

외력에 의해 요소이동이 발생하는 케이블-막 구조물의 해석 방법

Analysis Method for Cable-Membrane Structures with Element Slipping

강 주 원** 김 재 열*
Kang, Joo-won Kim, Jae-Yeol

요 약

본 연구의 주 목적은 다양한 요인에 의해 케이블-막구조물에 요소이동이 발생할 때, 당초 해석 시 가정되었던 좌표나 응력상태의 변화에 대해 막과 케이블 사이에 발생하는 요소이동의 방향이나 크기를 산정하고, 요소이동이 발생한 후 응력상태의 변화를 규명하는 것이다. 먼저 케이블 보강 막구조물의 요소이동 문제를 해석하기 위한 이론적 배경인 ALE 유한요소법의 개념을 소개하고, ALE 개념이 도입된 케이블-막구조물에서의 요소이동을 고려한 강성매트릭스를 작성하여 해석 프로그램을 개발한다. 개발된 프로그램의 타당성을 검증하기 위해 다양한 예제 해석을 수행한다.

Abstract

The purpose of this study is development of a finite element algorithm to find out the stressed condition, slipped direction and slipped dimension when some elements of cable-membrane structures are slipped from it's initially designed coordinates by external loads as wind or non uniform load and so on. In order to search the slipped behaviors of cable-membrane structures, a Arbitrarily-Lagrangian-Eulerian(ALE) finite element formulation is introduced. In these procedures, a stiffness matrix related with ALE concept is formulated and a FE analysis program for cable-membrane structures with slipped elements is developed. Various examples for cable and membrane structures are presented to verify the program's validation. The results are shown good agreement with that of existed one.

키워드 : ALE 유한요소, 케이블구조, 요소이동

Keywords : Arbitrary Lagrangian Eulerian Finite Element, Cable Structures, Element Slipping

1. 서 론

현재까지 대공간 구조물에 관련된 연구는 비선형 문제인 초기형상해석에서부터 구조물의 동적거동에 대한 부분까지 많은 연구가 진행되어 적용되고 있는 실정이다. 그러나 케이블로 보강된 막구조물은 케이블과 막부재간의 미끄러짐이 발생되면 초기설계 시 주어졌던 막과 케이블의 접촉점은 변하게 된다. 이로 인해 막과 케이블 요소의 기하학적상태도 재료상태가 바뀌어 질 수 있으며 초기평형 형상에

서 가정한 응력과 시공중 또는 시공후 준공상태의 응력분포가 다르게 되어 예상치 못한 구조적 문제점을 유발하는 요인이 될 수도 있다. 그러나 아직까지 이러한 문제점에 대해서 연구가 미진하여 현재는 미끄러짐을 전혀 고려하지 않고 초기에 주어진 좌표만을 사용하여 형상해석과 응력해석을 수행하고 있는 실정이다.

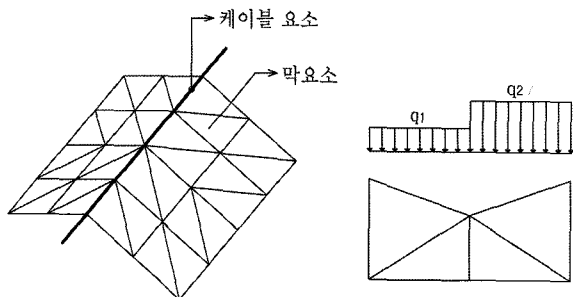
따라서 케이블 보강 막구조물에서 케이블과 막요소가 시공중 혹은 시공후 외부의 여러 요인에 의하여 초기의 위치로부터 어느 정도 이탈이 생겼을 때의 기하학적상태와 재료상태를 고려하여 재해석하는 다양한 기법을 개발하여 구조적인 문제점을 줄이는 연구는 대단히 시급하면서 중요하다고 할 수 있다.

* 정희원, 영남대학교 건축학부, 조교수, 공학박사
Tel : 053-810-2429, Fax : 053-810-4625
Email : kangj@yu.ac.kr

** 정희원, 협성대학교 건축공학과, 조교수, 공학박사
Email : jykim@uhs.ac.kr

본 연구에서는 대공간 구조시스템 중 케이블 보강 막구조물의 요소이동에 대한 문제점들을 해결하기 위해 기존의 막구조물의 비선형 유한요소 해석을 근거로 하여 ALE(Arbitrary Lagrangian-Eulerian) 유한요소법을 이용한 해석 방법을 제시하고 이를 토대로 비선형성을 기반으로 한 ALE법을 정식화하여 프로그램을 개발함과 동시에, 그 결과를 예제의 검증으로 고찰함으로써 요소이동을 고려한 케이블 보강 막구조물 해석 방법을 제시하는데 그 목적을 둔다.

이미 시공이 된 구조물에 있어서 위의 과정을 매우 정확히 적용하여 건설된 구조물일지라도 비대칭 하중<그림 1>, 외부의 충격, 시공 오차 혹은 바람과 같은 여러 가지 자연현상에 의해 위상이 변하게 되는 상황을 고려하지 않을 수 없다. 즉, 막 및 케이블 사이에 어느 정도의 요소이동(element slip)이 발생할 수 있다. 이러한 요소이동에 의해 초기 설계시 주어졌던 막과 케이블의 접촉점은 변하게 될 것이며, 이로 인해 막 및 케이블 요소의 기하 및 재료상태가 바뀌어 질 수 있다. 그러나 현재는 이러한 미끄러짐을 전혀 고려하지 않고 초기에 주어진 좌표만을 사용하고 있다. 그러므로 케이블 보강 막 구조물에서 케이블 및 막 요소가 시공후 혹은 시공중의 물리적인 요인에 의하여 초기의 위치로부터 어느 정도 이탈이 생겼을 때의 기하 및 재료상태를 고려하여 재해석하는 기법을 개발하여 실무에 적용할 필요가 있다.

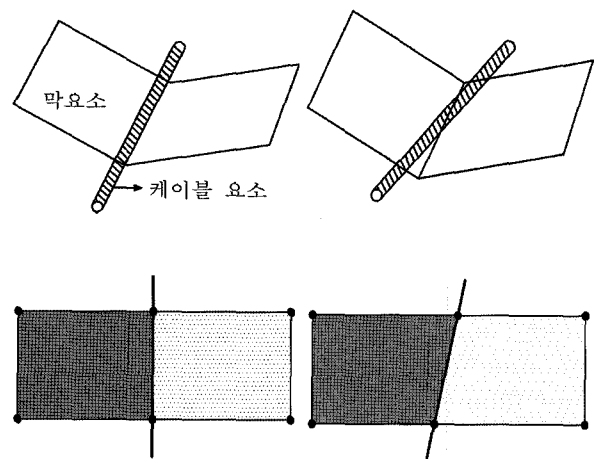


<그림 1> 케이블 보강 막구조물의 slip이 발생하는 예

본 연구의 주 목적은, 1)상기에서 설명한 여러 가지 요인에 의해 요소이동<그림 2>이 발생할 때, 당초 해석시 가정되었던 좌표나 응력상태의 변화에

대해 막과 케이블 사이에 발생하는 요소이동의 방향이나 크기의 산정 2)요소이동이 발생한 후 응력상태의 변화 3)요소이동이 잘 일어나지 않는 구조물등을 규명하는 것이다.

위의 목적을 달성하기 위해서 먼저 케이블 보강 막구조물의 요소이동 문제를 해석하기 위한 이론적 배경인 ALE 유한요소법의 개념을 간단히 소개하도록 한다. 다음은 참고문헌[12]를 기초로 하여 ALE 개념이 도입된 케이블-막구조물에서의 요소이동을 고려한 강성매트릭스를 작성하며, 이 강성매트릭스를 가지고 기존의 기하학적 비선형 해석법을 이용하여 해석 프로그램을 개발한다. 개발된 프로그램의 타당성을 검증하기 위해 다양한 예제 해석을 수행한다.



(a) 요소이동이 생기기 전 (b) 요소이동이 생긴 후

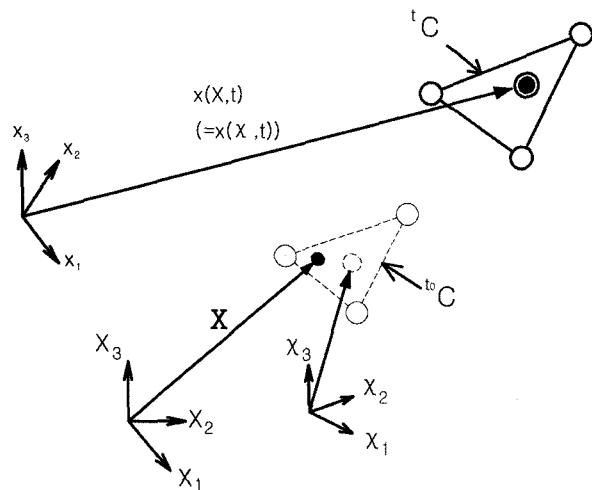
<그림 2> 요소이동에 의한 절점위치 및 요소상태의 변화

2. ALE유한요소법의 개념

본 연구에서 다루고자 하는 ALE란 Arbitrary Lagrangian Eulerian의 약자이다. ALE 유한요소법이라는 것은 이른바 ALE 정식화를 도입한 유한요소법이다. ALE 정식화라는 것은 매쉬 영역(domain)을 고정영역으로 하는 물체의 운동을 표현하는 것이다. 라그랑지안(Lagrangian)과 오일러(Eulerian) 정식화는 각각 고체역학과 유체역학분야에서 자주 이용되어진다. 이에 비해 ALE 정식화는

고체-유체 상호작용, 자유표면, 소성흐름등의 분야에서 자주 이용되어진다. ALE 정식화가 응용되어지고 있는 분야의 특징중 하나는 물체의 변형이 극단적으로 커진다는 것이다. 라그랑지안 정식화를 변형이 극단적으로 커지는 문제에 응용하고자 할 때, 메쉬가 극단적으로 작아지거나 커지거나 하는 문제가 발생하며, 이 현상이 해석의 수렴 및 정도에 영향을 준다. 즉, 해의 정도에 문제가 생기거나 동적인 문제를 다루게 될 경우 매우 작은 시간스텝을 사용하여야 하는 문제가 발생할 수 있다. 한편, 오일러 정식화는 공간영역을 고정영역으로 하는 물체의 운동을 표현하는 것으로서 변형이 극단적으로 커지는 문제에 응용할 수 있지만, 경계가 움직이는 문제에서는 대응하기 어렵다. 이상의 문제를 합리적으로 극복 가능한 것 중 하나가 본 연구에서 다루고자 하는 ALE 유한요소법이다.

ALE 유한요소법의 중요한 개념 중 하나는 메쉬영역 R_x (Mesh domain)이다. 라그랑지안 및 오일러 유한요소법의 경우는 메쉬영역이 각각 물질영역 R_X (material domain)와 공간영역 R_x (spatial domain)와 일치한다. R_x , R_x 및 R_x 내에 있는 한 점의 좌표를 각각 χ_i, X_i, x_i ($i=1,2,3$)로 나타내고 메쉬좌표(mesh coordinates), 물질좌표(material coordinates), 공간좌표(spatial coordinates)라고 하면, 통상적인 좌표계와는 달리 이들의 좌표는 각각 $\chi_1 - \chi_2 - \chi_3$, $X_1 - X_2 - X_3$ 및 $x_1 - x_2 - x_3$ 으로 표현된다<그림 3>.



<그림 3> ALE법에 이용된 좌표

라그랑지안 유한요소법의 경우는 $\chi_i = X_i$ 이고, 오일러 유한요소법의 경우는 $\chi_i = x_i$ 이다. ALE 유한요소법의 또 하나 중요한 개념은 메쉬점의 속도에 물질점의 점과 다른 임의의 값을 주는 것이 가능한 것에 있다.

이점을 만들면 요소가 극단적으로 변형하는 라그랑지안 유한요소법에서 발생하는 문제를 해결하는 것이 가능하다. 경계조건을 만족하는 경계상에 있는 메쉬점의 속도를 결정 할 수 있기 때문에 변형하는 경계에 대응하기 어려운 오일러 유한요소법에 있는 문제도 해소할 수 있다. 물질점과 메쉬점의 상대속도가 일어나기 때문에 오일러 유한요소법과 마찬가지로 ALE유한요소법의 경우에도 이류항(convective terms)이 정식화된다. 이 이류항이 존재하는 것에 따라 수치해석 중에 해가 진동(oscillate)하는 현상이 일어날 수 있다는 사실을 특별히 고려할 필요가 있다. 그러나 ALE 유한요소법의 경우 메쉬점의 속도를 임의로 주는 것이 가능하기 때문에 이류항의 영향을 적게 하는 것이 가능하다. 이 메쉬점 속도를 주는 방법은 해석에 있어서 중요한 1단계를 차지한다. 위에 기술한 것처럼 ALE 정식화는 메쉬영역 R_x 를 고정영역으로 하는 물체의 운동을 표현하는 것이다. 유한요소법을 이용하는 경우, 초기형상을 유한요소 메쉬로 분할하고 이산화(discretization) 모델을 작성하기 때문에 메쉬 영역과는 이러한 유한요소영역과 일치한다. 초기형상의 메쉬 교차점 및 요소내에 있는 점을 합쳐서 메쉬점이라고 부르고, 그 위치를 메쉬 좌표 χ_i 으로 표시한다. 물체가 외력을 받아 변형할 때, 현 시각 t의 변형형상을 공간좌표 x_i 로 표시한다. 유한요소법에서는 물체를 유한요소의 집합으로써 근사하고 있으므로 공간좌표 x_i 는 메쉬의 현시각 t에 대한 위치를 나타낸다. 이것을 식으로 나타내면 다음과 같다.

$${}^t x_j = x_i({}^t \chi, t) \tag{1}$$

단, ${}^0 \chi = ({}^0 \chi_1, {}^0 \chi_2, {}^0 \chi_3)$ 로 표시하고 초기형상 위의 메쉬점을 의미한다. 식 (1)의 좌측 위의 첨자는 시각을 나타내고, 어느 시각에 대응하는 양인가를 명기하기 위한 기호이다. 해석의 대상이 되는 것은 물질

점으로 구성된 물체이다. 물질점의 집합으로 정의된 물질영역은 변형후 어디에 있는가를 알 필요가 있다. 왜냐하면, 해석에 이용되는 변형도 및 응력등의 양은 물체가 변형하는 것에 의해 일어나는 양이기 때문이다. 식 (1)에서 나타내는 공간좌표에 어떠한 물질점이 오고 있는가를 식으로 나타내면 다음과 같다.

$${}^t_0 X_i = X_i({}^t x, t) \quad (2)$$

단, ${}^t x = ({}^t x_1, {}^t x_2, {}^t x_3)$ 을 표시하고 공간중의 한 점을 의미한다. 다시 초기 상태 위의 메쉬점 ${}^0 x$ 에 어떤 물질점이 오고 있는가를 식으로 나타내면 다음과 같이 된다.

$${}^0_0 X_i = \mathbf{x}_i({}^0 x, 0) \quad (3)$$

식 (2), (3)의 물질좌표 X_i 의 좌측아래의 첨자는 같은 시각을 표시하고, 형태에 있어서 어느 시각의 X 인가를 명기하기 위한 기호이다. 라그랑지안 정식화에서는 ${}^t_0 X = {}^0_0 X$ 이다. 하지만 ALE정식화는 메쉬영역 R_x 를 고정영역으로 하는 물체의 운동을 표현하는 것이고, 다시 그 위에 메쉬점이 임의의 속도로 움직일 수 있기 때문에 ${}^t_0 X \neq {}^0_0 X$ 이 성립한다. 이것은 각 시각(증분스텝)에 있어서, 그때의 요소내에 들어가 있는 물질점 집합이 다른 것을 의미한다. 즉, ALE 정식화를 이용할 경우, 초기단계 $t=t_0$ 부터 최종단계 $t=t_E$ 까지 기지의 영역은 $t=t_0$ 에 의해서 정의되어진 메쉬영역 R_x 이다. 임의의 시각 $t=t$ 에 있어서 R_x 가 차지하는 공간영역 R_x 와 그 R_x 에 들어가 있는 물질영역 R_x 는 미지이고 시간과 함께 변화해간다. 이것은 해석상에 있어서 다음 스텝을 의미한다. 즉, 예를 들면 유한요소법에서 점선강성 매트릭스나 요소절점력 벡터등을 구할 때 적분영역이 R_x 혹은 R_x 의 경우 시각(증분스텝)마다 갱신해야만 된다는 것을 나타내며 적분영역이 R_x 라면 바꿀 필요가 없음을 나타낸다. 이 「적분영역 R_x 를 갱신할 필요가 없다는 것」은 「메쉬영역을 고정영역으로 하는 것」과 같은 의미이다. R_x 및 R_x 를 바꾸는 것을

식으로 나타내면, 각각 다음과 같이 된다.

$${}^{t+\Delta t}_0 X_i = {}^t_0 X_i + {}_0 X_i \quad (4)$$

$${}^{t+\Delta t}_0 x_i = {}^t x_i + x_i \quad (5)$$

식 (4)와 (5)의 Δt 는 증분의 크기를 나타내며 좌상에 첨자가 없는 항은 증분량을 나타낸다.

여기까지 ALE정식화에 있어 물체의 운동을 나타내기 위한 기하학 관계식을 알아 보았다.

3. ALE법에 의한 강성매트릭스 구성

3.1 ALE 정식화에 의한 가상일방정식

구조해석에 필요한 기본식은 평형식, 변형도-변위 관계식 및 응력-변형도 관계식(구성식)이다. 여기에서 평형식을 구하기 위한 가상일방정식을 살펴보도록 한다. 비선형 문제를 풀 경우 증분법을 이용하는 경우가 많다. 증분법이라는 것은 목표하는 스텝을 몇 회에 나누어 Δt 씩 문제를 풀어 나가는 수치해석 방법이다. 해석하고자 하는 문제의 시각 t 까지의 변형 상태를 알고, 다음의 시각 $t + \Delta t$ 에 대한 변형 상태를 구하도록 하는 것이다. ALE유한요소법 뿐 아니라 라그랑지안 혹은 오일러 유한요소법의 경우라도 가장 최초의 출발점이 되는 것은 다음의 식이다.

$$\int_{{}^{t+\Delta t}R_x} \delta \frac{\partial u_i}{\partial t^{t+\Delta t}} {}^{t+\Delta t} \tau_{ij} d^{t+\Delta t} V = \int_{{}^{t+\Delta t}R_x} \delta u_i {}^{t+\Delta t} b_i \int_{{}^{t+\Delta t}R_x} \delta u_i {}^{t+\Delta t} t_i d^{t+\Delta t} V \quad (6)$$

이것은 변형후의 형상이 이용된 가상일의 방정식이다. 식 (6)의 좌변은 내부 가상일식, 우변은 외부 가상일식이다. 여기에서 내부가상일식에 대해서 설명한다. 이제 식(6)의 좌변만을 다음과 같이 쓴다.

$$\delta {}^{t+\Delta t} W_i = \int_{{}^{t+\Delta t}R_x} \delta \frac{\partial u_i}{\partial t^{t+\Delta t} x_j} {}^{t+\Delta t} \tau_{ij} d^{t+\Delta t} V \quad (7)$$

식 (7)의 적분 영역은 시각 $t + \Delta t$ 에 있어서 공간영역이다. 이 공간영역은 아직 모르기 때문에 기지

의 상태를 이용하여 식을 바꾸어야 한다. 시각 t 까지의 상태는 알고 있기 때문에 그중 어느 것을 이용해도 이론상으로는 가능하다. 그러나 ALE유한요소법의 경우 초기형상에서 정의된 매쉬영역 R_x 는 기지이며 고정이기 때문에 이 R_x 를 이용한다. 식 (7)은 다음과 같이 바꾸어 쓸 수 있다.

$$\delta {}^{t+\Delta t}W_i = \int_{R_x} \delta \frac{\partial u_i}{\partial \chi_k^0} \frac{\partial^0 \chi_k}{\partial {}^{t+\Delta t}x_j} {}^{t+\Delta t}\tau_{ij} \hat{J} d^0 \hat{V} \quad (8)$$

식 (8)의 \hat{J} 는 시각 $t+\Delta t$ R_x 와 0R_x 에 있는 미소체적의 체적변화율이며 다음의 식에서 부여된다.

$$\hat{J} = \frac{d {}^{t+\Delta t}V}{d^0 V}$$

$$\hat{J} = \det \left[\frac{\partial {}^{t+\Delta t}x_i}{\partial^0 x_j} \right] \quad (9)$$

식 (8)은 비선형방정식이므로 식을 직접 푸는 것은 어렵다. 여기에서 식 (8)을 선형화하도록 한다. 이 선형화에서 얻어지는 식은 증분해석의 기본식이 된다. 식 (8)을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\delta ({}^t W_i + W_i) = \int_{R_x} \delta \frac{\partial u_i}{\partial \chi_k^0} \frac{\partial^0 \chi_k}{\partial {}^{t+\Delta t}x_j} {}^{t+\Delta t}\tau_{ij} \hat{J} d^0 \hat{V}$$

$$\delta ({}^t W_i + W_i) = \int_{R_x} \delta \frac{\partial u_i}{\partial \chi_k^0} \frac{\partial^0 \chi_k}{\partial {}^t x_j} {}^t \tau_{ij} \hat{J} d^0 \hat{V}$$

$$\delta ({}^t W_i + W_i) = \int_{R_x} \delta \frac{\partial u_i}{\partial \chi_k^0} \frac{\partial^0 \chi_k}{\partial {}^t x_j} {}^t \tau_{ij} \hat{J} d^0 \hat{V} + \delta \left(\frac{\partial {}^t W_i}{\partial t} \Delta t \right) \quad (10)$$

식 (10)의 W_i 는 시각 t 에서 $t+\Delta t$ 의 사이에서 발생하는 내부일의 증분이다. 식 (10)의 우변 제 2항의 시각 t 에 의한 가상일의 시각 t 에 대한 편미분을 주목하자. ALE의 유한요소법에서는 매쉬영역을 고정영역으로 한다. 이것은 식의 독립변수가 매쉬좌표가 χ_i 인 것을 의미한다. 따라서 식 (10) 우변 제2항의 시각 t 에 의한 가상일의 시간 t 에 대한 편미분은

χ_i 가 고정된 편미분이다. 이러한 편미분은 다음의 기호로 나타내어진다.

$$\frac{\partial ()}{\partial t} \int_x = ()^* \quad (11)$$

식 (10)으로부터 내부에너지에 대한 변분식은

$$\delta {}^t W_i = \int_{R_x} \delta \frac{\partial u_i}{\partial \chi_j^0} \frac{\partial^0 \chi_k}{\partial {}^t x_j} {}^t \tau_{ij} \hat{J} d^0 \hat{V}$$

$$\delta ({}^t W_{INT})^* = \int_{R_x} \delta \frac{\partial u_i}{\partial \chi_k^0} \left[\left(\frac{\partial^0 \chi_k}{\partial {}^t x_j} \right)^* {}^t \tau_{ij} \hat{J} + \frac{\partial^0 \chi_k}{\partial {}^t x_j} ({}^t \tau_{ij})^* \hat{J} + \frac{\partial^0 \chi_k}{\partial {}^t x_j} {}^t \tau_{ij} ({}^t \hat{J})^* \right] d^0 \hat{V} \quad (12)$$

가 된다. 식 (12)의 우변 []안에 있는 괄호 () 3개는

$$\left(\frac{\partial^0 \chi_m}{\partial {}^t x_j} \right)^* = - \frac{\partial^0 \chi_m}{\partial {}^t x_k} \frac{\partial^t \hat{v}_k}{\partial {}^t x_j} \quad (13)$$

$$({}^t \tau_{ij})^* = - {}^t \tau_{ij,k} C_k + C_{ijkl} v_{(k,l)} + S_{ijkl} v_{[k,l]} \quad (14)$$

이다. 단,

$$v_{(k,l)} = 1/2(v_{k,l} + v_{l,k}) \quad (15a)$$

$$v_{[k,l]} = 1/2[v_{k,l} - v_{l,k}] \quad (15b)$$

$$(\mathcal{J})^* = \frac{\partial^t \hat{v}_i}{\partial {}^t x_i} {}^t \hat{J} \quad (16)$$

식 (14)의 C_{ijkl} , S_{ijkl} 은 재료상수와 응력을 포함하는 식이다. 먼저 식 (13)과 (16)을 식 (12)에 대입하면

$$\delta ({}^t W_i)^* = \int_{R_x} \delta \frac{\partial u_i}{\partial \chi_k^0} \left[- \frac{\partial^0 \chi_k}{\partial {}^t x_n} \frac{\partial^t \hat{v}_n}{\partial {}^t x_j} {}^t \tau_{ij} {}^t \hat{J} + \frac{\partial^0 \chi_k}{\partial {}^t x_j} ({}^t \tau_{ij})^* \hat{J} + \frac{\partial^0 \chi_k}{\partial {}^t x_j} {}^t \tau_{ij} \frac{\partial^t \hat{v}_n}{\partial {}^t x_n} ({}^t \hat{J})^* \right] d^0 \hat{V}$$

가 된다. $d^t V = {}^t \hat{J} d^0 \hat{V}$ 를 고려하면, 위의 식은 다음과 같이 ${}^t R_x$ 에 대한 적분으로 변환이 가능하다.

$$\begin{aligned} \delta({}^tW_i)^* &= \int_{t_{r_i}} [-\delta \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial {}^t\hat{v}_n}{\partial x_j} {}^t\tau_{ij} + \delta \frac{\partial u_i}{\partial x_j} ({}^t\tau_{ij})^* \\ &\quad + \delta \frac{\partial u_i}{\partial x_j} {}^t\tau_{ij} \frac{\partial {}^t\hat{v}_n}{\partial x_n}] d{}^tV \\ \delta({}^tW_i)^* &= \int_{t_{r_i}} [-\delta \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial {}^t\hat{v}_j}{\partial x_n} {}^t\tau_{in} + \delta \frac{\partial u_i}{\partial x_j} ({}^t\tau_{ij})^* \\ &\quad + \delta \frac{\partial u_i}{\partial x_j} {}^t\tau_{ij} \frac{\partial {}^t\hat{v}_n}{\partial x_n}] d{}^tV \\ \delta({}^tW_i)^* &= \int_{t_{r_i}} {}_i\delta u_{i,j} [({}^t\tau_{ij})^* - {}^t\tau_{in} {}^t\hat{v}_{j,n} \\ &\quad + {}^t\tau_{ij} {}^t\hat{v}_{n,n}] d{}^tV \end{aligned} \quad (17)$$

식 (16)의 유도과정에 있어 다음의 식 및 기호가 사용되어졌다.

$$\partial \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} = \delta \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_n} \frac{\partial {}^t\hat{v}_n}{\partial x_j} {}^t\tau_{ij}, \frac{\partial ()}{\partial x_j} = {}_i(),_j$$

상대속도 ${}^t c_i$ 는

$${}^t c_i = {}^t v_i - {}^t \hat{v}_i \quad (18)$$

이기 때문에 메쉬속도 ${}^t \hat{v}_i$ 는 다음의 식으로 된다.

$${}^t \hat{v}_i = {}^t v_i - {}^t c_i \quad (19)$$

식 (19), (14)와 (15b)를 식 (17)에 대입하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta({}^tW_i) &= \int_{t_{r_i}} {}_i\delta u_{i,j} {}_iC_{ijkl} {}^t v_{k,l} d{}^tV + \int_{t_{r_i}} {}_i\delta u_{i,j} {}^t\tau_{ij} {}^t v_{i,l} d{}^tV \\ &\quad + \int_{t_{r_i}} {}_i\delta u_{i,j} ({}^t\tau_{ik} {}^t c_{j,k} - {}^t\tau_{ij} {}^t c_{k,k} - {}^t c_k {}^t\tau_{i,j,k}) d{}^tV \end{aligned} \quad (20)$$

3. 2 증분가상일식의 이산화

내부 가상일 식 (20)에 시간 증분 dt 를 대입하면, 다음에 나타나는 내부 가상일의 증분식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta(W_i) &= \int_{t_{r_i}} {}_i\delta u_{i,j} {}_iC_{ijkl} {}^t u_{k,l} d{}^tV \\ &\quad + \int_{t_{r_i}} {}_i\delta u_{i,j} {}^t\tau_{ij} {}^t u_{i,l} d{}^tV \\ &\quad + \int_{t_{r_i}} {}_i\delta u_{i,j} ({}^t\tau_{ik} \bar{u}_{j,k} - {}^t\tau_{ij} \bar{u}_{kk} \\ &\quad - \bar{u}_k {}^t\tau_{i,j,k}) d{}^tV \end{aligned} \quad (21)$$

단, $c_j dt = \bar{u}_j$, $\delta(W_i)^* = \delta(W_i)^* dt$ 이다. 통상의 유한요소법으로 식 (21)을 이산화한다. 상세한 유도과정은 생략하고, 결과만을 보면 식 (21)로부터 다음과 같은 접선강성식을 얻을 수 있다.

$$({}^tK_L + {}^tK_{NL})u + {}^tK_{ALE} \bar{u} \quad (22)$$

통상적으로 생각할 수 있는 일반적인 기하학적 비선형 유한요소법과 비교해 보면, ${}^tK_L, {}^tK_{NL}$ 은 각각 선형, 비선형강성매트릭스이고, ${}^tK_{ALE}$ 가 ALE유한요소법에 새로 추가되는 매트릭스이다. u 는 절점의 증분변위, \bar{u} 는 u 와 절점의 증분변위 \hat{u} 사이에 발생하는 상대변위이다. ${}^tK_L, {}^tK_{NL}$ 는 통상적인 기하학적 비선형 해석법으로 구해지고, ${}^tK_{ALE}$ 는 \bar{u} 가 발생하는 것에 의해 나타나는 것이다. 여기에서, 식 (22)를 이용해 선형화 증분 평형방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$({}^tK_L + {}^tK_{NL})u + {}^tK_{ALE} \bar{u} = {}^{t+\Delta t}P - {}^tF \quad (23)$$

${}^{t+\Delta t}P, {}^tF$ 는 제각기 절점 외력 및 내력벡터이다. \bar{u} 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\bar{u} = u - \hat{u} \quad (24)$$

식 (24)을 고려하면, 식 (23)은 다음과 같이 된다.

$$({}^tK_L + {}^tK_{NL} + {}^tK_{ALE})u = {}^{t+\Delta t}P - {}^tF + {}^tK_{ALE} \hat{u} \quad (25)$$

식 (25)에서 알 수 있듯이 일반적인 라그랑지안 유한요소법과 비교하면, 접선강선 및 불평형력 벡터에 각각 ${}^tK_{ALE}$ 와 ${}^tK_{ALE}\hat{u}$ 가 새롭게 추가되게 된다. 이 ${}^tK_{ALE}$ 와 ${}^tK_{ALE}\hat{u}$ 는 상대변위 \bar{u} 가 생기는 것에 의해 생기는 힘이며, ALE 유한요소법에서만 다루어지는 항이다. 이상의 강성매트릭스를 가지고 기존의 기하학적 비선형 유한요소법과 같은 방법으로 프로그래밍을 수행한다.

4. ALE 유한요소법을 이용한 케이블-막 요소이동 해석법

케이블-막 구조물의 기하학적 비선형해석에 있어서, 시각 t 까지의 상태(변형 및 응력) tC 를 알 수 있고, 시각 $t + \Delta t$ 의 상태 ${}^{t+\Delta t}C$ 를 구하기로 한다. 미끄러짐에 수반되는 형태의 경우, 최초 같은 위치 ${}^t x$ (즉, 좌표가 같음)에 있는 막절점 및 그 절점에 있는 물질점이 변형 후 각각 ${}^{t+\Delta t}x$, ${}^{t+\Delta t}\hat{x}$ 의 다른 위치로 위치가 변한다. 이 ${}^{t+\Delta t}x$ 와 ${}^{t+\Delta t}\hat{x}$ 와의 상대증분 변위는 \bar{u} 이다. 이 \bar{u} 는 절점 위치에 대응하는 미끄러짐의 변위를 나타낸다. ${}^{t+\Delta t}x$, ${}^{t+\Delta t}\hat{x}$ 및 u 는 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$${}^{t+\Delta t}x = {}^t x + u \tag{26}$$

$${}^{t+\Delta t}\hat{x} = {}^t \hat{x} + \bar{u} \tag{27}$$

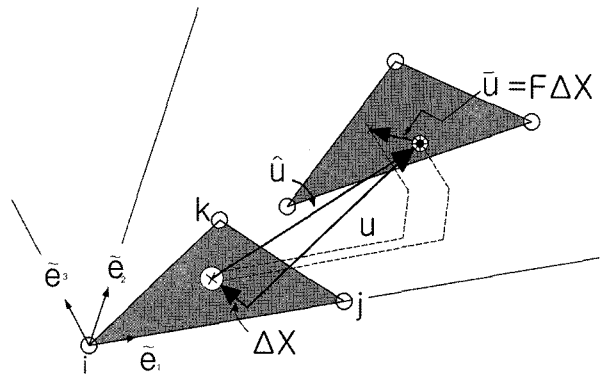
$$u = \hat{u} + \bar{u} \tag{28}$$

본 논문에서는 식(28) 대신 다음의 식을 도입했다.

$$u = \hat{u} + \Delta X \tag{29}$$

ΔX 는 <그림 4>에서 알 수 있듯이 요소이동에 의한 tC 에 있어서 케이블-막요소 영역내에 포함되어 있는 물질점 집합의 변화를 나타낸다. 이 ΔX 는 미지의 식이고, 식 (28)의 \bar{u} 와는 다음과 같은 관계가 있다.

$$\bar{u} = F_i^{t+\Delta t} \Delta X \tag{30}$$



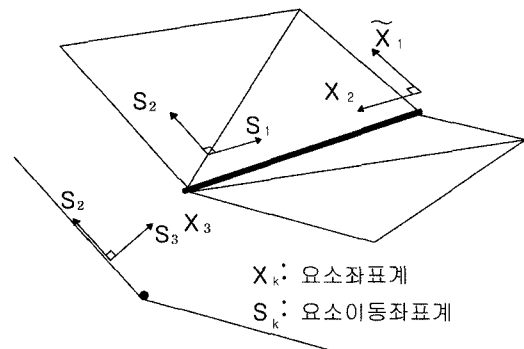
<그림 4> 물질점과 메쉬점의 요소이동변위와 요소이동변위에 관련된 상대변위

여기에서 $F_i^{t+\Delta t}$ 는 시각 t 의 위치를 기준으로 하는 시각 $t + \Delta t$ 의 변형구배를 나타낸다.

여기서 식 (29)의 우변 2항의 \hat{u} 와 ΔX 를 미지변수로 하고, 각각 절점변위의 라그랑지안(L)과 오일러(E) 부분이라고 하면, L부분은 물체의 변형, E부분은 미끄러짐에 의한 요소내에 포함되는 물질점 집합의 변화를 나타낸다.

요소이동을 나타내는 절점변위의 E부분을 현시각의 위치 tC 를 이용하여 <그림 5>에서와 같이 $s_1 - s_2 - s_3$ 좌표계에서 정의하는 것은 요소이동의 현상에서부터 생각하는 것이 보다 적절하다. 따라서, 해석상 ΔX 성분 대신에 s_1, s_2 를 미지변수로 도입한다. ΔX 의 요소국소좌표계의 성분 ΔX_i ($i=1,2$)와 s_α ($\alpha=1,2$) 사이에 다음의 관계가 있다.

$$\Delta X_i = \tilde{e}^T s_\alpha s_\alpha \tag{31}$$



<그림 5> Slip과 요소의 국부좌표계

<그림 4> 및 <그림 5>의 ΔX 와 s_α 의 정의에서부

터 알 수 있듯이 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\Delta X_3 = 0, s_3 = 0 \tag{32}$$

식 (31)과 (32)을 식 (29)에 대입하여, 성분을 표시하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} u_1 &= \hat{u}_1 + \tilde{e}_1^T s_a s_a \\ u_2 &= \hat{u}_2 + \tilde{e}_2^T s_a s_a \\ u_3 &= \hat{u}_3 \end{aligned} \tag{33}$$

식 (33)을 다음의 가상일법의 증분식에 대입하고

$$\int_{V'} \delta {}_t C_{ijkl} {}_t u_{k,i} d^t V + \int_{V'} \delta {}_t \mu_{k,j} \tau_{ij} {}_t u_{k,j} d^t V = \delta^{t+\Delta t} P - \int_{V'} \delta {}_t u_{ij} \tau_{ij} d^t V \tag{34}$$

유한요소법으로 이산화하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$({}^t \hat{K}_L + {}^t \hat{K}_{NL}) \hat{u} = {}^{t+\Delta t} \hat{P} - {}^{t+\Delta t} {}_t \hat{F} \tag{35}$$

여기에서 ${}^t \hat{K}_L, {}^t \hat{K}_{NL}, {}^{t+\Delta t} \hat{P}, {}^{t+\Delta t} {}_t \hat{F}$ 는 통상 갱신 라그랑지안 정식화(ULF)로써 구하는 선형, 비선형 강성 매트릭스, 외력, 내력벡터에 상응하는 것이지만, 그 크기는 일반적인 9×9(매트릭스) 및 9×1(벡터)에 대응하고, 15×15(매트릭스) 및 15×1(벡터)로 된다. 자세한 식 유도는 생략하기로 한다. 식(35)의 요소절점 벡터 \hat{u} 의 내용은 다음과 같다.

$$\hat{u} = [\hat{u}^1 s^1 : \hat{u}^2 s^2 : \hat{u}^3 s^3 :]^T \tag{36}$$

여기에서, \hat{u}^j, s^j 는 막요소의 J번째 절점(J=1,2,3)의 절점변위와 요소이동을 표현하는 변위이다. \hat{u} 의 크기도 15×1이다. 따라서, 하나의 접촉점부근의 자유도수는 5개이다. 그 이외의 절점의 자유도수는 통상의 라그랑지안 정식화의 경우와 같고 3이다. 외력 및 내력벡터 ${}^{t+\Delta t} \hat{P}, {}^{t+\Delta t} {}_t \hat{F}$ 의 제4, 5, 9, 10, 14, 15번

째의 성분은 마찰합력을 표시한다. 여기서 다른 문제는 마찰이 없는 문제이기 때문에 외력벡터 ${}^{t+\Delta t} \hat{P}$ 의 제 4, 5, 9, 10, 14, 15번째의 성분은 0이 된다. 이상의 정식화에 있어서 다음의 관계를 도입한다.

$${}^{t+\Delta t} V_M \approx {}^t V \tag{37}$$

통상 유한요소법으로 부터 구조의 전체 좌표계에 대한 접선강성 매트릭스 ${}^t K_G$ 를 만들어 선형 평형식을 풀면 구조전체의 \hat{u} 를 구할 수 있다. ${}^t K_G$ 를 만들 때 요소 국소좌표계에 대한 접선강성 매트릭스를 전체 좌표계에 대한 것으로 변환하지 않으면 안된다. 요소이동을 나타내는 변위 s_1', s_2' 는 <그림 5>와 같고, $s_1 - s_2 - s_3$ 좌표계에 대한 성분 그대로를 이용하면 변환 매트릭스는 다음과 같다.

$$R = \begin{bmatrix} \hat{T} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{T} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{T} \end{bmatrix} \tag{38}$$

여기서

$$T = \begin{bmatrix} \tilde{e}_1^T e_1 & \tilde{e}_1^T e_2 & \tilde{e}_1^T e_3 & 0 & 0 \\ \tilde{e}_2^T e_1 & \tilde{e}_2^T e_2 & \tilde{e}_2^T e_3 & 0 & 0 \\ \tilde{e}_3^T e_1 & \tilde{e}_3^T e_2 & \tilde{e}_3^T e_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{39}$$

$\tilde{e}, e(i=1,2,3)$ 은 각각 요소국소와 전체좌표계의 기저 벡터(basis vector)이다.

5. 예제해석 및 고찰

5.1 검증예제 I

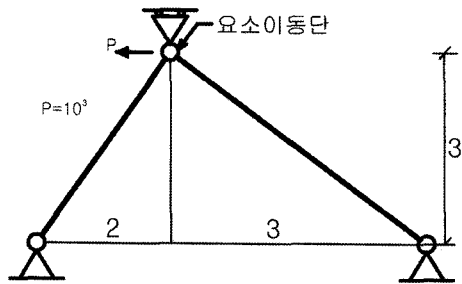
본 절에서는 개발된 프로그램의 타당성을 객관적으로 검증하기 위해 최근에 발표된 논문의 예제와 같은 조건하에서 해석해 보기로 하였다.

<그림 6>(a)에 해석모델 및 재원을 나타내고 있다. 예제구조물은 1개의 이동단 및 2개의 활절로 이루어진 단일 케이블 구조물이며, 이동단에서 좌측(-x 방향)으로 1000의 힘이 작용하고 있다. 케이블의

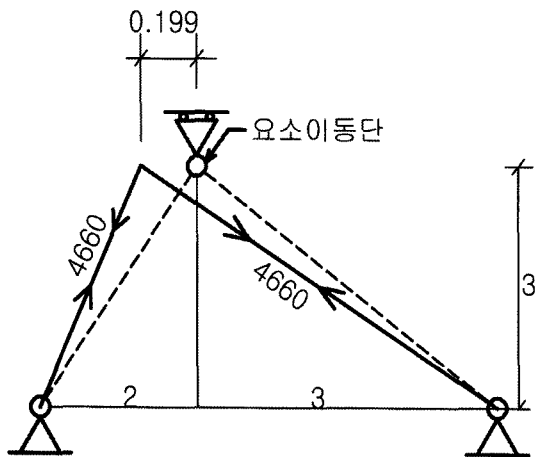
단면적 A 및 재료의 영계수 E_c 는 각각 1과 10^6 이다. T 는 케이블의 초기장력을 나타내며 모두 0이다. <그림 6>(b)는 본 프로그램에 의한 해석결과이며, <표 1>에 기존에 발표된 결과와 비교하였다. 해석 결과는 본 연구에서 개발된 방법과 Haber[12]에 의해서 발표된 결과 값이 비교적 정확히 일치하였다.

<표 1> 결과 비교 1

	Present	Haber[12]	오 차
x방향 변위	0.199	0.20012	0.5 %
slip 변위	0.123	0.12334	0.2 %
케이블 장력	4660	4649	0.2 %



(a) 해석전 형상



(b) 해석후 형상

<그림 6> 2개의 요소와 1개의 이동 절점을 갖는 단일 케이블구조

5.2 검증예제 II

<그림 7>은 등방성재료로 가정된 단일 막 구조물이다. 예제구조물은 폭 1(무차원 값) 그리고 높이 3

으로 이루어져 있으며 상단부 절점이 이동단이다. 프와송비는 0으로 가정하였으며, 그림과 같이 이동단에서 오른쪽 방향(-x 방향)으로 1000의 외력이 가해지고 있다. 그림에서 d로 표시되는 변위는 이동단에서 발생하는 이동변위이고, s는 이동변위에 대응하는 막재의 slip 변위이다.

<표 2>는 해석 결과를 기존의 논문과 비교한 것이며, 본 연구에서 개발된 방법과 Noguchi[11] 및 Haber[12]에 의해서 발표된 결과 값이 비교적 정확히 일치하였다.

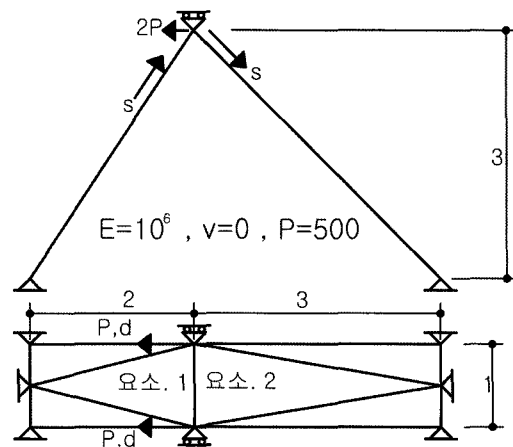
<표 3>은 본 프로그램에 의한 해석결과와 이론해에 의한 장력값의 비교이다.

<표 2> 결과 비교 2

	Present	Haber[12]	Noguchi[11]
x방향 변위	0.199	0.20042	0.2089
막재의 slip 변위	0.123	0.12346	0.1298
막요소 1의 장력	4660	4647	-
막요소 2의 장력	4660	4647	-

<표 3> 결과 비교 3

	Present	이론해
막요소 1의 장력	4660	4620
막요소 2의 장력	4660	4620

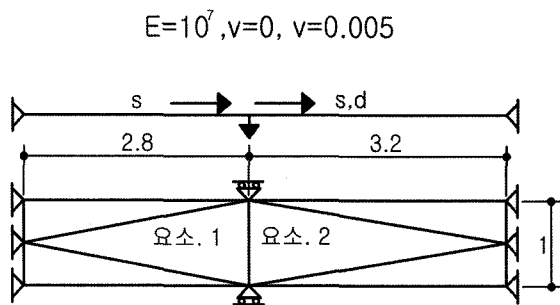


<그림 7> 6개의 요소와 2개의 이동절점을 갖는 등방성 단일 막구조 I

5.3 검증예제 III

검증예제 III은 <그림 7>의 예제와 같은 경계조건을 갖고, 기하형상 및 재원은 <그림 8>과 같다. 하중으로써 강제변위가 하부 방향으로 0.005가 주어진 모델이다.

<표 4>는 본 프로그램에 의한 해석결과와 이론해에 의한 장력값의 비교이다. 이론해와 정확히 일치하고 있음을 알 수 있다.



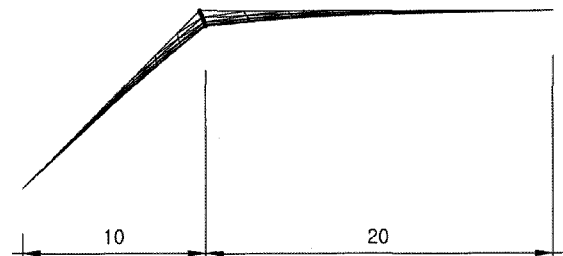
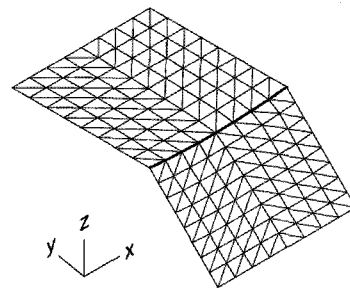
<그림 8> 6개의 요소와 2개의 이동절점을 갖는 등방성 단일 막구조II

<표 4> 결과 비교 4

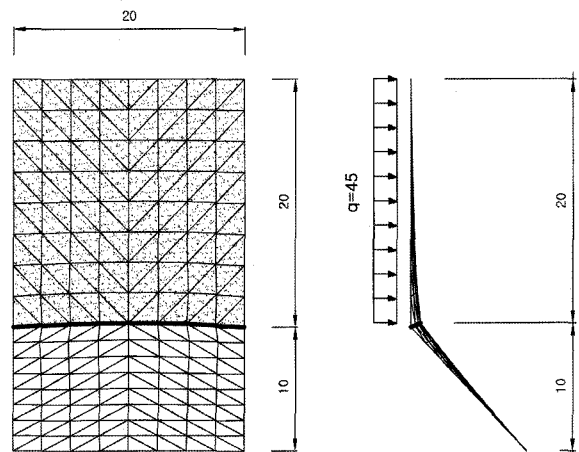
	Present	이론해
x 방향 변위	0.2	-
막재의 slip 변위	0.2	-
막요소 1의 장력	13.9	13.9
막요소 2의 장력	13.9	13.9

5.4 검증예제 IV

검증예제 IV은 케이블을 따라 막에서 2방향으로 요소이동이 발생되며 부재간의 마찰은 없는 것으로 가정하였으며 요소간의 이동을 고려한 경우와 고려하지 않은 경우로 구분하여 각각 해석하였다. 모델의 구성을 살펴보면 막은 수평 수직의 2부분으로 구성되어 있으며 수평과 수직막의 경계에 보강 케이블이 설치되어있다. 수평부분 막의 크기는 20feet × 20feet의 정방형이고, 수직부분의 막은 20feet × 10feet의 장방형이며 수직으로는 10feet의 높이로 구성되었다. <그림 9> 및 <그림 10>는 막에 500 lb/ft, 케이블에는 15 kips의 초기응력을 가하여 해석한 형상해석의 결과 및 해석제원을 각각 나타내고 있다.



<그림 9> 3차원 케이블-막 요소이동 해석 모델형상

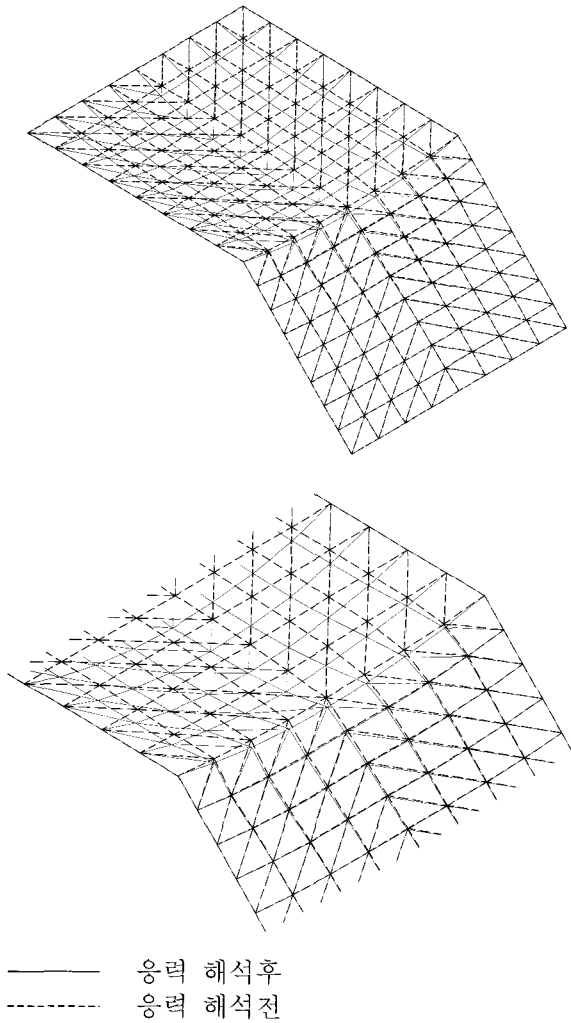


<그림 10> 예제 IV의 제원 및 하중재하

예제 IV의 해석결과 좌표이동량 및 케이블의 응력 변화량에 있어서 참고문헌[12]와 1% 미만의 차이가 있음을 알 수 있었다.

6. 결 론

본 연구에서는 요소이동을 고려한 케이블-막구조물의 해석법을 제안하였다. 참고문헌[12]의 개념을 기초로 하여 ALE 유한요소법에 대한 강성매트릭스가 새롭게 구성되었으며, 이들을 이용하여 요소이동을 갖는 케이블 구조물을 해석하기 위한 방법을 제안하였다.



〈그림 11〉 요소이동을 고려한 해석 전후 형상

개발된 프로그램의 방법적인 면에 대한 검증으로써 이동단을 갖는 케이블 및 막 구조물을 해석해 보았다. 4개의 전 해석 예제로부터 변형형상, 요소이동방향 및 힘의 평형으로부터 얻어진 결과는 타당하다라고 말할 수 있다. 아울러, 객관적인 타당성을 알아보기 위해 기존의 논문과도 비교하였으며, 비교적 정확히 일치하였다.

이상의 결과로부터 다음과 같은 결과를 얻었다.

1. ALE 정식화를 이용한 케이블-막구조물의 요소이동을 해석할 수 있는 알고리즘을 개발하였다.
2. 개발된 본 프로그램은 요소이동을 갖는 케이블-막 구조물의 해석에 유용하게 이용될 수 있으리라고 생각된다.
3. 제안된 모델들은 비교적 복잡하지 않은 2차원 및 3차원 케이블 보강 막구조물에 한정되어 있

으므로, 실제구조물에 적합한 대한 사항은 추후 연구과제로 하고자 한다.

참고문헌

1. C. W. Hirt, A. A. Amsden and J. L. Cook : An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Method for All Flow Speeds, Journal of Computational Physics 14, pp.227-253, 1974
2. T. Belytschko, J.M. Kenndy and D.F. Schoeberle, Quasi-Eulerian :Finite Element Formulation for Fluid Structures Interaction, Transaction of the ASME, V. 102, pp.62-69, 1980
3. Thomas J. R. Hughes, Wing Kam Liu and Thomas K. Z : Lagrangian-Eulerian Method Finite Element Formulation for Incompressible Viscous Flows, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, V. 29, pp.329-349, 1981
4. J. Donea, S. Giuliani and J. P. Halleux : An Arbitrary Lagrangian Eulerian Finite Element Method for Transient Dynamic Fluid-Structures Interaction, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, V. 33, pp.689-723, 1982
5. W. K. Liu and H.G. Chang : Efficient Computational Procedures for Long Time Duration Fluid Structures Interaction Problems, Journal of Pressure Vessel, V. 106, pp.317-322, 1984
6. Robert B. Haber : A Mixed Eulerian-Lagrangian Displacement Model for large Deformation Analysis in Solid Mechanics, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, V. 43, pp.277-292, 1984
7. W. K. Liu, T. Belytschko and H. Chang : An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Finite Element Method for Path-dependent Materials, Computer Methods in Applied Mechanics and

- Engineering, V. 57, pp.227-245, 1986
8. Haber, R. B., Abel, J. F. and Greenberg, P. D., "An Integrated Design System for Cable Reinforced Membranes Using Interactive Computer Graphics", Computers & Structures, Vol. 14, No.3-4, pp.261-280, 1981
 9. Haber, R. B. and Abel, J. F., "Initial Equilibrium Solution Methods for Cable Reinforced Membranes, Part I-Formulations", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.30, pp.263-284, 1982
 10. Haber, R. B. and Abel, J. F., "Initial Equilibrium Solution Methods for Cable Reinforced Membranes, Part II-Implementation", Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 30, pp. 285-306, 1982
 11. Hirohisa Noguchi, Tetsuya Kawashima, "Meshfree Analyses of Cable-Reinforced Membrane Structures by ALE-EFG method", Engineering Analysis with Boundary Elements,
 12. Haber, R. B. and Abel, J. F., "Contact-Slip Analysis Using Mixed Displacements", Journal of Engineering Mechanics, Vol. 109, No.2, 1983, pp.411-429