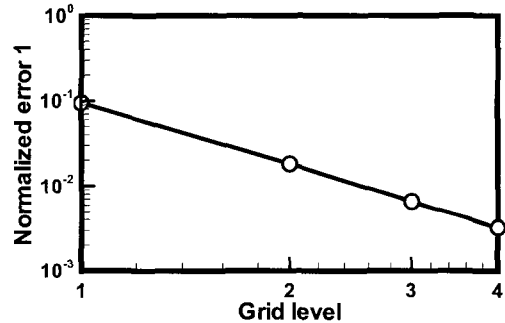


Fig. 4 The dependence of errors norm  $l_1$  on the grid's refinement for the standard test case I

후 이러한 상태가 얼마나 오래 동안 평형을 유지하는가를 계산하는 검증문제이다. 사용된 수치모델에 있어서 주어진 천수 방정식을 차분화할 때 발생된 수치적 오차를 간접적으로 평가할 수 있는 문제이다.

초기 속도와 스칼라 함수의 분포는 아래 식으로 주어지고 이들 식에 포함된 표준상수는 참고문헌[1]을 참고하였다.

$$h(\lambda, \theta, \alpha) = h_0 - \left( a\Omega u_0 + \frac{u_0^2}{2} \right) \cdot (-\cos\lambda \cos\theta \sin\alpha + \sin\theta \cos\alpha)^2 / g \quad (20)$$

여기서  $gh_0 = 2.94 \times 10^4 \text{ m}^2/\text{s}^2$  이고

$u_0 = 2\pi a / (12 \text{ days})$  이다.

이 조건을 사용하여 계산은 시간간격 202.5초 그리고 격자수 128x64 상에서 수행하였다.

계산결과로서 Williamson의 표준오차( $l_1, l_2, l_\infty$ )의 시간

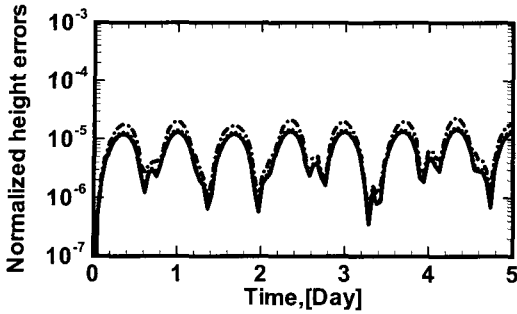


Fig. 5 The height errors  $l_1$  (solid),  $l_2$  (dash), and  $l_\infty$  (dash dot) versus time for 5 days

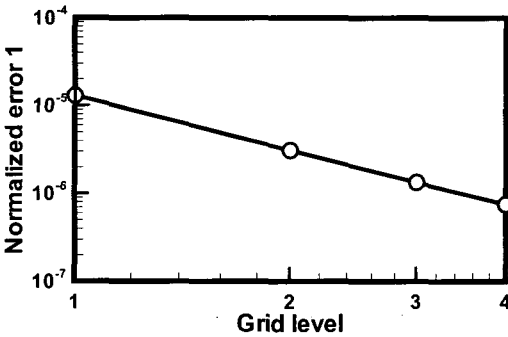


Fig. 6 The dependence of errors norm  $l_1$  on the grid refinement for the standard test case II

변화를 계산하여 5일 동안 시간적분한 후 그 결과를 Fig. 5에 나타내었다.

비록 spectral 범의 표준오차보다는 크지만 5일 동안  $2.0 \times 10^{-5}$  이하를 유지하고 있는 것을 볼 수 있다. 이 결과는 다른 격자법[12,13,14]의 것 보다

작은 값으로 본 계산결과가 보다 정확하다는 것을 알 수 있다.

같은 격자법을 사용한 Heikes, Stuhne, 그리고 Tomita 등의 계산결과는  $1.0 \times 10^{-4}$  이상의 표준 오차를 보이고 있다.

이 경우에 있어서도 case I과 마찬가지로 계산격자수에 대한 표준오차의 의존도를 나타낸 것이 Fig. 6이다. 격자수의 증가에 따라서 전 시스템 오차는 감소하고 있다. 그 표준오차감소의 정도는 case I의 경우에서 설명한 것과 같이 3차정도로 감소하지는 않고 있다.

### 3.3 Zonal flow over an isolated mountain (case V)

이 문제는 회전하는 구형 상에서 지형이 존재할 경우로 서 이전 문제와 달리 비정상 상태의 계산문제이다. 기

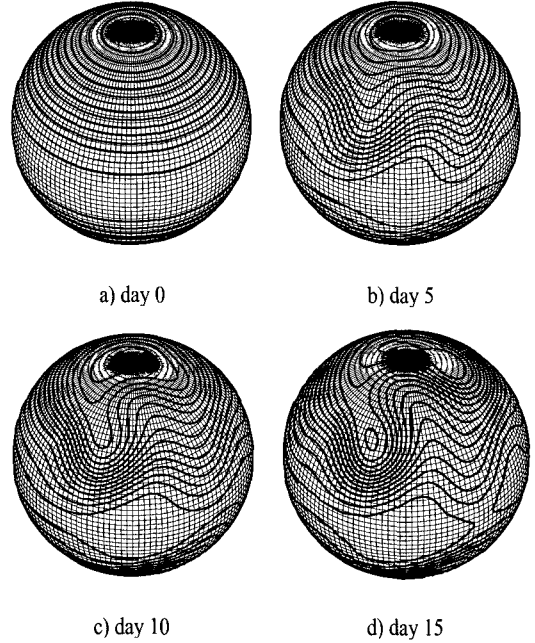


Fig. 7 Zonal flow over an isolated mountain; height field

류의 초기 분포는 case II와 같이 가정하였다. 지형으로는 높이 2000m의 산이 경도 90W도 위도 30N도의 위치에 설정하였다.

$$h_s = h_{s0}(1 - r/R) \tag{21}$$

여기서

$$\begin{aligned} r^2 &= \min[R^2, (\lambda - \lambda_c)^2 + (\theta - \theta_c)^2] \\ h_{s0} &= 2000 \text{ m}, R = \pi/9 \\ \lambda_c &= 3\pi/2, \theta_c = \pi/6 \end{aligned} \tag{22}$$

계산은 128x64의 등간격 격자를 사용하였고, 시간적분 시간 간격은 극 부분에서의 CFL조건을 고려하여 30.0초로 설정하여 계산을 수행하였다. 계산 결과는 Fig. 7과 8에 나타내었다.

Case V의 경우 회전하는 지구표면에 지형의 영향으로 스칼라량의 분포가 시간에 따라서 변화하는 완전한 비정상 상태의 문제이다. Fig. 7은 시간적분을 15일까지 수행하여 초기상태와 시각 5일, 10일 그리고 15일후에 있어서 지표면의 스칼라량의 분포를 나타낸 것이다.

지형이 설정된 (90W,30N)의 주위에서 큰 등고선의 변

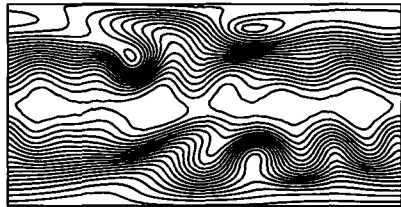
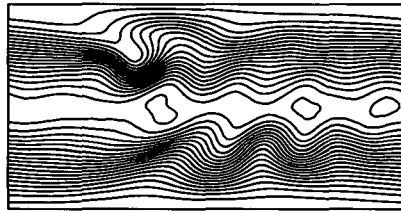
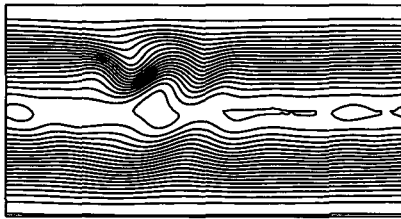
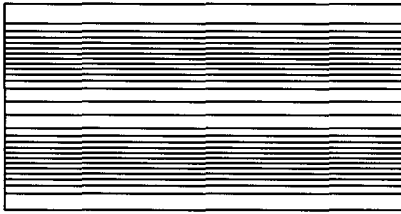


Fig. 8 Zonal flow over an isolated mountain; height field after day 0, day 5, day 10, day 15(from upper to lower)

화를 볼 수 있으며 비교적 낮은 공간 해상도를 가지고도 극 주위에서도 큰 수치적 오차 없이 스칼라량의 변화를 본 연구에서 제안된 방법으로 잘 계산하고 있음을 알 수 있다.

Fig. 8과 9는 본 연구에서 제안된 계산법과 spectral 법의 결과이다. 비교하기 위해서 그 결과를 각각 2차원 평면에 나타낸 것이다. 이 문제의 경우 해석해가 존재하지 않기 때문에 정량적인 비교는 어렵지만 해석해와 가까운 spectral 법[5]의 수치결과(Fig. 9)나 다른 격자법의 결과와 비교할 수 있다. 그림에서와 같이 Tomita 등[13]이 언급한 비선형 항에 의해서 발생하는 노이즈나 차분에 의한 오차는 크게 나타나지 않았으며 spectral 법[5]이나 double Fourier

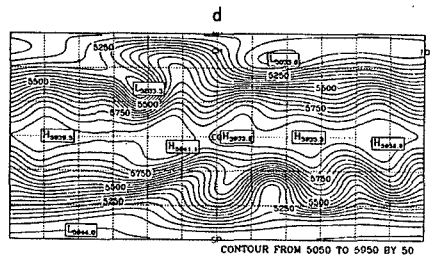
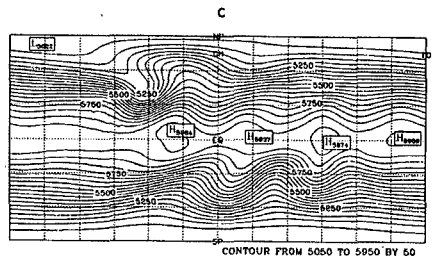
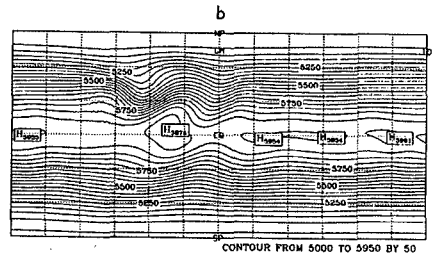
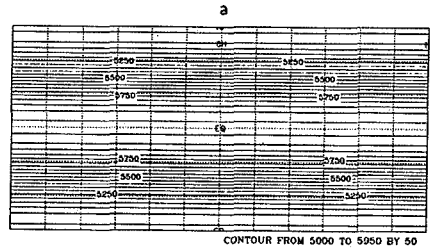


Fig. 9 Zonal flow over an isolated mountain; height field after day 0, day 5, day 10, day 15(from upper to lower)

법[6] 그리고 Icosahedral 격자[14]를 사용한 수치해와 비슷한 결과를 얻었다.

#### 4. 결 론

본 연구에서는 CIP법을 사용하여 구 좌표계에서의 천수 방정식을 계산하는 모델을 제시하였다. 제안된 수치모델의 정확도와 타당성을 검증하기 위해서 Williamson의 검증문제에 제안된 수치방법을 적용하여 정량적으로 다른 수치모델의 결과와 비교하였다.

제시된 모델에 사용된 CIP법은 고차의 공간 분해능을 가지는 계산수법으로 수치진동이나 수치확산이 적기 때문

에 천수 방정식의 이류계산을 다른 수치방법들 보다 더 정확하게 계산 할 수 있었다. 이 외에도 CIP법은 Semi-Lagrangian법의 일종이기 때문에 구면상에서 천수 방정식을 계산할 때 발생하는 극문제를 해결할 수 있었다.

계산결과 구 좌표계를 사용할 때 발생하는 수치 진동이나 수치 확산과 같은 문제는 나타나지 않았고 해석해와 비교하였을 때 비슷한 결과를 얻었다. 그리고 최근의 다른 몇몇 연구결과와 비교했을 때 본 계산의 결과가 보다 정확한 것을 알 수 있었다.

이상의 결과로부터 본 연구에서 제안된 방법이 구 좌표계에서 천수 방정식을 보다 정확하게 계산할 수 있었고 제안된 방법의 타당성을 검증할 수 있었다.

## 후 기

이 연구를 수행하는데 있어서 BK21의 지원에 감사드립니다.

## 참고문헌

- [1] Williamson, D.L. and Rasch, P.J., 1989, "Two-Dimensional Semi-Lagrangian Transport with Shape-Preserving Interpolation," *Monthly Weather Review*, 117, pp.102-129.
- [2] Smolarkiewicz, P.K. and Rasch, P.J., 1991, "Monotone Advection on the Sphere: An Euler Versus Semi-Lagrangian Approach," *Journal of the Atmospheric Sciences*, 48, pp.793-810.
- [3] Rasch, P., 1994, "Conservative shape-preserving two-dimensional transport on a spherical reduced grid," *Monthly Weather Review*, 122, pp.1337-1350.
- [4] Staniforth, A. and Cote, J., 1991, "Sime-Lagrangian integration schemes for atmospheric models," *Monthly Weather Review*, 119, p.2206.
- [5] Jakob, R., Hack, J.J., and Williamson, D.L., 1993, "Solutionsto the Shallow Water Test Set Using the Spectral Transform Method," *NCAR Technical Note*.
- [6] Cheong, H.B., 2000, "Application of Double Fourier Series to the Shallow Water Equations on a Sphere," *Journal of Computational Physics*, 165, pp.261-287.
- [7] Yabe, T. and Aoki, T., 1991, "A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial interpolation," *Computer Physics Communications*, 66, pp.219-232.
- [8] Yoon, S.Y., Tanaka, Y., Xiao, F., and Yabe, T., 2001, "Numerical simulation of shallow water equations using CIP Method with high order spatial resolution," 2001 *Workshop on the Solution of Partial Differential Equations on the Sphere*, Montreal, Canada, p.19.
- [9] 윤성영, 2004, "Semi-Lagrangian법을 이용한 구좌표계에서의 이류방정식 해석," *한국전산유체공학회지*, 제9권, 제3호.
- [10] McDonald, A. and Bates, J.R., 1989, "Semi-Lagraian Integration of a Gridpoint Shallow Water Model on the Sphere," *Monthly Weather Review*, V.117, pp.130-137.
- [11] Nair, R.D., Machenhauer, B., 2002, "The Mass-Conservative Cell-Integrated Semi-Lagrangian Advection Scheme on the Sphere," *Monthly Weather Review*, 130, pp.649-667.
- [12] Heikes, R. and Randall, D.A., 1995, "Numerical Integration of the Shallow-Water Equations on a Twisted Icosahedral Grid," *Monthly Weather Review*, 123, pp.1862-1880.
- [13] Stuhne, G.R. and Peltier, W.R., 1999, "New icosahedral grid-point discretizations of the shallow water equations on the sphere," *Journal of Computational Physics*, 148, 23.
- [14] Tomita, H., Tsugawa, M., Satoh, M., and Goto, K., 2001, "Shallow Water Model on a Modified Icosahedral Geodesic Grid by using Spring Dynamics," *Journal of Computational Physics*, 174, pp.579-613.