

# 정사각 캐비티내 고레이놀즈수 Lid-Driven 유동의 수치해석

명 현 국\*<sup>1</sup>

## NUMERICAL SIMULATION OF LID-DRIVEN FLOW IN A SQUARE CAVITY AT HIGH REYNOLDS NUMBERS

H.K. Myong\*<sup>1</sup>

*Numerical simulations of two-dimensional steady incompressible lid-driven flow in a square cavity are presented by a new solution code(PowerCFD) which adopts an unstructured cell-centered method. Solutions are obtained for configurations with a Reynolds number as high as 10,000 with both rectangular and hybrid types of unstructured grid mesh in order to validate the code's independency of grid type. Interesting features of the flow are presented in detail and comparisons are made with benchmark solutions found in the literature. It is found that the code is capable of producing accurately the nature of the lid-driven cavity flow at high Reynolds numbers with no grid type dependency.*

**Key Words:** 수치해석(Numerical Simulation), Lid-Driven 캐비티 유동(Lid-Driven Cavity Flow), 비정렬 셀 중심 방법(Unstructured Cell-Centered Method), 고레이놀즈수(High Reynolds Number), 전산유체역학(CFD)

### 1. 서 론

이차원 lid-driven 캐비티 유동은 기하학적 형상이 단순하여 용이하게 수치해석방법을 적용할 수 있다. 그러나 일정속도로 움직이는 위쪽 벽면에 의해 1차의 큰 주와동(primary vortex)이 공동의 중심에 형성되고, Reynolds수가 증가함에 따라 캐비티 모서리 부분에서 반대방향으로 회전하는 즉, 비연속적인 와동의 발생으로 여러 개의 재순환 영역이 나타나는 복잡한 유동구조를 가진다. 따라서 Burggraf의 수치해석적 연구[1]를 시작으로 전산유체역학(CFD)분야에서 Navier- Stokes (N-S) 방정식을 푸는 코드의 정확성을 입증함과 더불어, 여러 가지 다른 수치해석기법이나 알고리즘의 검증에 대해 지금까지 많은 연구자들에 의해 연구되어져 왔다[1-7]. 일례로 정렬 직각격자계에서 Ghia et al.[2]은 와도-유량함수법을, Botella-Reyret[3]은 Chebyshev 집중방법(collocation method)을, Aydin-Fenner[4]는 경계요소법(Boundary Element Method)을 사용하여 계산하

였다. 국내에서도 정렬 직각격자계에서 조 등[6]은 SIMPLE 방법을, 이 등[7]은 CIP(Cubic Interpolate Propagation)법을 사용하여 각각 계산하였다.

한편, 최근 명 등[8,9]은 비정렬 셀 중심 방법(unstructured cell centered method)에 기반을 둔 비정렬 코드(PowerCFD)를 개발하고, 비직교성이 큰 몇 가지 형태의 복잡한 유동장에 적용하여 예측능력이 우수함을 확인하였다. 그러나 코드의 정확도 및 유연성을 보다 심도 있게 평가하기 위해서는 정사각형 lid-driven 캐비티 유동과 같이 기하학적으로 단순하고 직교성이 높은 형태의 유동에 대해 격자계 형상이 다른 비정렬격자를 사용하여 계산한 수치결과를 정렬직각격자를 사용하여 계산된 검증용 해와 비교분석할 필요가 있다.

따라서 본 연구에서는 lid-driven 캐비티 유동을 대상으로 비정렬 사각형 및 하이브리드 격자계를 사용하여 레이놀즈수를 100에서 10000까지 여러 가지 경우로 변화시켜가며 계산하여 고레이놀즈수에서의 lid-driven 캐비티 유동의 유동특성을 수치해석적으로 살펴보고, 또한 해석 결과를 검증용 해(benchmark solution)로 제시된 Ghia et al.[2]과 Botella-Reyret[3]의 직각격자계를 사용한 수치해석 결과와 비교분석을 통해 비정렬코드의 정확도 및 유연성을 확인한다.

접수일: 2005년 5월 24일, 심사완료일: 2005년 11월 14일.

1 정희원, 국민대학교 기계자동차공학부

\* E-mail: myong@kookmin.ac.kr

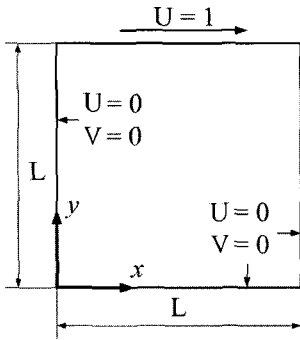


Fig. 1 Model for lid-driven cavity

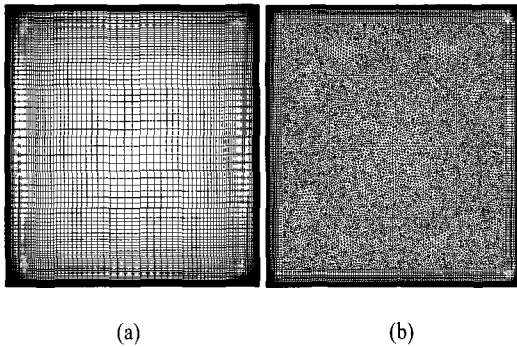


Fig. 2 Segments of (a) non-uniform rectangular mesh (142 x 142 cells), and (b) hybrid mesh (20546 cells)

## 2. 수치해석

본 연구에서 lid-driven 캐비티유동 수치해석을 위하여 사용한 모델과 경계조건은 Fig. 1과 같으며, Ghia et al.[2]과 마찬가지로 레이놀즈수  $Re = 100, 400, 1000, 3200, 5000, 7500, 10000$ 의 경우에 대하여 수치해석을 수행하였다.

계산에 사용된 지배방정식은 무차원화된 2차원 층류 N-S 방정식이며, 이 식을 풀기 위해 본 연구에서는 비정렬 셀 중심 방법을 채택한 3차원 유동해석 코드(PowerCFD)[8]를 사용하였다. 코드에 사용된 수치해석방법 및 복잡한 2차원 열/유체 유동에 대한 성능평가는 참고문헌[8,9]에 자세히 기술되어 있다.

본 연구에서는 먼저 기존의 정렬직각격자계를 사용한 연구 결과와 비교, 검증하기 위하여 Fig. 2(a)에 나타난 바와 같이 비정렬 사각형 격자계(142 x 142 CV)를 사용하여 수치해석하고 또한, 격자계 형상이 수치해석 결과에 미치는 영향을 알아보기 위하여 Fig. 2(b)와 같이 동등한 셀 수의 비정렬 하이브리드 격자계(15600 사각형 CV + 4946 삼각형 CV)를 이용하

여 수치해석하고 그 결과 값을 비교하였다. 참고로 Ghia et al.[2]은 고레이놀즈수에서의 계산 정확도를 위해 66,000 셀 (256 x 256 CV) 정도의 등간격 사각형 정렬직각격자를 사용하였다. 그러나 본 연구에서는 속도가 급격하게 변하는 벽면 근방 영역을 조밀하게 하기 위해 Fig. 2에 나타난 바와 같이 비등간격 격자를 사용함으로써 전체적으로 상당히 적은 셀 수를 사용하면서도 벽면에서 첫 번째 격자점까지의 거리가 Ghia 등[2]에 비해 약 1/10 정도로 되게 하였다.

본 연구에서는 대류항 계산에는 계산의 정확도를 위해 상용 CFD 코드에서 널리 사용되고 있는 2차 중심차분법을 사용하였다.

한편, 수렴판정을 위하여 본 연구에서는 수렴판정조건으로 처음 10번 반복계산중에 얻어지는 모든 셀에서의 속도 및 연속방정식에 대한 잔차의 절대값 합의 최대값으로 정규화시켰으며, 이 값들이 약  $10^{-14}$  이하일 때 수렴되었다고 판정하였다. 참고로 Table. 1에 비정렬 직각격자계를 사용하고, 완화계수를 0.8, 초기속도  $U_{ini} = 0.01, V_{ini} = 0$ 로 하였을 경우, 각  $Re$  수 계산에서 정규화한 잔차의 절대값의 최대값을 나타내었으며, Fig. 3 및 Fig. 4에는  $Re = 1000$  및 10000인 경우의 수렴선도를 각각 나타냈다. 특이한 점은  $Re$  수가 3000 이상에서 Fig. 4에서 보는 바와 같이 수렴과정 도중에 고차도식에 따른 수치오차의 분산성 성질에 기인하여 다소 불안정 특성을 나타내다가 사라진다. 이것은  $Re$  수가 커지면 불안정성 거동에 의한 비정상 와류 현상이 나타난다는 기존의 일부 연구 결과와도 관계가 있으며, 이에 대한 주된 원인은 이들 연구에서 사용한 격자수가 상대적으로 성기기 때문으로 사료된다. 참고로, 격자가 성긴 경우 이 현상으로 인해 물리적으로 불합리한 결과가 얻어짐을 본 연구를 통해 확인하였으며, 최근 Erturk et al.[10]은 약 361,000 셀 (601 x 601 CV)의 등간격 사각형 정렬격자를 사용하여  $Re = 20000$ 수에서 정상유동 결과를 얻고 있다. 그러나 본 연구에서는 전술한 바와 같이 비등간격 격자를 사용함으로써 비교적 적은 격자수를 사용하면서도 물리적으로 타당한 정상해를 얻을 수 있었다.

Table. 1 Residual Normalization Factors with unstructured rectangular meshes

Mesh Type	Re	U, V	P
Unstructured Rectangular	100	73.80	0.243
	400	18.60	0.252
	1000	7.610	0.264
	3200	2.580	0.352
	5000	1.740	0.434
	7500	1.260	0.509
	10000	1.020	0.607

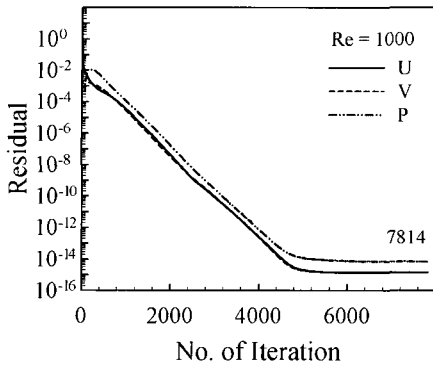


Fig. 3 Convergency history with unstructured rectangular meshes at Re=1000

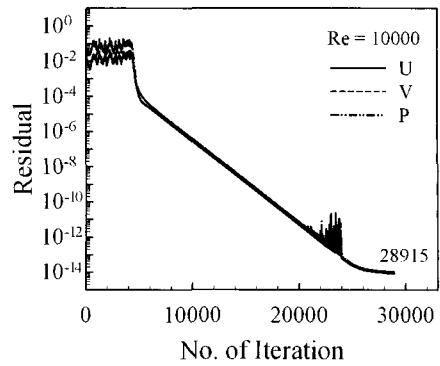


Fig. 4 Convergency history with unstructured rectangular meshes at Re=10000

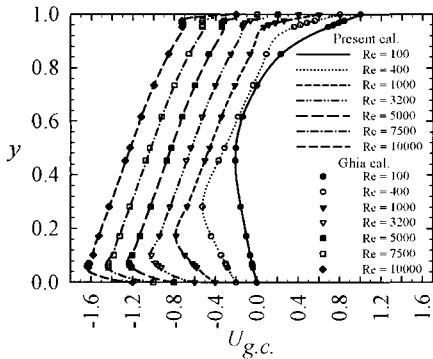


Fig. 5 Comparison of  $U$ -velocity along vertical lines through geometric center with unstructured rectangular meshes (142 x 142 cells)

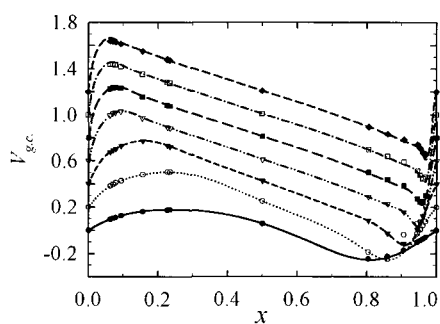


Fig. 6 Comparison of  $V$ -velocity along horizontal line through geometric center with unstructured rectangular meshes (142 x 142 cells)

### 3. 결과 및 고찰

Fig. 5와 Fig. 6은 비등간격 비정렬 사각형 격자계(Fig. 2(a))를, Fig. 7과 Fig. 8은 하이브리드 격자계(Fig. 2(b))를 각각 사용하여 계산한 결과를 레이놀즈수에 따라 기하학적 캐비티 중심인  $x = 0.5$  위치에서의 수평방향 속도  $U$ 와  $y = 0.5$  위치에서의 수직방향 속도  $V$ 를 검증용 해로 제시된 Ghia et al.[2]의 연구결과 값과 비교하여 나타낸 것이다. 결과를 보면 캐비티 유동의 특징인  $Re$ 가 증가할수록 벽면 경계층 두께가 얇아지며, 고레이놀즈수에서  $x = 1$  근처에서 수평방향 속도와  $y = 1$  근처에서 수직방향 속도의 비틀어짐(kink) 현상이 각각 나타나는 것 등을 포함해, 고려한 모든 레이놀즈수에서 수평 및 수직방향 속도 모두 Ghia et al.[2]의 속도에 대한 수치해석 결과 값과 매우 잘 일치하는 것을 볼 수 있다. 또한, Fig. 5부터 Fig. 8로부터 사각형 및 하이브리드 격자계의 결과가 거의 정확하게 동일한 예측결과를 제시하고 있음을 알 수 있다. 이상의 결과로부터 본 연구에서 사용한 비정렬격자계를

사용하는 코드의 정확도 및 격자 형상에 대한 유연성을 확인할 수 있다.

Fig. 9와 Fig. 10은  $Re = 1000$ 에서 두 가지 형태의 격자계에 대하여 기하학적 캐비티 중심인  $x = 0.5$  위치에서의 수평방향 와도값( $\omega$ )과  $y = 0.5$  위치에서의 수직방향 와도값( $\omega$ )의 계산결과를 Chebyshev 집중방법을 사용한 또 다른 검증용 해인 Botella-Reyret[3]의 계산결과 값과 비교한 것이다. 본 계산결과는 격자 형태에 상관없이 거의 동일한 예측결과를 보여주며, 또한 예측결과도 검증용 해와 매우 정확하게 일치함을 알 수 있다.

Fig. 11과 Fig. 12는  $Re$  수에 따라 각각 사각형 및 하이브리드 격자계를 사용해서 계산하여 얻은 와도선도이고, Table. 2는 이들 그림에서 사용한 등고선의 번호에 따른 와도값을 나타낸다. 기존의 연구[2]에 따르면, 본 연구에서 다루고 있는 캐비티 유동은  $Re$ 가 증가할수록 캐비티내 여러 곳에서 와도 구배가 높은 영역이 나타나며, 캐비티 왼쪽 아래 코너부근에서 반대방향으로 회전하는 2차 와동(secondary vortex), 오른쪽

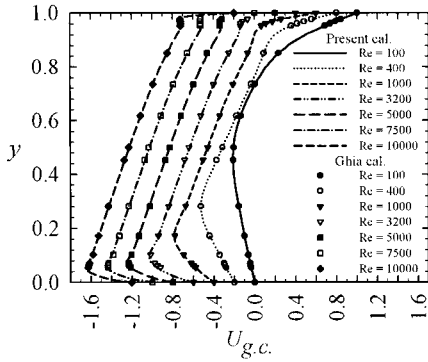


Fig. 7 Comparison of  $U$ -velocity along vertical lines through geometric center with unstructured hybrid meshes(20546 cells)

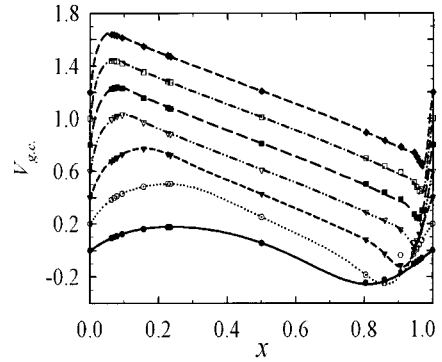


Fig. 8 Comparison of  $V$ -velocity along horizontal lines through geometric center with unstructured hybrid meshes(20546cells)

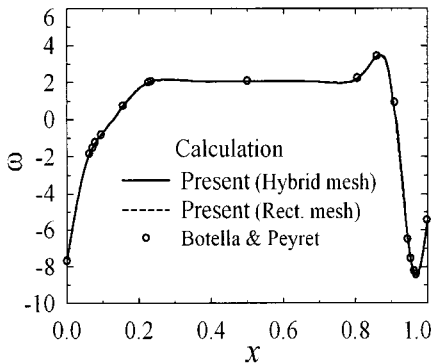


Fig. 9 Comparison of vorticity values along horizontal line through geometric center with two types of meshes at  $Re = 1000$

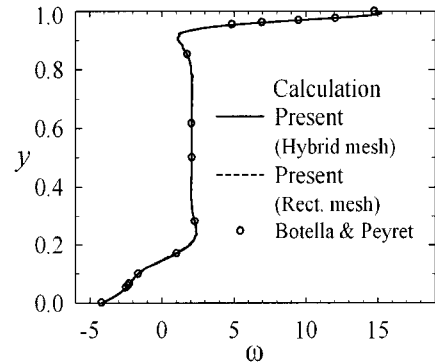


Fig. 10 Comparison of vorticity values along vertical line through geometric center with two types of meshes at  $Re = 1000$

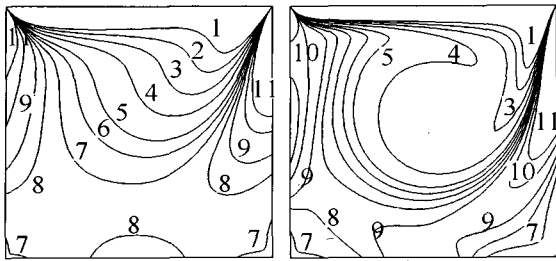
아래 코너부근에서의 2차 와동 및 코너에서의 3차 와동, 왼쪽 벽면 위쪽 부근에서의 2차 와동이 각각 존재하고, 주와동은 낮은  $Re$  에서 오른쪽 위쪽 코너로부터 파생되어 나와  $Re$  가 증가할수록 캐비티의 기하학적 중심으로 이동하며,  $Re \geq 5000$ 에서는 거의 변하지 않으며, 모든 이차 와동이 초기에 코너 근처에서 나타나 천천히 캐비티 중심을 향해 이동해 간다고 알려져 있다. 본 계산 결과는 그림에서 보는 바와 같이 이러한 기존연구로부터 알려진 와동에 대한 특성을 명확하게 보여주고 있으며, 또한 대상으로 한 모든  $Re$  범위에서 격자 형태에 상관없이 거의 동일한 예측결과를 나타내고 있다.

한편, Fig. 11과 Fig. 12로부터  $Re \geq 7500$ 에서 왼쪽 아래 코너에서 3차 와동이 미약하지만 나타남을 확인할 수 있는데, 이것은 Ghia et al.[2]의 기존 연구에서는 보고되어 있지 않은 새로운 사실이다. 이러한 현상은 본 연구에서 전체적으로 상당히 적은 셀 수를 사용하면서도 비등간격 격자계를 사용하여 벽면으로부터 첫 번째 격자점 위치를 기존 연구[2]의 1/10 정도로 작게 하였기 때문에 예측되는 것으로 물리적으로도

타당하다고 사료된다. 참고로 최근 Erturk et al.[10]도 본 연구에서 사용한 격자수의 약 18배에 해당하는 약 361,000 셀 (601 x 601 CV)의 등간격 사각형 정렬격자를 사용하여 수치 해석한 결과 본 연구에서와 같이 고  $Re$  수에서 왼쪽 아래 코너에서 3차 와동이 미약하지만 나타난다고 보고하고 있어, 본 연구에서 얻어진 결과를 반증하고 있다.

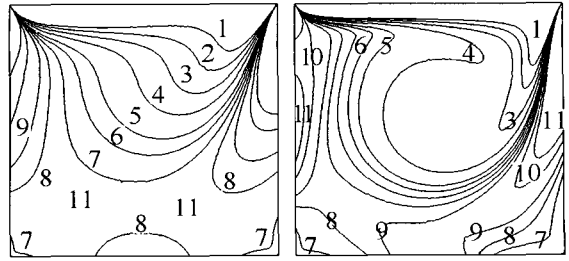
Table. 2 Values for Vorticity Contours in Figs. 11 and 12

Vorticity			
Contour number	value of $\omega$	Contour number	value of $\omega$
1	5.0	7	0.0
2	4.0	8	-0.5
3	3.0	9	-1.0
4	2.0	10	-2.0
5	1.0	11	-3.0
6	0.5		



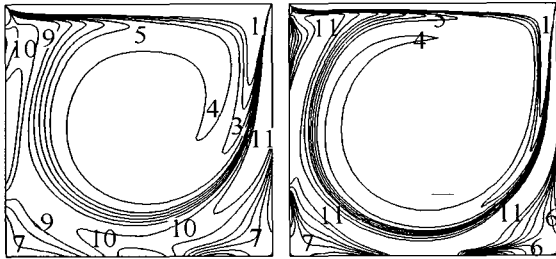
(a)  $Re = 100$

(b)  $Re = 400$



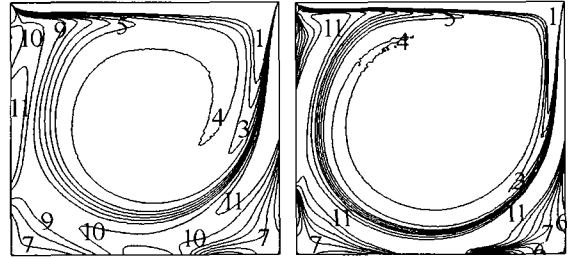
(a)  $Re = 100$

(b)  $Re = 400$



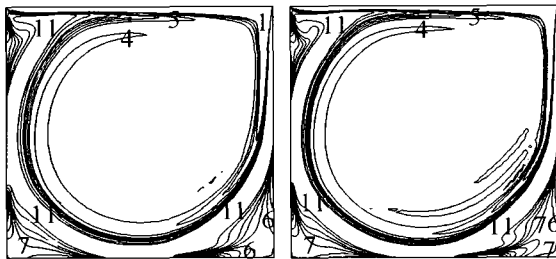
(c)  $Re = 1000$

(d)  $Re = 3200$



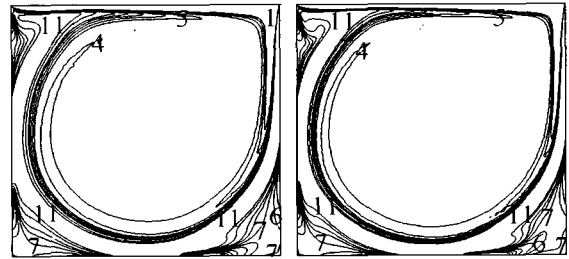
(c)  $Re = 1000$

(d)  $Re = 3200$



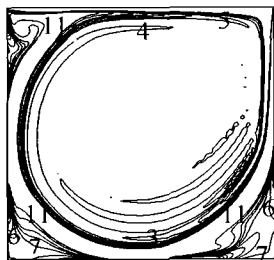
(e)  $Re = 5000$

(f)  $Re = 7500$

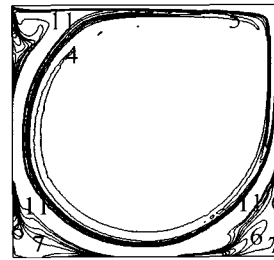


(e)  $Re = 5000$

(f)  $Re = 7500$



(g)  $Re = 10000$



(g)  $Re = 10000$

Fig. 11 Vorticity contours for flow in driven cavity with unstructured rectangular meshes (142 x 142 cells)

Fig. 12 Vorticity contours for flow in driven cavity with unstructured hybrid meshes (20546 cells)

#### 4. 결 론

본 연구에서는 lid-driven 캐비티 유동을 대상으로 비정렬 사각형 및 하이브리드 격자체를 사용하여 레이놀즈수를 100

에서 10000까지 여러 가지 경우로 변화시키며 계산하여 고레이놀즈수에서의 lid-driven 캐비티 유동의 유동특성을 수치해석적으로 살펴보고, 또한 해석 결과를 검증용 해 (benchmark solution)로 제시된 Ghia 등[2]과 Botella-Reyret[3]

의 정렬직각격자계를 사용한 수치해석 결과와 비교분석을 통해 비정렬코드의 정확도 및 유연성을 확인하였다.

연구결과,

- (1) 고려된 레이놀즈수 범위에서 속도 및 와도에 대한 계산 결과는 정렬직각격자계를 사용한 기존의 검증용 해와 매우 정확하게 일치함이 입증되었다. 따라서 본 연구에서 사용한 비정렬 셀 중심 방법을 채용한 코드는 수치해석방법을 포함해 lid-driven 캐비티 유동의 특성과 현상을 적절하게 예측할 수 있다.
- (2) 본 계산에 사용된 코드는 격자 형태에 상관없이 거의 동일한 예측결과를 보여주며, 또한 예측결과도 검증용 해와 매우 잘 일치하였다. 이로써 본 연구에서 사용된 PowerCFD 코드의 정확도 및 격자 형태에 의존하지 않는 유연성이 확인되었다.
- (3) 전체적으로 기존 연구에 비해 상당히 적은 셀 수를 사용하면서도 비등간격 격자를 사용함으로써 벽면근방을 조밀하게 한 본 연구를 통해  $Re \geq 7500$ 에서 캐비티 왼쪽 아래 코너에서 3차 와동이 미약하지만 명확하게 나타남을 확인할 수 있었다.

### 참고문헌

- [1] Burggraf, O.R., 1966, "Analytical and Numerical Studies of the Structure of Steady Separated flows," *J. Fluids, Mechanics*, Vol.24, p.131-151.
- [2] Ghia, U., Ghia, K.N. and Shin, C.T., 1982, "High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method," *J. Comp. Physics*, Vol.48, p.387-411.
- [3] Botella, O., Peyret, R., 1998, "Benchmark Spectral Results on the Lid-Driven Cavity Flow," *Computers and Fluids*, Vol.27, p.113-151.
- [4] Aydin, M. and Fenner, R.T., 2001, "Boundary Element Analysis of Driven Cavity Flow for Low and Moderate Reynolds Numbers," *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol.37, p.45-64.
- [5] Benjamin, A.S. and Denny, V.E., 1979, "On the Convergence of Numerical Solutions for 2-D Flows in a Cavity at Large Re," *J. Comp. Physics*, Vol.33, p.340-358.
- [6] 조성호, 강인준, 박승오, 1993, "HYBRID기법과 QUICKER 기법: 공동 유동의 계산 특성 비교," *대한기계학회 논문집*, 제17권, 제6호, p.1640-1647.
- [7] 이정희, 강준, 임도균, 김찬중, 2003, "비엇갈림 격자계에서 CIP법을 이용한 캐비티내의 유동해석," *대한기계학회 2003년도 춘계학술대회논문집*, p.1821-1826.
- [8] 명현국, 김종태, 2005, "비정렬격자계를 사용하는 3차원 유동해석코드 개발(제1편, 수치해석방법)," *대한기계학회 논문집*, 제29권, 제9호, p.1049-1056.
- [9] 명현국, 김종태, 김종은, 2005, "비정렬격자계를 사용하는 3차원 유동해석코드 개발(제2편, 코드성능평가)," *대한기계학회 논문집*, 제29권, 제9호, p.1057-1064.
- [10] Erturk, E., Corke, T.C. and Gokcol, C., 2005, "Numerical Solutions of 2-D Steady Incompressible Driven Cavity Flow at High Reynolds Numbers," *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol.48, p.747-774.