

다중해상도해석을 이용한 콘크리트 재료의 수치적 동질화

이인규^{1)*}·노영숙²⁾

¹⁾ 한국철도기술연구원 ²⁾ 서울산업대학교 건축공학과

(2005년 2월 28일 원고접수, 2005년 10월 31일 심사완료)

Numerical Homogenization in Concrete Materials Using Multi-Resolution Analysis

In-Kyu Rhee^{1)*} and Young-Sook Roh²⁾

¹⁾ Track & Civil Engineering Dept., Korea Railroad Research Institute, Uiwang, 437-757 Korea

²⁾ Dept. of Architectural Engineering, Seoul National University of Technology, Seoul, 140-714 Korea

(Received February 28, 2005, Accepted October 31, 2005)

ABSTRACT

The stiffness properties of heterogeneous concrete materials and their degradation were investigated at different levels of observations with aids of the opportunities and limitations of multi-resolution wavelet analysis. The successive Haar transformations lead to a recursive separation of the stiffness properties and the response into coarse-and fine-scale features. In the limit, this recursive process results in a homogenization parameter which is an average measure of stiffness and strain energy capacity at the coarse scale. The basic concept of multi-resolution analysis is illustrated with one and two-dimensional model problems of a two-phase particulate composite representative of the morphology of concrete materials. The computational studies include the meso-structural features of concrete in the form of a bi-material system of aggregate particles which are immersed in a hardened cement paste taking due account of the mismatch of the two elastic constituents.

Keywords : multi-resolution homogenization, Haar wavelets, damage mechanics of coarse and fine scale features

1. 서 론

일반적으로 건설 재료는 거시적으로 균질성을 가지며 동시에 등방성 재료이다. 이러한 가정은 대부분의 경우에 적절하지만 진행성 손상을 받는 비균질 재료의 경우 미세 규모에서 발생하는 미세 구조적 현상을 고려하여야 설명할 수 있다. 이러한 손상은 각각의 미세규모 구조의 구성물, 구성물간의 계면 특성과 형태학적 구조에 영향을 받는다. 실용적인 측면에서 볼 때, 미세 흠집들의 영향이 동질화되어 연속체의 거시적 손상형태로의 묘사가 필요하다. 비슷한 예로 구조공학의 관점에서도 교량이나 댐과 같이 대형 사회기반시설물의 수명성능예측에 이러한 거시적 동질화 과정이 필요하다. 따라서 미세규모의 손상과 연속체 단위의 거시적 구조의 성능저하간의 상호연관 관계에 대한 관심이 필요하다. 이러한 의문을 해소하기 위해 이질 재료를 가진 다상 복합체의 재료특성과 동등한 유효재료

특성의 개발에 대한 연구를 하는 복합구조역학 분야에서도 상당한 연구가 진행되고 있다. 다양한 동질화 개념에 대해 과거에 발표되었으며, 분산된 미세손상의 통계적 균질성을 확보할 수 있을 만큼 충분히 큰 대표 체적요소(RVE)에 대해 적합한 결과였다^{3,4,6)}. 이러한 동질화 기술은 통계적 균질성의 손실과 국부적 손상을 일으키는 미세규모의 손상에 지배되는 거시규모의 강도 또는 연성의 한계에 대한 적용을 구성물간의 혼입률에 기초로 한 변분적 평균을 이용하여 미세규모 대 거시규모 간, 각 구성물의 탄성계수 대 유효 탄성계수 간의 다대일 사상으로 유도하였다.

미세규모에서 재료 손상은 음(non-positive)의 강성감소분을 발생시키며 강도 또는 더 중요한 인자로 연성의 한계, 즉, 거시연속체의 변형성능의 한계에 대해 특이성(singularity)을 발생시킨다. 이러한 손상 진행은 재료 구성물간의 약한 계면 층에서 보통 시작되며 주요 인자인 미세단위의 접선탄성계수의 양의 정부호성 상실, 철면성의 상실 그리고 타원성의 상실 등이 거시범위의 강한 불연속성으로 이어진다. 따라서 핵심적인 목표는 미시적 복합손

* Corresponding author

E-mail : rhee@krii.re.kr

©2005 by Korea Concrete Institute

상 특성으로부터 양의 특성, 즉, 건전성(또는 잔존구조성)을 분리해내는데 있으며 타원성의 상실과 연관되어 있는 미시적 높은 주파수 특성으로부터 거시적 낮은 주파수 특성을 분리하기 위해 다중해상도 웨이블릿 해석 (multi-resolution wavelet analysis)^{1,4)} 을 이용하여 새로이 탄성손상부분의 분리, 추출 및 정량화와 수치동질화과정을 통한 거시적 손상추정으로의 응용을 시도하고자 한다.

2. 다중해상도해석을 이용한 동질화

본 절에서는 다중해상도해석(MRA)을 이용한 해의 동질화 그리고 불연속 웨이블릿변환을 이용한 미세규모의 해로부터 거시규모의 해를 추출하는 방법에 대해 논의한다. 이 흥미로운 계산 동질화 연구영역에는 Brewer와 Beylkin(1995), Steinberg와 McCoy(1996), Beylkin과 Coult¹⁾, Gilbert⁴⁾ 그리고 Doborantu 와 Enquist(1998) 등이 다양하게 연구하였다. 그러나 아직 이러한 '아래 단계 및 위 단계로의 투영 방법' 을 이용한 해를 구하는 방식을 적용한 복합구조분야 연구는 매우 드물다. 이 방식의 흥미로운 점은 생성(span, $W \subset R^n$) 단계범위로 복합구조에서 보면 미세구조규모의 특성, 즉 이질성의 순차적인 단계별 동질화로 표현될 수 있다. 이때의 생성기준은 미세구조의 국부적인 손상이 동질화된 거시규모의 구조로의 전달될 때 '크기효과(size effect)' 를 나타낸다. 물론 여기서의 크기효과는 Bazant와 Planas(1997)의 그것과는 다르다.

2.1 다중해상도해석

많은 물리적 문제들은 다양한 범위에서의 해석을 요구한다. 이질적 재료에서는 전형적으로 미세규모 그리고 거시규모로 나눌 수 있다. 일반적으로 '동질화' 에서는 미세규모의 거동을 거시규모의 거동으로부터 상당히 잘 분리해내야 한다. 최근에 Beylkin과 Coult¹⁾에 의해 인접규모간의 전이를 동질화하는 방법이 MRA로 제안되었다. 이 반복적인 과정은 축소과정과 그의 반대인 재구성과정으로 되어 있으며 다양한 규모에 대해 반복이 가능하다. 축소과정의 기본단계는 대수 다중격자망 해석 (algebraic multi-grid methods) 이나 영역분할방법 (domain decomposition methods) 에서 중요한 역할을 하는 Schur 여행렬적(complement)의 계산이 포함되어 있다. 여기서 이들 축소된 형식의 등식들은 원함수의 타원성을 온전히 보존하여야 하며 이를 바탕으로 반복적인 축소 과정을 할 수 있다.

다중해상도해석의 기본논리는 선형대수의 예제, $Kr=f$ 를 가지고 설명할 수 있다. K 는 $2^n \times 2^n$ 행렬이며, r 과 f 는 각각 변위와 하중벡터이다. Figs. 1과 2의 Haar 웨이블릿

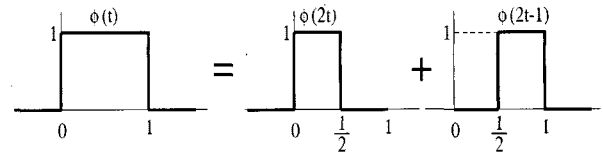


Fig. 1 The Haar scaling function, $\phi(t)$, $\phi(2t)$ and $\phi(2t-1)$

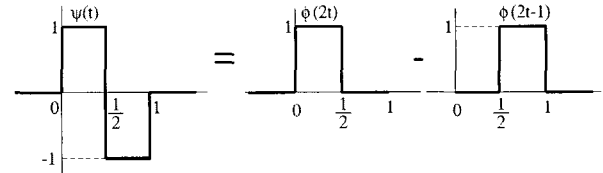


Fig. 2 The Haar wavelet function, $\psi(t)$

릿²⁾을 이용한 이산변환과 함께 직교변환에 의해 기저가 식(1)과 같이 변환될 수 있다.

$$r_s = \frac{1}{\sqrt{2}}(r_{2k+1} + r_{2k}), \quad r_d = \frac{1}{\sqrt{2}}(r_{2k+1} - r_{2k}) \quad (1)$$

여기서, $k = 0, \dots, 2^{n-1} - 1$ 이며 r_s 의 성분은 본질적으로 인접 계수의 평균이며(정확한 산술평균과는 $\sqrt{2}$ 의 차이가 있다), r_d 의 성분은 인접계수의 차분이다. 식(2)는 이산 Haar 변환행렬, $2^n \times 2^n$ 을 보여준다.

$$M_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ & & & \ddots & & & \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ & & & \ddots & & & \end{bmatrix} \quad (2)$$

만약 M_n 의 상부절반행렬을 P_n 그리고 하부절반행렬을 Q_n 로 정의하면 식(3)과 같으며, 각각 직교성을 가지고 있다.

$$\begin{aligned} M_n^T M_n &= M_n M_n^T = Q_n^T Q_n + P_n^T P_n = I \\ Q_n Q_n^T &= P_n P_n^T = I \end{aligned} \quad (3)$$

선형 구조계를 두 개의 미지벡터를 가진 두 개의 등식으로 분리하면, $P_n r = r_s$ 그리고 $Q_n r = r_d$ 가 되며 각각의 등식에 P_n 을 가하고, 첨자를 제거하면 식(4)와 같다.

$$PKr = (PKP^T)Pr + (PKQ^T)Qr = Pf \quad (4)$$

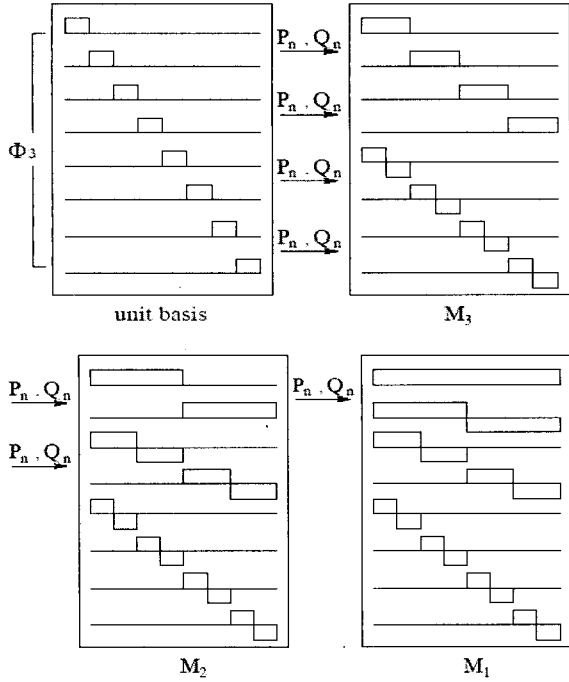


Fig. 3 The Haar wavelet basis

비슷하게 각각의 등식에 Q_n 을 가하면 식(5)와 같고,

$$QK_r = (QKP^T)Pr + (QKQ^T)Q_r = Qf \quad (5)$$

이 두 식을 분할영역으로 정리하면 다음 식(6)과 같다.

$$\begin{aligned} K_{ss} &= PKP^T, & K_{sd} &= PKQ^T \\ K_{ds} &= QKP^T, & K_{dd} &= QKQ^T \\ f_s &= Pf, & f_d &= Qf \end{aligned} \quad (6)$$

변환된 계는 식(7)와 같이 축소되며 변환 과정은 Fig. 3에서도 확인할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} K_{ss} & K_{sd} \\ K_{ds} & K_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_s \\ r_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_s \\ f_d \end{bmatrix} \quad (7)$$

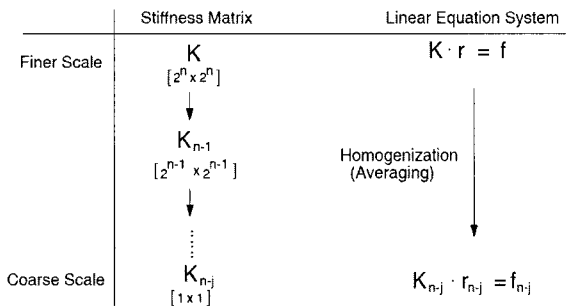


Fig. 4 MRA reduction procedure

만약 K_{dd} 의 역행렬이 존재한다고 가정하면, 하위규모의 변수 r_d 를 상위규모의 변수 r_s 를 통해 식(8)과 같이 구할 수 있다.

$$r_d = K_{dd}^{-1}f_d - K_{dd}^{-1}K_{ds}r_s \quad (8)$$

상위규모의 변수 r_s 의 축소된 등식은 Schur 역행렬적⁵⁾이 포함되며, r 의 평균값을 결정한다. 다른 말로 표현하자면, 식(9)는 하위규모의 거동인 r_d 의 기여가 포함된 r_s 의 평균에 대한 정확한 '유효' 등식이 된다. 여기서 우리는 축소된 등식의 자유도는 원 구조계의 절반으로 줄어드는 것에 주목한다.

$$[K_{ss} - K_{sd}K_{dd}^{-1}K_{ds}]r_s = f_s - K_{sd}K_{dd}^{-1}f_d \quad (9)$$

또한, 원 구조계가 완전한 형태로 보존된 축소된 단계를 보여준다. 원 구조계는 그의 절반의 자유도를 가진 $K_{n-1}r_s = f_{n-1}$ 로 축소되며 변수 $r_s = P_{n-1}r_j$ 는 우리의 주요관심 변수이다. 이러한 축소 과정은 식(10)과 (11)에 의해 반복적으로 가능하며,

$$\begin{aligned} K_{j-1} &= K_{ss} - K_{sd}K_{dd}^{-1}K_{ds} \\ f_{j-1} &= P_{n-1}f_j - K_{sd}K_{dd}^{-1}Q_{n-j}f_j \end{aligned} \quad (10)$$

여기서,

$$\begin{aligned} K_{ss} &= P_{n-j}K_jP_{n-j}^T, & K_{sd} &= P_{n-j}K_jQ_{n-j}^T \\ K_{ds} &= Q_{n-j}K_jP_{n-j}^T, & K_{dd} &= Q_{n-j}K_jQ_{n-j}^T \end{aligned} \quad (11)$$

이들 반복 과정에서는 단지 행렬 K_j 와 벡터 f_j 만이 포함되어 있다. 다시 말하면, 우리는 어느 축소단계에서도 원 구조계의 미지벡터 r 을 직접 계산하지 않는다. 이렇게 원 구조계가 n 번의 축소단계를 거치면 스칼라 계수를 가진 단자유도계로 변환되며, 이때의 해는 축소된 하중에 의해 쉽게 구해진다. 이러한 스칼라 등식은 전체 해인 r 의 '평균' 거동이며 거시대표거동이다. 만약 우리가 거시거동에 관심이 있다면 원 구조계의 해를 전체적으로 계산하지 않고도 축소과정을 통해 이러한 거동을 정확하게 결정할 수 있다. 물론 이러한 다중해상도방법은 다른 선형대수계의 효과적인 해를 구하는 방법에 비해 그 계산속도가 빠르지는 않다. 그러나 이러한 축소 과정은 거시규모의 거동인 평균 해를 알 수 있으며 다시 말하면 스칼라로 표현될 수 있는 동질화된 강성 특성을 제공한다. Fig. 4는 다중해상도해석을 이용하여 반복적인 축소 및 복원관계에 대한 설명이다.

2.2 원 · 축소 구조계간의 유계 특성

축소과정에서의 유계는 강성행렬의 2차 형식의 Rayleigh-Ritz 방식으로부터 강성행렬 K_o 의 최소고유치를 하계로 최대고유치를 상계로 하여 다음 식(12)와 같이 간단히 정의할 수 있다.

$$\lambda_{\min} \leq \mathbf{r}^T K_o \mathbf{r} \leq \lambda_{\max}, \quad \forall \mathbf{r} \neq \mathbf{0} \quad (12)$$

재료역학의 관점에서는 이들 고유치는 재료내부의 변형 에너지를 의미한다. 웨이블릿 변환의 직교성 덕분에 원 구조계의 스펙트럼 특성이 축소된 구조계에서도 보존된다. 그러나 이들 축소 구조계, $R_j = K_{ss} - K_{sd} K_{dd}^{-1} K_{ds}$ 의 스펙트럼 특성은 정적응축과정(static condensation process)⁵⁾으로 인해 하계와 상계조건을 식(13)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\lambda_{\min} \leq \mathbf{r}_s^T R_j \mathbf{r}_s \leq \lambda_{\max}, \quad \forall \mathbf{r}_s \subset \mathbf{r} \neq \mathbf{0} \quad (13)$$

문제는 최소고유치의 변화가 얼마나 크지에 달려있다. 다음 식(14)-(16)은 Beylkin 과 Coult¹⁾의 제안으로, 타원성은 원 강성행렬이 양의 정부호이면 보존되며 또한 이들은 축소과정에서 최소고유치가 잘 보존되는 것을 나타내고 있다. 구체적인 내용을 확인하기 위해 1차원, 2차원 예제들을 가지고 3절에서 축소된 계의 최소고유치가 매우 작은 증가를 보이는 점을 소개할 것이다.

웨이블릿 기저 V_j 에서 K_j 가 자기수반적이고, 양의 정부호를 가진 연산자인 경우 식(14)와 같이 표현할 수 있다.

$$m \|\mathbf{r}\|^2 \leq \mathbf{r}^T K_j \mathbf{r} \leq M \|\mathbf{r}\|^2, \quad \forall \mathbf{r} \in V_j \quad (14)$$

여기서, $0 \leq m \leq M$ 이고, 그러면 축소된 계의 스펙트럼 특성은 식(15)와 같이 원 구조계의 상계와 하계를 유지하게 된다.

$$m \|\mathbf{r}\|^2 \leq \mathbf{r}^T R_j \mathbf{r} \leq M \|\mathbf{r}\|^2, \quad \forall \mathbf{r} \in V_{j+1} \quad (15)$$

웨이블릿 변환 후 분할된 행렬의 스펙트럼 유계를 만족시키므로 다음 식(16)과 같은 부등조건을 형성한다.

$$(\mathbf{r}^T K_{ss} \mathbf{r}) \leq M \|\mathbf{r}\|^2 \quad (16)$$

다중분해해석에 대해 직교성을 제외하고는 아무런 다른 가정을 하지 않았기에 이 유계특성은 차원이나 웨이블릿 기저의 선택 등에 영향을 받지 않는다. 식(15)에서의 타원성의 설정은 K_j 의 최소고유치가 R_j 의 최소고유치와 동일

한 조건하에서 그리고 얼마나 이들의 상계가 가까운지에 관해 매우 중요한 질문을 주고 있다. 명백하게도 이 질문의 답은 축소 구조계에 의해 확인된 원 구조계의 기본모드의 특성이 얼마나 잘 분리, 축소되는가에 따라 달려있다.

3. 2상 복합체의 동질화

이전 절까지는 다중해상도 해석을 통한 원 구조계의 축소화 방법과 그의 역인 복원화에 대한 알고리즘을 알아보았고 이를 통한 미세손상정도의 거시손상의 영향 추정에 이용하고자 한다. 또한 각 축소단계별 구조계의 최소고유치의 상계가 보존되는 여부, 완전손상(균열)으로 인한 특이성의 판별여부 등을 살펴보도록 한다. 이를 위해 1차원 주기성 2상 복합체, 즉 낮은 탄성계수를 가진 매트릭스(matrix)에 혼입되어 있는 상대적으로 강한 탄성계수를 가진 골재혼입물(inclusion)의 예제로 동질화 문제를 살펴 보도록 한다. 유사한 개념으로 2차원 문제에 관한 동질화 문제도 유한요소해석 결과와 비교 분석 하였다.

3.1 1차원 주기성 2상 복합체

Fig. 5에 나타나 있는 약한 매트릭스와 주기적인 배열을 갖는 강한 입자들로 구성되어 있는 일차원 모델에 대해 생각해 보자. 두 재료 모두 선형거동을 한다고 가정하고 그의 강성 비, E_a/E_m 는 3이며, $E_m = 10$ 이다. 총 64개의 트러스 요소로 구성되고 그 길이가 1이며 자유도 n 이 2^6 인 이 구조물의 스펙트럼특성은 $\lambda_{\min} = 8.82701 \times 10^{-3}$ 에서 $\lambda_{\max} = 7.99647 \times 10^1$ 까지이다. 식(10)-(11)에 의한 반복적인 축소방법을 이용하여 6회의 동질화 과정을 거친 후 최종 평균 강성특성은 $K_{ss}^{homog} = 1.06101 \times 10^{-2}$ 이며, 이 스칼라 강성은 거시규모의 단자유도계로의 전환을 의미한다.

선형해석에 있어서 초기 64 자유도계의 평균 축 방향 변위는 $\bar{\mathbf{r}}_{FEM}^{64} = 2.1833$ 이며 이는 미세규모의 해의 반복적

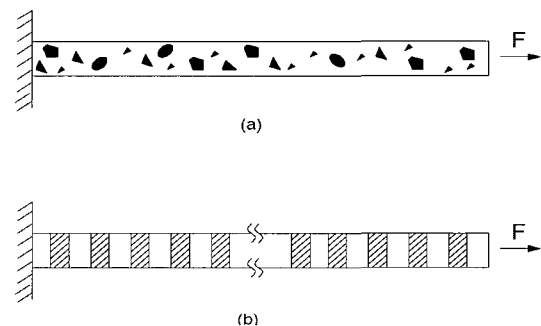


Fig. 5 1-D axial bar problem made of periodic two phase composite material

인 평균값이 전체 해에 변화를 주지 않는다. 다시 말하면 최종동질화 과정을 거친 거시규모의 단자유도계의 해인 $r_{MRA} = 2.1833$ 과 동일하기 때문이다. 더불어 일차원 직렬 구조의 응답으로 복합구조계의 동질화 해인 $r_{Reuss} = 2.1833$ 과도 동일하며 이 해는 직렬구조의 경우 정확한 해를 제공하는 Reuss³⁾ 유효계수의 하계를 의미한다.

Fig. 6(a)에서는 각 축소단계에서 최소고유치가 점차적으로 증가하는 것을 보여주고 있으며, 원 강성행렬의 최소고유치의 상계와 마지막 2회 축소단계를 제외하고는 매우 근접함을 보여주고 있다. 이는 각 축소단계가 원 구조계의 스펙트럼을 잘 보존하고 있음을 의미하며 변형에너지 또한 동일하게 보존됨을 알 수 있다. 실제로 탄성 변형에너지는 고유모드와 최소고유치의 2중적으로 표현되므로

원 구조계의 스펙트럼의 보존은 매우 중요한 의미를 갖는다. Fig. 6(b)에서는 원 강성행렬 및 최종축소단계(거시규모)의 강성행렬의 최소고유치에 대한 끝재부분의 손상에 따른 영향을 보여주고 있다. 여기서 최종 동질화된 강성스칼라의 성능저하 곡선은 진행성 손상스펙트럼의 상계에 해당하며, 원 구조계의 손상스펙트럼은 하계를 유지하여 실제 해에 해당한다. 각 축소단계, $\mathbb{R}^5, \dots, \mathbb{R}^0$ 은 이들 상계와 하계곡선 사이에 순차적으로 유계한다. 완전손상을 입은 직렬구조의 특이성은 $D_E \rightarrow 1$ 되었을 때 스칼라 강성계수 또한 구조계의 불안정을 의미하는 특이성, $K_{ss}^{homog} \rightarrow 0$ 을 보여주고 있다. 특이성에 영향을 주는 조건을 보다 상세하게 관찰하기 위해 Fig. 7(a) 와 (b)에서는 각각 원 강성행렬 그리고 최종축소단계의 강성행렬의

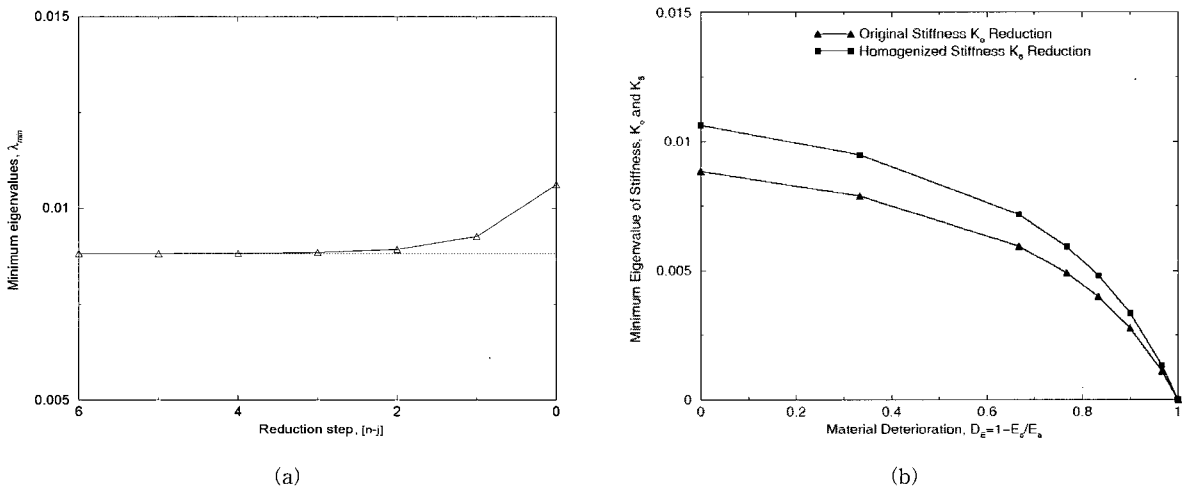


Fig. 6 1-D axial bar problem: (a) upper bound properties of minimum eigenvalues at different cycles of reduction, (b) variation of minimum eigenvalue of stiffness, K_0 and K_6 due to progressive deterioration of aggregate stiffness

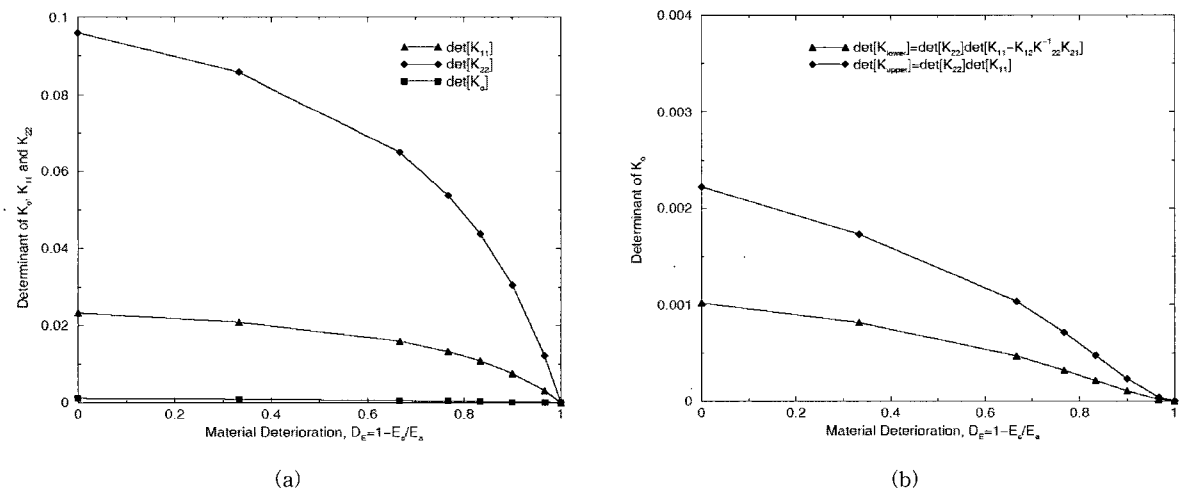
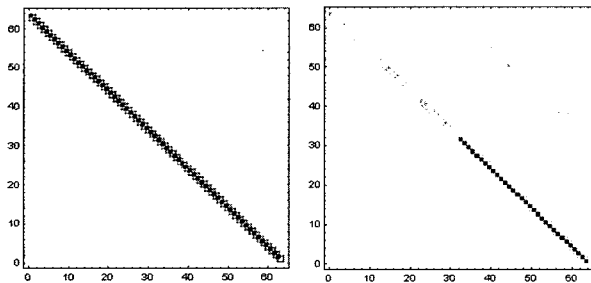


Fig. 7 1-D axial bar problem: (a) effect of material degradation on determinant of unreduced bar problem K_0 , and the homogenized partitions K_{11} , K_{22} after six reductions, (b) upper bound property of determinant product after six reductions

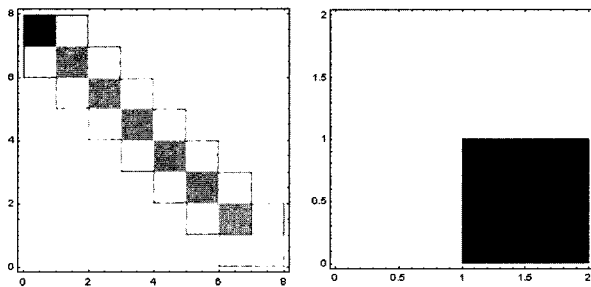
건전부분 K_{11} , 손상부분 K_{22} 그리고 결합부분 $K_{12}K_{22}^{-1}K_{21}$ 을 분할하여 Schur 행렬식 정리⁵⁾를 이용하여 골재부분의 진행성 손상에 따른 각 분할행렬의 행렬식의 변화를 나타내었다. 원 64×64 강성행렬에 대한 좁은 밴드를 가진 희박한 구조(sparse structure)가 Fig. 8(a)와 (b)에 표현되어 있고, Fig. 9(a)와(b)는 Haar 웨이블릿 변환과 함께 각각 세 번째 그리고 다섯 번째 축소단계에서의 강성행렬이다. 여기서의 회색조(grey-shading)는 축소 단계 $\mathbb{R}^{64}, \mathbb{R}^8, \mathbb{R}^1$ 에서의 강성행렬의 희박성(sparse population)을 의미하며 이때 이들 명조는 강성계수의 절대크기에 의해 표현되었다.

원 구조계의 강성행렬의 수치적 분포가 Fig. 8(a)와 같고 Fig. 8(b)에서는 Haar 웨이블릿 변환을 통해 1차 축소



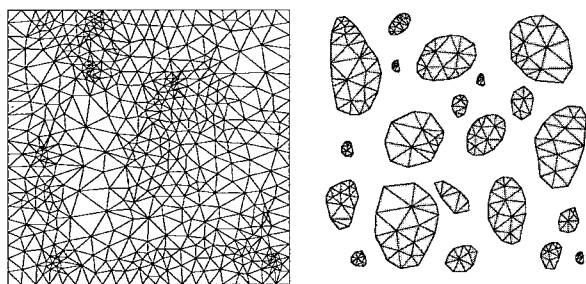
(a) $K_6 \in \mathbb{R}^{64}$ (b) $M_6 K_6 M_6^T \in \mathbb{R}^{64}$

Fig. 8 1-D axial bar problem, density plot of stiffness matrix



(a) $K_3 \in \mathbb{R}^8$ (b) $M_1 K_1 M_1^T \in \mathbb{R}^2$

Fig. 9 1-D axial bar problem, density plot of stiffness matrix



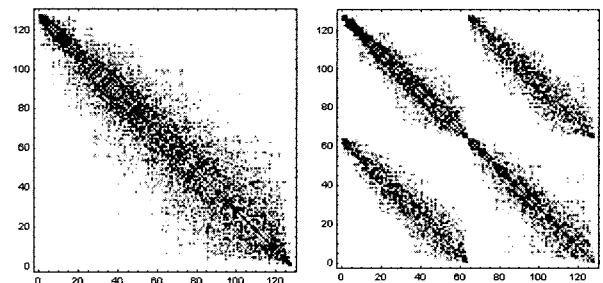
(a) Overall mesh (b) Aggregate mesh

Fig. 10 2-D composite structure

단계로 원 자유도 개수의 절반으로 축소되며 이때 원 구조계의 스펙트럼이 보존된다. 연속적인 축소과정을 거친 후 Fig. 9(a)와 (b)에서는 최종단계인 스칼라 시스템으로 축소 동질화 되었다.

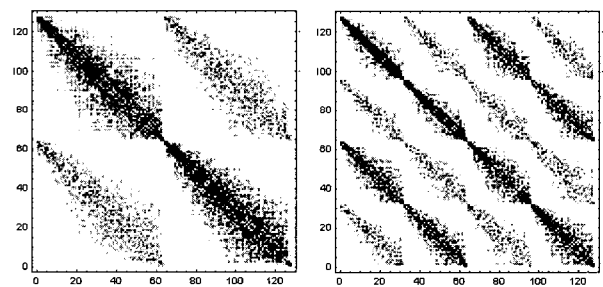
3.2 2차원 매트릭스-골재 복합체

다음은 2차원에서 2상 복합체인 콘크리트 재료에 대한 동질화이며 Fig. 10(a)와 (b)에 나타나 있다. 이들 두 서로 다른 두 재료는 등방성을 가지며 선형거동을 한다고 가정하고 강성 비 $E_a/E_m = 3$ 이며 $\nu_a/\nu_m = 0.5$ 이다. 이 원 구조계의 스펙트럼 특성인 2^{10} 자유도 계에서 $\lambda_{\min} = 5.293 \times 10^{-2}$ 로부터 $\lambda_{\max} = 2.125 \times 10^2$ 까지 이다. 골재체적 비



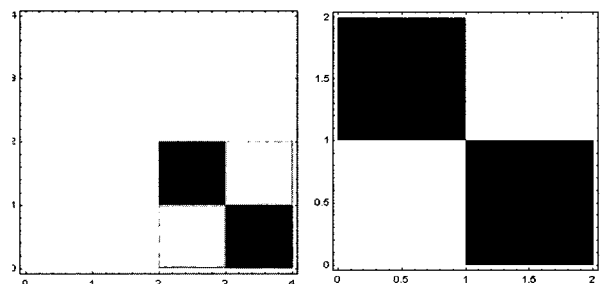
(a) $K_7 \in \mathbb{R}^{128}$ (b) $M_7 K_7 M_7^T \in \mathbb{R}^{128}$

Fig. 11 2-D composite structure, density plot of stiffness matrix



(a) $K_7 \in \mathbb{R}^{128}$ (b) $M_7 K_7 M_7^T \in \mathbb{R}^{128}$

Fig. 12 2-D composite structure, density plot of separating x -, y -stiffness matrix



(a) $M_2 K_2 M_2^T \in \mathbb{R}^4$ (b) $M_1 K_1 M_1^T \in \mathbb{R}^2$

Fig. 13 2-D composite structure, density plot of separating x -, y -stiffness matrix

$V_a = 0.347$ 이며, Hashin-Shtrikman³⁾의 유효유계는 $14.2 \leq E^{eff} \leq 15.3$ 그리고, $0.134 \leq \nu^{eff} \leq 0.142$ 이다. 연속적인 10번의 반복축소과정을 거친 후 동질화 인자인 등가 강성 $K_{ss}^{homog} = 10.1275$ 로 크기계수 $\sqrt{2}^{10}$ 을 가진 상대변위의 평균값인 $r_{MRA} = 0.3165$ 를 갖는다.

Figs. 11, 12 그리고 13에서는 축소단계별 강성행렬의 희박성을 보여주고 있다. 여기서 이들 명조(intensity)는 각 축소단계별 미세 또는 거시 강성계수의 절대크기에 의해 표현되었다. 2차원 문제가 1차원 문제와의 차이점은 단자유도가 아닌 복자유도로 서로 다른 방향성을 갖기 때문에 축소과정에 있어 x -, y -성분별로 분리 전, 후에 각각 MRA를 적용하여 최종스칼라 강성(분리 전, Fig. 11)과 2×2 강성행렬(분리 후, Fig. 12)을 구한 후 원 구조계의 스펙트럼과의 비교 분석 하였다.

Fig. 14(a)는 원 구조계의 최소고유치의 상계와 각 축소단계별의 최소고유치의 증가에 대해 나타나 있다. 1 차원 결과에 비교한다면 첫 번째 축소과정부터 차이를 나타내지만 이는 구조계의 크기에 따라 다르며 전체 스펙트럼 스패에 비하여 약 0.015% 정도 이므로 원 구조계의 최소고유치 상계와 매우 근접하다. Fig. 14(b)는 각각 (가) 매트릭스의 진행성 손상, (나) 골재의 진행성 손상의 성능저하 시나리오에 대한 최소고유치의 변화를 나타내며, 각각의 시나리오에 대해 모두 특이성을 동질화 인자로부터 확인할 수 있었다.

Figs. 11과 12에 비교되었던 것처럼 9번의 축소과정 후의 벡터형식의 x -, y -계수를 가진 최종동질화 단계와 10번의 축소과정 후의 스칼라 형식의 최종동질화 단계의 비교는 원 구조계가 위상적 방향성을 가지므로 그 의미 있다. 이러한 분리추출은 반대로 동질화된 변위벡터장에서 원 탄성텐서 스펙트럼 특성을 대표할 수 있어야 한다. 다

시 말하면, 평균 응력과 변형률의 재구성은 어떻게 평균 상대변위로부터 동질화된 응력과 변형률의 정량적으로 구성관계를 갖는가 하는 부가적인 질문을 야기 시킨다.

4. 결 론

본 논문에서는 반복적인 Schur 역행렬적과 Haar 웨이블릿 변환을 조합하여 미세규모로부터 거시규모의 특성을 분리해내는 동질화 방법을 논의하였다. 다중해상도해석을 이용한 구조계의 동질화 혹은 구조계의 축소화를 적용하였으며 원 구조계와 축소 구조계간의 스펙트럼 특성의 보존 및 구조계의 특이성이 보존되는 점을 재료역학 분야에 적용하고 유한요소해석 결과와 비교, 분석하였다. 1차원 및 2차원 2상 복합체 예제가 반복적인 방법론을 설명하기 위해 제시되었고, 축소 단계에서도 원 구조계의 타원성을 보존하였고, 축소 구조계의 문제에 있어서도 그 축소된 강성행렬이 양의 정부호를 갖는다면 기본모드의 상계특성을 유지하게 된다.

한편으로는 거시규모에서 진행성 손상이 영의 강성을 나타내면 원 구조계 및 축소 구조계에 그 특이성이 반영된다. 축소 구조계의 상계특성의 차이에도 불구하고 동질화 인자에 의해 표현된 특이성은 상당히 고무적인 결과이다. 다중해상도해석을 이용한 구조계의 동질화 과정으로부터 얻어지는 내용은 단순히 분산되어 있는 국부적 미세손상지수들을 거시적인 스칼라 손상지수로 융합하여 구조계의 손상정도를 정의할 수 있게 한다는 점 이외에도 각각의 중간 축소과정에서 이용되는 웨이블릿의 종류에 따라 원 구조계의 자유도가 빠르게 축소되며 이들 중간 축소 구조계가 구성하고 있는 응력-변형률, 혹은 하중-변위 관계에서 원 구조계의 스펙트럼 특성 및 안정조건 등을 잘 표현할 수 있다면, 매우 큰 자유도를 가진 구조해석에 있

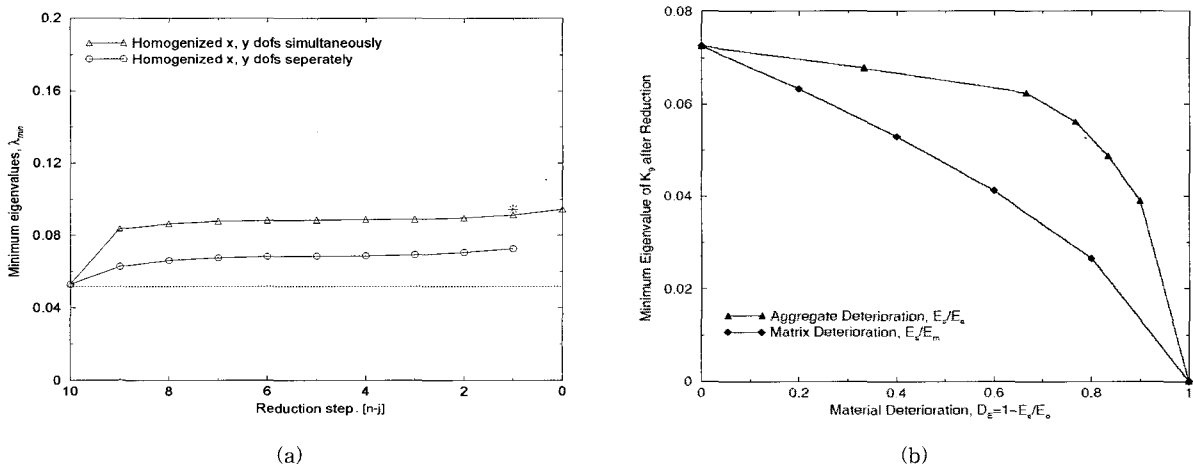


Fig. 14 2-D composite structure: (a) upper bound properties of minimum eigenvalues at different cycles of reduction, (b) homogenized stiffness reduction due to matrix/aggregate deterioration when $D_E \rightarrow 1$

어서 매우 고무적인 방법이 될 수 있다. 물론 이질재료의 탄성특성의 직교성, 웨이블릿변환과 정적응축방법 등의 매우 기초적인 개념에 근거하였음에도 불구하고, 경로의존적인 비선형 재료계의 동질화를 향한 첫 단계를 제공하였다.

감사의 글

본 연구는 건설교통부 (과제번호: C104A1020001-04A0202-00000)의 연구비 지원에 의하여 수행되었습니다. 이에 감사드립니다.

참고문헌

1. Beylkin, G. and Coult, N., "A Multiresolution Strategy for Reduction of Elliptic PDE's and Eigenvalues Problems", *Applied Computational Harmonic Analysis* 5, 1998, pp.847~897.

2. Daubechies, I., *Ten lectures on wavelets*, Society for Industrial and Applied Mathematics(SIAM), 1992, pp.1~355.

3. Hashin, Z., "Analysis of Composite Materials", *Journal of Applied Mechanics*, ASME Vol.50, 1987, pp.481~505.

4. Gilbert, A., "A Comparison of Multiresolution and Classical Homogenization Schemes", *Applied Computational Harmonic Analysis* 5, 1998, pp.1~35.

5. Schur, I., *Ein Beitrag zur Additiven Zahlentheorie und zur Theories der Kettenbrüche*, S.B. Preuss. Akad. Wiss. Phys-Math. Kl, 1917, pp.302~321.

6. Willam, K. and Rhee, I., "Deterioration Analysis of Materials and Finite Elements", *International Journal for Computer-Aided Engineering and Software*, Vol. 13, No.3, 2001, pp.690~718.

요 약

비균질 재료인 콘크리트의 강성 특성과 성능저하 현상을 웨이블릿 변환을 이용한 다중해상도해석을 통해 각 관찰 규모에 따라 동질화 과정의 적용성 및 거시적 손상지수의 평가 등을 연구하였다. 연속적인 Haar 웨이블릿 변환은 기존 강성행렬의 특성을 연속적인 축소규모로의 복제를 통해 미세규모로부터 거시규모로의 축소 또는 복원 과정을 나타내었고 이는 선형구조계의 크기별 스펙트럼 특성의 보존, 즉 다원성, 칠면성 그리고 양의 정부호성을 보존하여 각 규모별 해의 유효성을 확인하였다. 웨이블릿 계수를 이용한 기존 강성의 평균은 거시단계의 변형에너지와 상호관계를 가지고 아래 단계로의 축소, 위 단계로의 복원을 자유롭게 할 수 있는 장점이 있다. 이러한 다중해상도해석의 예제로서 1차원 및 2차원 2상복합체를 가지고 유한요소해석을 통해 기존 이론의 검증과 최소고유치의 각 크기단계별 변화 과정, 원·축소 구조계의 해의 유일성 그리고 국부적 손상지수의 동질화 여부 등을 검사하였다. 이러한 동질화 축소 과정은 자유도가 큰 비선형 구조계로의 적용의 첫 단계를 제공하였다.

핵심용어 : 다중해상도해석, Haar 웨이블릿, 미세 및 거시규모의 손상역학