분산감소기법을 이용한 파라미터 추정의 효율성

권치명*

Efficiency of Estimation for Parameters by Use of Variance Reduction Techniques

Chi-myung Kwon

Abstract

We develop a variance reduction technique applicable in one simulation experiment whose purpose is to estimate the parameters of a first order linear model. This method utilizes the control variates obtained during the course of simulation run under Schruben and Margolin's method (S-M method). The performance of this method is shown to be similar in estimating the main effects, and to be superior to S-M method in estimating the overall mean response in a given model. We consider that a proposed method may yield a better result than S-M method if selected control variates are highly correlated with the response at each design point.

Key Words: Common Random Numbers, Antithetic Variates, Control Variates, Variance Reduction Techniques, Simulation Efficiency

* 동아대학교 경영정보과학부

1. 서론

분산감소기법(variance reduction technique)은 대형 시뮬레이션 실험에서 시스템 반응변수의 값을 추정하는데 효과적으로 사용되고 있다. 반응변수는 종종 시스템 의사결정 인자의 1차 선형모형으로 표현 가능하다고 가정되며, 이러한 모형의 파라미터를 정확히 추정하는 문제는 시뮬레이션의 효율성과 관련된다. 반응변수에 대한 인자의 영향을 평가하기 위해서는 수준이 2이상인 각 인자의 조합(표본점)에서 시뮬레이션을 실행하여 반응변수를 추정하여야 한다. 이와같이 복수의 표본점을 가지는 시뮬레이션 실험에서 반응변수의 값과 시스템 파라미터의 영향을 효과적으로 추정하기 위해 자주 사용되는 분산감소기법으로는 공통난수(common random numbers: CRN)기법, 대조난수(antithetic variates: AV)기법, 통제변수(control variates method: CV)기법 등이 있다.

분산감소기법들에 대한 많은 연구 중에서 두 기법을 결합하여 하나의 시뮬레이션 실험설계에서 동시에 사용할 수 있는 방법에 대한 연구로 대표적인 것은 우선 Schruben과 Margolin[10]의 연구를 들 수 있는데 이들은 동일한 시뮬레이션 실험에서 CRN과 AV기법을 동시에 사용하여 반응변수가 인자의 1차식으로 표현되는 선형모형의 파라미터를 추정하는 방법을 제안하였다. CV기법은 보통 반응변수의 평균을 추정하는데 효율적으로 사용되며 Nozari, Arnold와 Pegden[8]은 이 기법을 다중 표본점 모형에 적용하여 파라미터 추정을 위한 CV기법의 효율성을 평가하였다. Kwon과 Tew[2]는 CV기법과 AV기법을 결합하여 대형 시뮬레이션 모형의 파라미터를 추정하는 방법을 제안하였다.

Schruben과 Margolin의 기법(S-M기법)은 모형의 전체 반응치의 평균(overall-mean)을 추정하는데 CRN기법보다 우수하며 인자의 영향(파라미터)을 추정하는 효율성은 CRN기법과 동일하다[10]. CV기법은 보통 인자들의 특정조합(단일 표본점)에서 반응변수의 평균을 추정하는데 매우 효과적인 기법으로 사용되고 있다[4, 8]. 이 기법은 시뮬레이션 도중에 반응변수와 상관성이 높은 시뮬레이션 모형의 요소를 통제변수로 선택하여 반응변수와 통제변수들 사이에 다중상관성을 이용하여 반응변수의 변이성을 감소시키는 방법이다.

시뮬레이션 실험에서 표본점(design point)의 설계행렬(design matrix)은 특정한 조건하에서 두 개의 직교 블럭(block)으로 나눌 수 있는데 S-M기법은 같은 블록에 속하는 표본점에는 CRN기법을 사용하고 다른 블록에 속하는 표본점에는 AV기법을 적용한다. 이 기법의 효율성은 같은 블록에 속하는 두 표본점의 반응변수 사이에서 유도되는 상관성의 크기에 따라 결정된다. 반면 CV기법의 효율성은 반응변수와 통제변수 사이의 다중 상관성에 따라 결정된다. 보통 통제변수는 각 인자의 수준에서 독립적으로 관찰되며 반응변수와 함께 추가적으로 수집되는 정보를 이용하여 파라미터의 추정치의 신뢰도를 개선시킨다는 점에서 S-M기법과 다르다.

이러한 측면에서 S-M기법을 적용하는 도중에 얻어지는 통제변수에 대한 정보를 사용하여 두 기법의 장점을 이용할 수 있다면 가정된 모형의 파라미터 추정을 보다 효과적으로 달성할 수 있을 것으로 판단된다.

본 연구에서는 선형모형의 파라미터 추정을 위한 CV기법과 S-M기법의 결합방법을 제안하고 결합된 방법이 S-M기법보다 어떠한 조건 하에서 파라미터 추정에 효율적인가를 분석하고자 한다. 아울러 S-M기법이 효과적으로 적용되는 시뮬레이션 모형을 대상으로 시뮬레이션을 통하여 두 기법의 효율성을 비교분석하고자 한다.

2. S-M 기법

시뮬레이션 실험에서 인자의 수가 p개이고

인자의 각 조합수준(표본점) i에서 평균 반응변수 y_i가 인자들의 1차 회귀모형으로 근사될 수 있다면 y_i는 다음과 같이 표현된다.

$$y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ij} + \epsilon_i, i = 1, 2, \ldots, m \quad (1)$$

여기서 x_{ij}는 표본점 i에서 인자 j의 수준이며 β_0는 미지의 상수이고 β_j는 1차식의 계수이며 $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$는 모형의 오차를 각각 나타낸다. 식(1)의 반응벡터를 $y = (y_1, y_2, \cdots, y_m)'$, 크기가 $((p+1)\text{x}1)$인 모형 파라미터 벡터를 β, 첫 번째 열의 원소가 모두 1이고 $(i, k+1)$ 번째 원소가 x_{ik}이며 크기가 $(m\text{x}p)$인 계획행렬을 X, 오차 벡터를 $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m)'$로 각각 정의하면 위의 식은 다음과 같은 행렬식으로 표현된다.

$$y = X\beta + \epsilon, \quad (2)$$

여기서 $\epsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$이다.

위 모형의 시뮬레이션 실험에서 만일 독립적인 난수계열(independent random number streams)을 모든 표본점에 할당하여 시뮬레이션을 수행하면 파라미터 β의 최소자승 추정량(ordinary least squares estimator: OLS estimator)과 그 분산은 각각 다음과 같다[6].

$$\hat{\beta}_{IDP} = (X'X)^{-1}X'y;$$
$$Cov(\hat{\beta}_{IDP}) = \sigma_y^2(X'X)^{-1} \quad (3)$$

두 표본점에서의 시뮬레이션에 CRN을 사용하여 얻은 두 반응치 사이에는 양의 상관관계(ρ_1)가 나타나고, 두 표본점에서 AV를 사용하면 두 반응치는 음의 상관관계(ρ_2)을 가진다[5]. 만일 모든 표본점의 시뮬레이션에 CRN을 사용하여 얻은 반응치를 이용하여 파라미터 β의 OLS 추정량을 구하면 식 (3)과 같으며 추정량 β의 분산은 다음과 같다[10].

$$Cov(\hat{\beta}_{COM}) = \sigma_y^2[\rho_1 G + (1-\rho_1)(X'X)^{-1}] \quad (4)$$

여기서 G는 $(m\text{x}m)$ 행렬로 첫 번째 행과 열의 값이 1이고 나머지 원소의 값은 모두 0인 행렬이다.

Schruben과 Margolin은 설계행렬을 두 개의 직교하는 블록으로 나눌 수 경우에 표본점의 시뮬레이션에서 난수를 할당하는 방법으로 CRN과 AV를 동시에 사용하는 방법을 제안하였다. S-M기법은 (a) 같은 블럭에 속하는 모든 표본점에는 CRN을 할당하여 시뮬레이션을 수행하고 (b) 다른 블럭에 속하는 표본점에는 CRN과 대조되는 AV를 할당하여 시뮬레이션을 수행하는 난수할당법을 사용한다.

S-M기법으로부터 얻은 파라미터 β의 최소자승 추정량은 (3)과 같으며 그 분산은 다음과 같다 [10].

$$Cov(\hat{\beta}_{SM}) = \sigma_y^2[(\rho_1 + \rho_2)G/2 + (1-\rho_1)(X'X)^{-1}] \quad (5)$$

파라미터 추정량의 효율성 관점에서 독립적인 런, CRN기법과 S-M기법의 난수할당법을 비교하면 식 (3)-(5)로부터 $\beta_j (j = 1, 2, \ldots, p)$의 추정에 있어서 CRN기법과 S-M기법의 효율성이 동일하며 이 두 방법은 독립적인 난수할당법보다 우수하다. 반면 β_0을 추정하는 데는 독립적인 난수할당법이 CRN기법과 S-M기법보다 우수하고 S-M기법이 CRN기법보다 효율적이다. 식 (5)에서 $\beta_j (j = 1, 2, \ldots, p)$를 추정하는 S-M기법의 효율성은 CRN에 의해 같은 블록의 두 반응치 사이에 유도되는 상관계수의 값(ρ_1)에따라 결정된다. 따라서 S-M기법과 결합하여 CV기법을 효율적으로 적용하려면 (a) 같은 블록의 두 반응변수 사이에 나타나는 양의 상관관계의 크기가 CV에 의하여 조정된 반응변수(controlled response)들 사

이에서도 유지되는가, (b) 각 표본점에서 반응변수의 분산을 감소시키는 데 CV의 효과가 어느 정도인가에 달려있다고 할 수 있다.

3. CV기법의 응용

시뮬레이션에서 시스템 요소의 확률적인 재현은 알려진 분포나 경험적인 분포로부터 확률변수를 추출하는 과정이다. 이러한 확률변수 중에는 반응변수와 높은 상관성이 있는 확률변수가 있는데 보통 이러한 변수가 통제변수로 선택된다. 따라서 통제변수의 평균은 알려져 있고 또한 영향인자의 각 수준에서 통제변수는 독립적으로 관찰된다. 표본점 i에서 얻은 s개 통제변수의 평균 벡터를 c_i라 하자. 만일 각 표본점에서 시뮬레이션 런 시간이 충분히 크다면 평균 반응변수와 통제변수의 평균 벡터는 다변량 정규분포를 따른다[1].

$$\begin{pmatrix} y_i \\ c_i \end{pmatrix} \sim N_{s+1}\left[\begin{pmatrix} \mu_i \\ \mu_c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_y^2 & \sigma_{yc}' \\ \sigma_{yc} & \Sigma_c \end{pmatrix}\right] \tag{6}$$

여기서 $\mu_i = E(y_i)$, $\mu_c = E(c_i)$, $\sigma_{yc} = Cov(y_i, c_i)$이며 $\Sigma_c = Cov(c_i)$이다. 위의 가정이 성립하는 경우, m개의 표본점에서 통제 반응변수(controlled response)

$$y_i(\alpha_i) = y_i - \alpha_i'(c_i - \mu_c) \tag{7}$$

는 m-변량 정규분포를 따르며 또한 통제 반응변수는 평균 반응변수의 불편추정량이다[4]. (식 (7)에서 α_i는 CV의 계수 벡터다). 따라서 선형모형 (2)에서와 비슷하게 통제 반응치는 다음과 같은 선형모형으로 나타낼 수 있다.

$$y(A) = X\beta + \epsilon^*, \tag{8}$$

여기서 $y(A) = (y_1(\alpha_1), \ldots, y_m(\alpha_m))'$이고 ϵ^*는 에러 벡터이며 $\epsilon^* \sim N(0, \Sigma)$을 따른다.

식 (7)에서 반응변수의 분산을 최소로 하는 CV의 계수 벡터 α_i는

$$\alpha_i = \Sigma_c^{-1}\sigma_{yc} \tag{9}$$

이며 통제 반응변수의 분산은 다음과 같다[4].

$$Var(y(\alpha_i)) = (1 - R_{yc}^2)\sigma_y^2 \tag{10}$$

여기서 R_{yc}^2는 반응변수와 통제변수 벡터 사이의 다중 상관계수의 제곱이다. 만일 CV의 계수 벡터 α_i가 알려진 경우에 S-M기법의 난수할당법을 적용하여 모형 (8)에서 β의 가중 최소자승 추정량(weighted least squares estimator: WLS)과 그 분산을 각각 구하면 다음과 같은 식으로 주어진다(식의 증명은 부록 참조).

$$\mathcal{B}_{COM} = (X'X)^{-1}X'y(A); \tag{11}$$

$$Cov(\mathcal{B}_{COM}) = \sigma_y^2[(\rho_1 + \rho_2 - R_{yc}^2 - R_{yc}^*)G/2 + (1-\rho_1)(X'X)^{-1}] \tag{12}$$

여기서 R_{yc}^2는 식 (10)과 같으며 R_{yc}^*는 두 블록에 속하는 반응변수와 통제변수 벡터 사이의 복잡한 관계식으로 기술된다[부록 참조].

식(5)와 (11)을 비교하면 (a) $\beta_j (j = 1, 2, \ldots, p)$의 추정에 있어서 S-M기법과 CV기법을 결합한 방법의 효율성은 S-M기법과 같으며, (b) β_0의 추정에 있어서는 $R_{yc}^2 \geq R_{yc}^*$ 인 경우 결합기법이 S-M기법보다 효율적이다.

일반적으로 CV의 계수 벡터 α_i는 표본으로부터 추정을 해야 하고 또한 반응변수와 통제변수 사이의 복잡한 관계식으로 표현되는 R_{yc}^*를 이용하여 두 기법의 우월성을 비교하는 것이 쉬운 일이 아니므로 대신 S-M기법이 매우 효과적으로 적용되는 모형의 시뮬레이션을 통하

여 두 기법의 효율성을 비교 분석하고자 한다.

4. 시뮬레이션 실험 및 결과분석

4.1 시뮬레이션 모형

위에서 언급한 두 기법의 효율성을 비교하기위해 1차 선형모형의 파라미터를 추정하는데 S-M기법이 매우 효과적으로 알려진 병원 자원 배분문제[10]을 대상으로 시뮬레이션 실험을 실시하였다. Schruben과 Margolin이 제시한 병원자원 배분문제를 간략히 설명하면 병원에 도착하는 환자는 도착률이 3.3명/일인 Poisson 분포를 따르며 도착 환자의 75%는 Intensive Care(IC)를 받고 나머지 25%는 Coronary Care(CC)를 받는다. IC 서비스 시간은 평균과 분산이 각각 3.4와 3.5인 lognormal 분포를 따르며 IC를 완료한 환자의 27%는 병원을 떠나며 73%는 Intermediate Care(InC)로 이동하며 InC에서의 서비스 시간은 평균과 분산이 각각 15.0, 7.0인 lognormal 분포를 한다. CC의 서비스 시간은 평균과 분산이 각각 3.8과 1.6인 lognormal 분포를 따르고 CC 치료 환자의 20%는 병원을 떠나며 80%는 InC로 이동하며 InC에서의 서비스 시간은 평균과 분산이 각각 17.0과 3.0인 lognormal 분포를 한다. 도착 환자는 병원 시설이 부족하면 시스템을 이탈하며(balking), 3가지 종류의 병원 시설을 어떤 수준으로 결정하는가에 따라 병원에 수용될 수 있는 환자에 대한 시스템 이탈 수준이 달라진다. Schruben과 Margolin은 병원 이탈 비율(반응변수)에 영향을 미치는 인자로 병원의 3가지 치료시설의 크기를 가정하였으며 세 가지 인자의 주요인(main effect)과 두 인자 사이의 3가지 상호작용(pairwise interaction)을 모형의 독립변수로 도입하여 2^3요인 시뮬레이션 실험을 수행하였다(표 1 참조).

실험 결과 2요인에 의한 상호작용 효과는 거의 무시할 수 있어 전체 평균(β_0)과 주 요인 효과(β_1, β_2, β_3)만을 모형에 포함시켰다. <표 1>의 표본점 i 행의 값은 IC, CC, InC의 수준을 의미하며 괄호 안의 수는 reparameterization을 통하여 얻은 인자의 수준이다. 블록 1과 2의 표본점에 대응하는 설계행렬은 직교행렬임을 알 수 있으며 통제변수는 환자의 병원 도착간 시간을 표준화하여 사용하였다. 이 모형을 AweSim으로 모델링하고 각 표본점의 시뮬레이션 시간은 1,500일로 하였다.

<표 1> 2^3요인 실험의 표본점

표본점		IC	CC	InC
블록 1	1	13(-1)	4(-1)	15(-1)
	2	13(-1)	6(+1)	17(+1)
	3	15(+1)	4(-1)	17(+1)
	4	15(+1)	6(+1)	15(-1)
블록 2	5	13(-1)	4(-1)	17(+1)
	6	13(-1)	6(+1)	15(-1)
	7	15(+1)	4(-1)	15(-1)
	8	15(+1)	6(+1)	17(+1)

4.2 시뮬레이션 결과 분석

8개 표본점에서 얻은 반응변수의 분산은 S-M기법에 의한 것이 대략 1.88-2.19 정도이고 제안된 기법으로 얻은 것이 0.43-0.67 정도이었다. 같은 블록에 속한 두 반응치 사이의 상관계수는 S-M기법에 의한 것이 대략 0.98-0.99이며 제안된 기법은 0.91-0.97 정도 이었다. 다른 두 블록에 위치한 두 표본점에서의 반응치 사이의 상관계수는 S-M기법에 의한 것이 대략 -0.54와 -0.51 사이의 값으로 나타났으며 제안된 기법은 대략 -0.23에서 -0.19 사이의 값으로 나타났다. <표 2>는 병원 자원 배분문제에 적용한 두 기법으로부터 얻은 파라미터의 추정치와 그 분산을 각각 요약하였다. 제안된 기법은 (a) β_0의 추정에 있어서는 S-M기법보다 우수하였으며 (b) 주요인을 추정하는 데는 S-M기법과 비슷한 수준의 효율

성을 보이고 있다.

< 표 2> 파라미터 추정치와 분산

파라미터	S-M 방법		제안된 기법	
	추정치	분산	추정치	분산
β_0	45.722	0.472	45.670	0.200
β_1	-0.291	0.003	-0.290	0.003
β_2	-0.378	0.005	-0.378	0.005
β_3	-1.805	0.001	-1.805	0.001

5. 결론

같은 블록에 속하는 두 표본점에서 CRN을 할당하여 얻어지는 두 반응변수 사이의 상관계수의 값이 클 경우 S-M기법은 인자의 영향을 나타내는 파라미터를 추정하는데 매우 효율적이다. 이러한 측면에서 병원자원배분 모형은 S-M기법이 매우 효과적으로 적용되는 모형이다. 이러한 모형에서도 제안된 기법은 전체 파라미터를 추정하는데 S-M기법보다 우수한 결과를 보이고 있다.

비록 제한된 시뮬레이션으로부터 얻은 결과이지만 만일 반응변수와 깊은 상관성을 보이는 통제변수의 집합을 선택할 수 있고 모형의 특성상 두 표본점에서 공통난수의 할당에 따라 나타나는 synchronization 효과가 적을 경우 S-M기법에 통제변수 기법을 결합하는 방법이 S-M기법만을 사용하는 것보다 우수할 것으로 판단된다.

부록: 식 (11)의 증명

표본점 i와 k에서의 두 통제 반응변수 $y_i(\alpha_i)$, $y_k(\alpha_k)$ 사이의 분산은 다음과 같다[4]

$$Var(y_i(\alpha_i), y_k(\alpha_k)) = Var(y_i, y_k) - Cov(y_i, \alpha_k' c_k) - Cov(y_k, \alpha_i' c_i) + \alpha_i' Cov(c_i, c_k)\alpha_k \quad \text{(A1)}$$

두 표본점 i와 k가 같은 블럭에 있는 경우 두 표본점에 CRN을 할당함으로써

$$Var(y_i, y_k) = \rho_1 \sigma_y^2 \quad \text{(A2)}$$

이며 두 통제변수 벡터는 $c_i = c_k$ 이다. 만일 통제 반응변수의 계수벡터 $\alpha_i = \alpha_k = \Sigma_c^{-1}\sigma_{yc}$를 알고 있다면

$$Cov(y_k, \alpha_i' c_i) = Cov(y_i, \alpha_k' c_k) = \sigma_{yc}' \Sigma_c^{-1} \sigma_{yc} \quad \text{(A3)}$$

이며 또한 $\alpha_i = \alpha_k = \Sigma_c^{-1}\sigma_{yc}$의 대입과 식 (6)으로부터

$$\alpha_i' Cov(c_i, c_k)\alpha_k = \sigma_{yc}' \Sigma_c^{-1} \sigma_{yc} \quad \text{(A4)}$$

이다. 따라서 식 (A2)-A(4)으로 부터

$$Cov(y_i(\alpha_i), y_k(\alpha_k)) = \rho_1\sigma_y^2 - \sigma_{yc}'\Sigma_c^{-1}\sigma_{yc} = (\rho_1 - R_{yc}^2)\sigma_y^2 \quad \text{(A5)}$$

이다(여기서 R_{yc}^2는 식 (10)에 주어진 것과 같다). 다음으로 두 표본점 i와 k가 서로 다른 블럭에 있는 경우에는 표본점 k는 표본점 i의 AV를 할당함으로써 통제변수 벡터 c_k는 c_i의 대조난수에 의하여 관찰되는 확률변수이다. AV에 의해 실현되는 두 반응변수의 공분산은

$$Cov(y_i, y_k) = \rho_2 \sigma_y^2 \quad \text{(A6)}$$

이며 $Cov(y_i, c_k) = Cov(y_k, c_i) = \sigma_{yc}^*$라 하면

$$Cov(y_i, c_k'\alpha_k) = \sigma_{yc}^{*\prime}\Sigma_c^{-1}\sigma_{yc} \quad \text{(A7)}$$

이다. 그리고 $Cov(c_i, c_k) = \Sigma_c^*$라 두면

$$\alpha'_i Cov(c_i, c_k)\alpha_k = \sigma_{yc}'\Sigma_c^{-1}\Sigma_c^*\Sigma_c^{-1}\sigma_{yc} \quad (A8)$$

이다. 식 (A6)-(A8)을 식 (A1)에 대입하면

$$Cov(y_i(\alpha_i), y_k(\alpha_k)) = (\rho_2 - R_{yc}^*)\sigma_y^2 \quad (A9)$$

이다(단 $R_{yc}^* = 2\sigma_{yc}^*\Sigma_c^{-1}\sigma_{yc} - \sigma_{yc}'\Sigma_c^{-1}\Sigma_c^*\Sigma_c^{-1}\sigma_{yc}$). 따라서 조정된 반응변수의 공분산행렬은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$Cov[y(A)] = (1-R_{yc}^2)\sigma_y^2[(r-q)XGX'/2 + (r+q)z'z/2 + (1-r)I] \quad (A10)$$

여기서 $r=(\rho_1 - R_{yc}^2)/(1-R_{yc}^2)$, $q=(\rho_2 - R_{yc}^*)/(1-R_{yc}^2)$이고, 행렬 G는 식 (4)에서 정의된 것과 같으며, z는 첫째 블럭에 속하는(CRN을 할당하는) 표본점에 대응하는 값은 1이고 둘째 블럭에 속하는(AV을 할당하는) 표본점에 대응하는 값은 -1인 크기가 (mx1)인 벡터이며 I는 (mxm) 단위행렬이다.

공분산행렬이 식 (A10)과 같은 패턴을 가지는 경우, WSL 추정량은 OLS 추정량과 일치한다[10]. 즉 $\hat{\beta}_{COM} = (X'X)^{-1}X'y(A)$이므로 추정량 $\hat{\beta}_{COM}$의 공분산행렬을 다음과 같다.

$$\begin{aligned} Cov(\hat{\beta}_{OLS}) &= (X'X)^{-1}X'[Cov(y(a)]X(X'X)^{-1} \\ &= (1-R_{yc}^2)\sigma_y^2[(r-q)G/2 + (1-r)(X'X)^{-1}] \end{aligned} \quad (A11)$$

위의 식에 r과 q를 대입하면 식 (12)를 얻게 된다.

참고문헌

[1] Anderson T.W. (1984). *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis.* John Wiley & Sons, New York.

[2] Kwon, C. and Tew, J.D. (1994). Combined Correlation Methods for Meta-model Estimation in Multi-population Simulation Experiments. *J. Statistical Computation and Simulation*, Vol. 49. 49-75.

[3] Kwon, C and Tew, J.D. (1994). Combining Antithetic and Control Variates in Designed Simulation Experiments. *Management Science* 40, 1021-1034.

[4] Lavenberg, S.S., Moeller, T.L. and Welch, P.D. (1982). Statistical Results on Control Variates with Application to Queuing Simulation. *Operations Research* 27, 182-202.

[5] Law, A. M. and Kelton, W.D. (2001). *Simulation Modeling and Analysis.* John Wiley & Sons, New York.

[6] Montgomery, D. C. (2001). *Design and Analysis of Experiments.* John Wiley & Sons, New York.

[7] Mood A.M., Graybill, F.A. and Boes, D. C. (1974). *Introduction to the Theory of Statistics.* McGraw-Hill, New York.

[8] Nozari, A., Arnold, S.F. and Pegden, C.D. (1984). Control Variates for Multi-population Simulation Experiments. *IIE Trans.* 16, 159-169.

[9] Rubinstein, R.Y. and Marcus, R. (1985). Efficiency of the Multi-variates Control Variates in Monte Carlo Simulation. *Operations Research* 33, 661-677.

[10] Schruben, L.W. and Margolin, B.H. (1978). Pseudorandom Number Assignment in Statistically Designed Simulation and Distribution Sampling Experiments. *JASA* 73, 504-525.

[11] Pritsker, A.A.B., O'Reilly, J. (1999). *Simulation with Visual SLAM and AWeSim.* John Wiley & Sons, New York.

주 작 성 자 : 권 치 명
논문투고일 : 2005. 07. 01
논문심사일 : 2005. 07. 21(1차), 2005. 07. 24(2차),
2005. 08. 01(3차)
심사판정일 : 2005. 08. 01

● 저자소개 ●

권치명
1978년 서울대학교 산업공학과 졸업
1983년 서울대학교 대학원 산업공학과 졸업
1991년 VPI & SU 산업공학과 박사
현 재 동아대학교 경영정보과학부 교수
관심분야: Simulation Modeling & Output Analysis, Simulation Optimization, FMS