

# 경계조건에 따른 판 구조물의 최적두께분포에 대한 연구

## A Study on the Optimum Thickness Distributions of Plate Structures with Different Essential Boundary Conditions

이 상 진\*      김 하 룡\*\*  
Lee, Sang Jin      Kim, Ha Ryong

### 요 약

이 논문은 경계조건에 따른 판구조물의 최적두께분포 변화에 대한 연구결과를 기술하였다. 본 연구에서는 최소화하고자하는 변형에너지를 목적함수로 하고 구조물의 초기 부피 값을 제약조건으로 사용하였다. 판구조물의 두께분포를 표현하기 위하여 쿤이 개발한 조각 면을 이용하였다. 판의 변형에너지를 정확히 계산하기 위하여 퇴화 쉘 요소를 도입하였으며 반복계산을 통하여 최적의 두께분포를 검색하기 위하여 최적화검색기 DOT를 도입하였다. 마지막으로 경계조건에 따른 판의 최적두께 분포에 대한 정량적인 수치해석결과를 제공하기 위하여 정사각형 판을 최적화에 채용하고 그 결과를 자세히 기술하였다.

### Abstract

This paper provides the results of the investigation on the optimum thickness distribution of plate structures with different essential boundary conditions. In this study, the strain energy to be minimized is considered as the objective function and the initial volume of structures is used as the constraint function. The computer-aided geometric design (CAGD) such as Coon's patch representation is used to represent the thickness distribution of plates. A reliable degenerated shell finite element is adopted to calculate the accurate strain energy level of the plates. Robust optimization algorithms provided in the optimizer DOT are adopted to search the optimum thickness values during the optimization iteration. Finally, the square plate is used to find out the optimum thickness distribution of plates according to different essential boundary condition.

**키워드 :** 판구조물, 최적두께값, 변형에너지, 경계조건

**Keywords :** Plate Structure, Optimum thickness, Strain Energy, Essential Boundary Condition

## 1. 서 론

구조물을 설계하기 위해서는 반복적인 작업을 수반하게 되고 설계하고자 하는 구조물에 대한 다양한 경험을 필요로 한다. 구조설계최적화(structural design optimization)는 반복되는 설계의 과정에서 요구되는 시간의 손실을 줄여주고 최소의 노력으로 최대의 성능을 가지는 구조물을 도출하는데 효과적으로 이용되어 왔다. 구조물의 성능에 초점을 맞추던 설계최적화의 개념이 최근에는 미와 구조적인

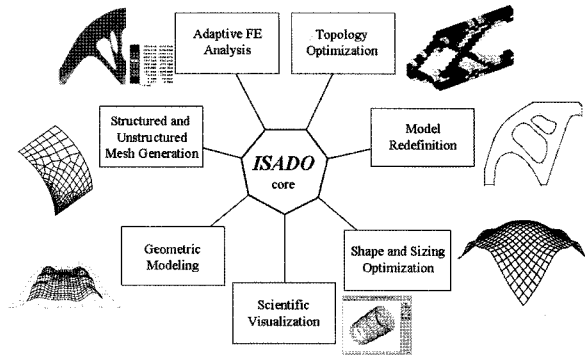
요구를 동시에 충족하는 보다 진보적인방향으로 발전하고 있으며 이러한 과정에서 개발되어온 다양한 개념과 이론들은 구조물에 대한 전반적인 설계와 성능을 향상시키기 위한 컴퓨터 시뮬레이션 도구의 개발로 집약되고 있다<sup>1)2)</sup>.

구조물의 설계최적화는 개선하고자하는 구조물의 대상이나 부분에 따라 일반적으로 크기, 형상, 위상 최적화로 구분된다<sup>3)</sup>. 전통적으로 설계최적화는 구조 부재의 크기를 조절하는 방법을 연구하는 것이었는데 최근에서 구조물의 형상을 조절하는 최적화 기법과 설계될 구조물의 기본 형태를 결정할 수 있는 위상최적화기법에 대한 연구가 활발히 전개되고 있다. 또한 언급한 세 가지 모두를 동시에 이용하는

\* 정희원, 경상대학교 공과대학 건축학부 조교수  
Tel : 055-751-6541 Fax : 055-759-8015  
E-mail : lee@gsnu.ac.kr

\*\* 경상대학교 건축학부 구조공학전공 대학원석사과정

통합설계최적화<sup>4)6)</sup>에 대한 관심이 고조되고 있다. 통합설계최적화는 <그림 1>에 도시된 바와 같이 다양한 최적화기법을 함께 사용할 수 있어 구조물의 성능을 고도로 증대시킬 수 있는 장점을 가진 설계 기법으로 점차 인식되고 있다.



<그림 1> 통합설계최적화를 위한 요소기술

이러한 통합설계기법은 고성능 컴퓨터의 발달과 함께 구조설계최적화에 활발히 도입되기 시작한 CAGD기법<sup>7)8)</sup>에 의해 가능하게 되었는데 CAGD기법으로 인해 구조물은 컴퓨터상에서 보다 쉽게 표현이 가능하게 되었고 설계최적화과정에서 발생하는 설계변수의 수는 획기적으로 줄이는 역할을 하게 되었다.

본 연구에서는 설계최적화에서 중요한 역할을 하고 있는 CAGD기법을 이용하여 판의 두께분포를 표현하고 경계조건에 따라 요구되는 판과 셸의 최적 두께분포를 조사 분석하고 그 결과를 기술하고자 한다.

## 2. 두께최적화 기본 요소기술

### 2.1 기하학적 모델

컴퓨터를 이용한 기하학적 모델은 셸 구조물의 곡면을 컴퓨터상에서 효율적으로 표현하고 수정하기 위해서 개발되었다. 쿤의 조각면<sup>9)</sup>을 시작으로 베지에 곡면, B-스플라인 곡면 그리고 NURBS로 발전되어 왔으며 점차적으로 구조물의 설계최적화에 도입되고 있다. 설계최적화과정에서 기하학적인 모델은 유한요소의 절점을 직접 이용할 경우 발생하는 기하학적인 불연속성과 구조물이 대형화될 경우 설계변

수의 증가로 인해 발생하는 계산상의 문제를 한꺼번에 해결하고 있다. 범용의 기하학적 모델을 대한 이용방법을 개발하는 것도 중요하지만 최적화하고자 하는 구조물에 적용성이 뛰어난 기하학적인 모델을 채택하고 개발하는 것이 필요한 것으로 나타났다<sup>10)</sup>. 본고에서는 판 구조물의 성능을 향상하기 위해 CAGD기법 중에서도 표현하기 간편하고 자연스러운 기하학적 모델로 인식되고 있는 쿤의 조각면을 도입하여 판의 형상과 두께분포를 표현하였다.

곡면을 표현하기 위해 이용되는 쿤의 조각면은 다음과 같다.

$$r(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \mathbf{H} \mathbf{G}_p \mathbf{H}^T \mathbf{v}^T, p = x, y, z \quad (1)$$

여기서,

$$\mathbf{u} = \{u^3, u^2, u, 1\}, \mathbf{v} = \{v^3, v^2, v, 1\}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{R}_{,v} \\ \mathbf{R}_{,v} & \mathbf{R}_{,vw} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_p(0,0) & r_p(0,1) \\ r_p(1,0) & r_p(1,1) \end{bmatrix}$$

여기서  $r_p(0,0), r_p(0,1), r_p(1,0), r_p(1,1)$ 은 쿤의 조각면 네 가장자리의 좌표값을 나타내고  $r_p(0,0), r_p(u,v)$ 를 매개변수  $u$ 에 대하여 점(0,0)에서 편미분한 값을 말한다. 식(1)을 이용하여 여러 개의 쿤의 조각면을 조합한 기하학적 모델로 곡면을 표현할 수 있다. 쿤의 조각면은 어떠한 스칼라 값도 보간할 수 있는 특성을 가지므로 곡면의 두께 또한 같은 방법을 사용하여 다음과 같이 계산할 수 있다<sup>3)</sup>.

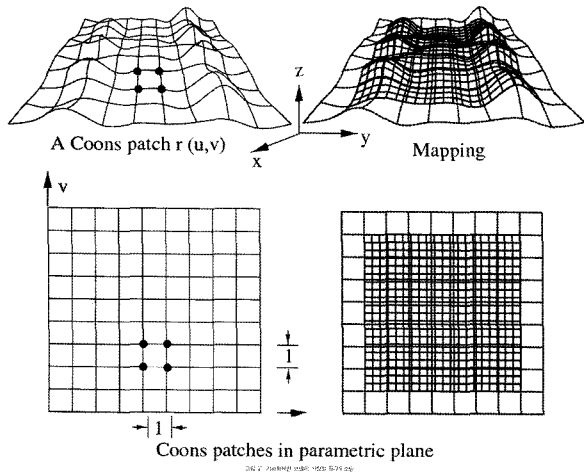
$$h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \mathbf{H} \mathbf{Q} \mathbf{H}^T \mathbf{v}^T \quad (2)$$

여기서 행렬  $\mathbf{Q}$ 는 식(1)의 행렬  $\mathbf{G}$ 에 상응하는

행렬이며 그 성분이 판과 셸의 두께를 나타낸다.

### 2.2 유한요소망 자동생성기

곡면을 표현하기 위해서 도입된 기하학적인 모델이 수치해석에 사용되기 위해서는 <그림 2>에 도시된 바와 같이 기하학적인 모델을 유한요소로 이산화 하는 과정을 일반적으로 거쳐야 한다. 기하학적인 모델에 상응하는 유한요소를 생성하는 방법은 <그림 2>에서 나타난 바와 같이 2차원 기하학적 모델위에 유한요소망을 생성한 뒤 미리 생성된 기하학적 모델에 사상(mapping)하는 것이다.



<그림 2> 기하학적인 모델에 사상된 유한요소망

이때 전절에서 설명한 쿤의 조각면이 곡면의 기하학적 모델을 형성하는데 이용되고 궁극적으로는 이 기하학적 모델을 통하여 유한요소와 요소절점의 두께를 자동생성 하게 된다. 이때 곡면의 기하학적 모델을 형성하는 과정은 다음과 같다:

- 1) 곡면의 형상을 표현하는 쿤의 조각면의 조절점 좌표값을 준비한다. 수학적으로는 곡면이  $u$  방향으로  $k$ 개,  $v$  방향으로  $l$ 개의 조절점을 가진 규격격자의 형태로 표현 된다면 조각면의 위치벡터는 다음과 같이 표현할 수 있다:

$$\mathbf{r}(i, j) = [r_x(i, j), r_y(i, j), r_z(i, j)]^T, \quad (3)$$

$i = 0, 1, \dots, k$  그리고  $j = 0, 1, \dots, l$

- 2) 조절점으로 이루어진 스플라인의  $u$ 방향과  $v$ 방향에 대한 접선값을 전 단계에서 준비한 좌표값을 사용하여 계산한다. 그리고 식(3)를 이용하여 스플라인 내에 위치하는 중간조절점의 접선값을 계산한다. 이때 스플라인 양끝에 위치한 조절점의 접선값은 미리 지정해 주어야 한다.
- 3) 각 조각면  $i$ 에 관련한 행렬  $G_i^r$ 를 계산한다. 따라서 기하학적 모델을 식(1)의 쿤의 조각면에서와 같이 매개변수  $u$ 와  $v$ 에 대한 함수로 표현할 수 있다.

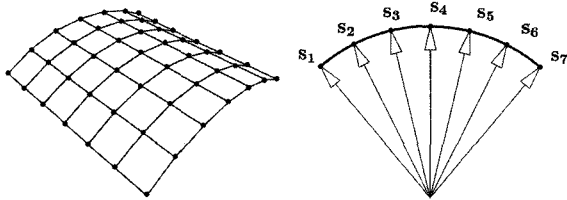
위와 같은 방법으로 형성된 3차원의 기하학적 모델위에 2차원의 파라메트릭평면에서 형성된 유한요소망을 사상하면 <그림 2>에 도시된 바와 같이 실제 곡면에 상응하는 유한요소망을 형성하게 된다. 이 절에서 기술한 방식의 장점은 곡면의 형상과 두께를 조절하는 방법으로 직접 유한요소망을 사용하지 않아도 되고, 쿤의 조각면이  $C^2$ 의 연속성을 자동적으로 만족하므로 최적화결과는 부드러운 곡면과 완만한 두께의 변화를 가지게 된다.

### 2.3 곡면의 두께조절법

설계최적화 반복계산과정에서 면(Surface)의 두께의 변화를 적절히 표현하기 위해서는 도입된 CAGD를 바탕으로 형성된 기하학적 모델을 효과적으로 조절할 수 있어야 한다. 본 연구에서는 아래와 같은 방법으로 기하학적인 모델을 형성하고 있는 설계변수를 조절하였다.

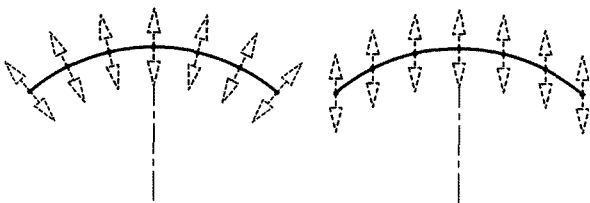
- 1) 설계변수의 선택: 본고에서 기술한 판의 설계최적화는 CAGD를 사용하여 판의 형상 및 두께분포를 표현하였다. 이때 쿤의 조각면을 형성하고 있는 조절점의 두께값을 설계변수로 택하였다.
- 2) 설계변수의 연계: 최적화 과정 중 설계변수의 연계(linking)이 필요하다. 설계변수의 연결은 최적화과정에 발생하는 많은 수의 설계변수의 수를 감소시켜주는 역할을 할 뿐만 아니라 구조물 형상의 초기 특성을 지켜주는 역할을 하기도 한다.

한 가지 예로 <그림 3>에 도시된 바와 같이 실린더 쉘의 설계최적화에서 실린더 쉘의 대칭성을 유지하기 위하여 쉘의 길이 축 방향으로 분포해 있는 설계변수를 연계할 수 있다.



<그림 3> 실린더 쉘: (좌) 6×6 쿤의 조각면 (우) 실린더 길이방향의 설계변수를 연결

3) 설계변수의 이동방향: 설계변수의 이동방향은 최적화 과정에서 중요한 의미를 가진다. 그 이유는 설계변수의 이동방향에 따라서 최적화를 위한 설계공간이 달라질 수도 있기 때문이다. <그림 4>에는 설계변수를 연계하여 형성한 기하학적 모델의 조절점을 수직방향과 방사선방향으로 이동하는 예를 도시하였다. 본 연구에서는 구조물의 두께를 최적화하기 위하여 설계변수로 이용하는 조절점의 두께값을 쉘곡면의 법선방향으로 이동하였다.



<그림 4> 설계변수의 이동방향: (좌) 면의 법선방향 (우) 수직방향

4) 설계변수의 미세변화: 설계변수에 대한 민감도 해석을 수행하기 위해서 아주 미세한 양만큼 설계변수의 값을 이동시켜야 한다. 구조물의 설계최적화에서는 설계변수로 선택된 조절점의 위치에서의 두께 값을 민감도 해석을 위해 변화시켜야 한다.

2.4 구조물의 반응해석

형상과 두께의 변화에 따른 구조물의 응력특성은 수치해석 기법을 이용하여 분석할 수 있다. 판 구조물의 해석에는 퇴화셀요소를 사용하면 두께형상의 제약 없이 하중에 대한 정확한 판의 반응을 분석할 수 있다.

판의 설계최적화를 수행하기 위해서는 판의 두께의 변화에 따른 응력분포의 변화를 계산하여야 한다. 본고의 예제에서 가변형도를 바탕으로 개발된 Reissner-Mindlin (RM) 퇴화셀요소<sup>11)</sup>를 이용하여 판의 변형도 에너지를 계산하였다. 판의 응력을 계산하기 위하여 이용된 퇴화셀요소와 유한요소해석방법은 참고문헌<sup>12)</sup>에 기술된 내용을 참고할 수 있다.

2.5 민감도 해석

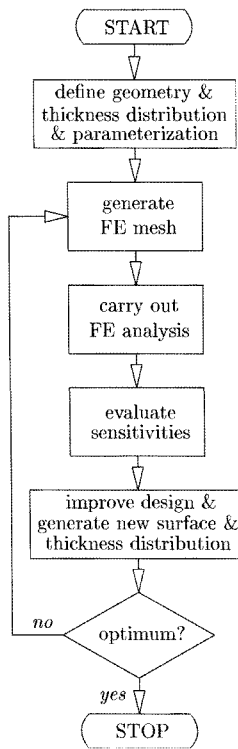
두께최적화에서는 판의 구조적 특성을 변화시키기 위해서 최적화 반복계산중에 두께를 조절하게 된다. 이때 판의 형상을 나타내는 기하학적 모델을 형성하는 조절점의 위치벡터와 조절점에서의 판의 두께값은 설계변수의 역할을 하게 되며 이때 최적화 알고리즘은 이들 설계변수에 대한 민감도값을 필요로 한다. 설계변수에 대한 민감도는 해석적 기법, 준해석적 기법, 유한차분법이 세 가지의 방식<sup>13)</sup>으로 계산할 수 있는데 본 연구에서는 유한차분법을 도입하였다. 따라서 설계변수에 대한 임의의 함수에 대한 민감도 값은 다음과 같이 구하게 된다.

$$\frac{\partial f}{\partial s_i} \approx \frac{\Delta f}{\Delta s_i} = \frac{\Delta f(s_i + \Delta s_i) - \Delta f(s_i)}{\Delta s_i} \quad (6)$$

여기서 f는 민감도를 필요로 하는 임의의 함수, Δs<sub>i</sub>는 민감도해석을 위해 도입한 i번째 설계변수의 미소 변화값을 나타낸다.

3. 친척화 알고리즘

판의 두께 분포 최적화를 수행하기 위한 기본 알고리즘은 앞에서 기술한 요소기술들을 순차적으로 이용하게 되는데 정리하면 <그림 5>에 도시된 플로차트와 같다.



〈그림 5〉 판의 설계최적화 기본알고리즘

위에서 제시한 CAGD를 이용한 쉘의 설계최적화 기본알고리즘은 다음과 같은 다섯 가지의 기본 과정을 거친다.

1) 최적화 문제 정의 : 판의 초기형상과 두께의 분포를 쿤의 조각면을 사용하여 정의한다. 설계변수의 이동방향과 이동범위 또한 이 단계에서 정의한다. 유한요소해석에서 필요한 하중 및 경계조건 등을 준비한다.

2) 유한요소망의 자동생성 : 제 2절에서 언급한 유한요소 자동생성기를 사용하여 이전 단계에서 정의된 기하학적 모델위에 유한요소망을 생성한다. 파라메트릭평면위에 유한요소를 생성할 때 규격요소망과 비규격요소망을 모두 사용할 수 있다.

3) 유한요소해석 : 제 2절에서 언급한 유한요소 해석을 수행한다. 이 단계에서 목적함수에 해당하는 판의 변형에너지와 제약함수인 판의 부피를 계산한다.

4) 민감도해석 : 민감도 해석은 설계변수의 변화가 구조물의 구조적 특성에 끼치는 영향의 정도를

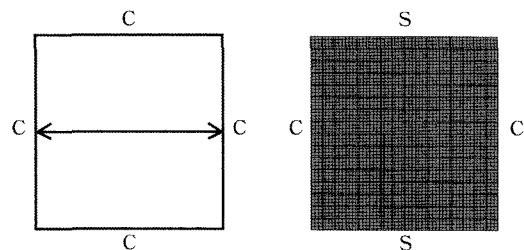
파악하는 단계이다. 본고에서는 유한차분법을 사용하여 설계민감도를 계산하였다.

5) 최적값 검색 : 민감도 해석에서 계산된 각 변수에 대한 설계민감도값을 이용하여 최적값을 검색한다. 최적값이 구해 질 때까지 2)-5)과정을 반복한다.

이 절에서는 앞서 기술한 기하학적인 모델, 유한요소자동생성기, 반응해석, 민감도 해석 그리고 최적화 알고리즘을 이용하여 판의 두께 최적화를 수행하고 그 결과를 기술하였다. 본 연구에서는 경계조건에 따른 판의 최적두께분포를 조사 분석하였다.

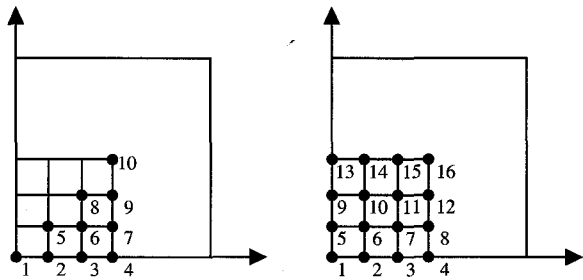
#### 4. 판의 두께최적화

등분포하중을 받는 정사각형 판의 두께분포를 경계조건에 따라 조사 분석하였다. 판의 네 변은 C/C/C/C, S/C/S/C의 경계조건을 가지는 것으로 가정하였고 <그림 6>에서는 판의 경계조건, 형상, 유한요소망을 도시하였다. 이때 S는 단순지지, C는 고정지지를 나타낸다.



〈그림 6〉 판의 경계조건, 형상, 유한요소망 (좌)C/C/C/C (우)S/C/S/C

최적화에 사용된 판의 탄성계수와 프와송비는 각각  $E = 20 GPa$  과  $\nu = 0.3$  이다. 그리고 판은 전체에 걸쳐 균일한 초기두께 ( $h = 0.25 ft$ ) 를 가지는 것으로 가정하였다. 판 전체의 형상을 표현하기 위하여  $6 \times 6$  의 쿤의 조각으로 구성된 기하학적인 모델을 사용하였고 판의  $1/4$  을  $8 \times 8$  유한요소망으로 이산화 하였다. <그림 7>에는 두께최적화를 수행하기 위해서 파라메트릭 평면상에서 지정한 조절점의 위치를 도시하였다.



〈그림 7〉 설계변수의 위치  
(좌) C/C/C/C, (우) S/C/S/C

본고에서는 최적화에 목적함수로 판의 변형에너지를 채택하였고 초기부피값을 제약조건으로 이용하였다. 그리고 〈그림 7〉에 도시된 바와 같이 경계조건에 따라서 두께설계변수의 수를 각각 10개( $s_1 - s_{10}$ )와 16개( $s_1 - s_{16}$ )를 사용하여 최적화를 수행하였다. 이는 경계조건에 따른 대칭성을 이용하여 설계변수의 수를 조절한 것이다. 설계최적화에 이용된 설계변수의 초기값과 구속범위 그리고 SQP를 사용하여 도출한 판의 최적 두께분포를 표 1에 정리하였다.

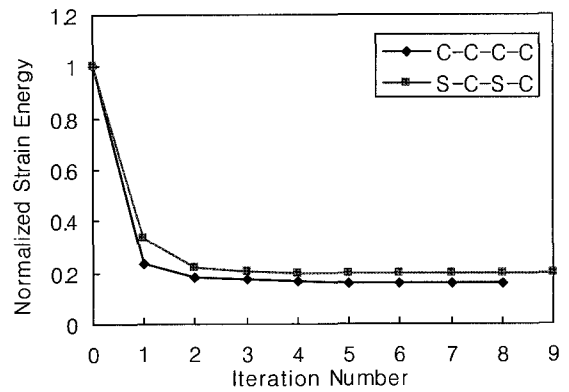
〈표 1〉 초기판과 최적화된 판의 설계변수값 및 정규화된 목적함수값

$i$	$s_i^0$	$s_i^1$	$s_i^u$	C/C/C/C	S/C/S/C
1	0.25	0.12	0.5	0.1431	0.1347
2	0.25	0.12	0.5	0.1857	0.1277
3	0.25	0.12	0.5	0.4607	0.1501
4	0.25	0.12	0.5	0.4962	0.1673
5	0.25	0.12	0.5	0.1200	0.2423
6	0.25	0.12	0.5	0.2497	0.1686
7	0.25	0.12	0.5	0.5000	0.1826
8	0.25	0.12	0.5	0.1528	0.5000
9	0.25	0.12	0.5	0.1200	0.5000
10	0.25	0.12	0.5	0.1200	0.3452
11	0.25	0.12	0.5	-	0.2199
12	0.25	0.12	0.5	-	0.1200
13	0.25	0.12	0.5	-	0.5000
14	0.25	0.12	0.5	-	0.5000
15	0.25	0.12	0.5	-	0.1200
16	0.25	0.12	0.5	-	0.1200
$\Psi(s)$	-	-	-	0.1625	0.1937

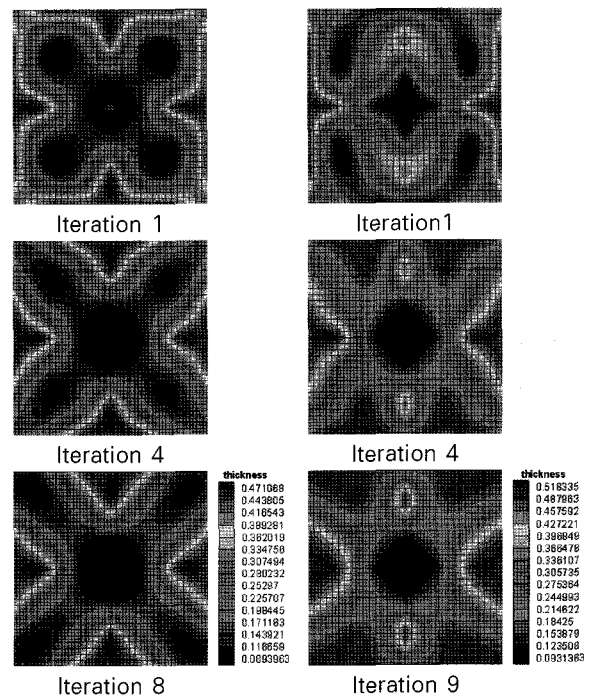
〈표 1〉에서도 기술된 바와 같이 최적화를 통하여 판의 초기부피를 유지하면서 두께를 적절히 조절하여 경계조건 C/C/C/C, S/C/S/C에 대해 초기 판에 비해 변형에너지를 각각 약 84%, 81% 감소시켰

다. 본고에서는 SQP를 이용하여 계산된 판의 변형에너지 변화를 〈그림 8〉에 도시하였다. 이때 판의 최적두께분포는 〈그림 9〉에서 도시하였다.

〈그림 8〉에서 도시된 최적화 이력곡선을 보면 최적화 검색과정의 초기반복계산 부분에서 판의 변형에너지가 대부분 감소함을 알 수 있다. 〈그림 9〉에 도시된 판의 두께 변화를 살펴보면 판의 경계조건이 C/C/C/C인 경우 고정 지지된 네 변의 두께는 증가하는 반면 판의 중앙부와 네 모서리 부분의 두께가 감소하였고 판의 경계조건이 S/C/S/C인 경우



〈그림 8〉 경계조건에 따른 변형에너지 이력곡선



〈그림 9〉 경계조건에 따른 판의 두께변화  
(좌)C/C/C/C (우)S/C/S/C

에는 고정지지된 변의 두께가 두꺼워지고 단순 지지된 변의 두께는 감소함을 알 수 있다. 이는 응력을 많이 부담하는 판의 부분에서 판의 두께가 증가하는 것을 나타내며 실제로는 판의 두께가 증가하는 부분을 보강을 함으로써 구조물의 안전성이 높아 질 수 있는 것을 나타낸다.

## 5. 결 론

하중에 적절히 저항하는 판구조물을 설계하기 위해서 거치는 수많은 해석 및 설계상의 시행착오를 줄여주고 보다 과학적인 방법으로 판의 최적두께분포를 결정할 수 있는 방법을 제시하였다. 본 연구를 통하여 판의 설계최적화는 기하학적 모델, 유한요소 모델, 민감도해석, 최적화 알고리즘 등의 여러 가지 요소기술을 적절히 조합하여 사용할 때 비로소 가능하며 특히 판 구조물의 기하학적 모델과 유한요소망과의 관계를 효율적으로 정의 할 때 설계최적화가 가능한 것으로 나타났다. 판 구조물의 두께최적설계를 성공적으로 수행하기 위해서는 개개의 요소기술에 대한 개발도 중요하지만 대상 구조물의 특징을 잘 파악하고 각 대상구조물에 필요한 요소기술을 적절히 선정하고 이를 효율적으로 조합하는 과정이 반드시 필요한 것으로 나타났다.

### 참고문헌

- Rasmussen, J., "The Structural optimization system CAOS". Structural Optimization, Vol. 2, 1990, pp. 109-115.
- Bletzinger, K.-U., Reitingner, R., Kimmich, S. and Ramm, E., Shape optimization with program CARAT, In Software Systems for Structural Optimization : edited by Hörnlein, H. , Schittkowski, K., Int. Series of Numerical Mathematics, Vol. 110, pp. 97-124. Birkhäuser, 1993.
- Lee, S.J. and Hinton, E., "Dangers inherited in shells optimized with linear assumptions", Computers and Structures, Vol. 78, 2000, pp. 478-486
- Olhoff N., Bendsoe, M.P. and Rasmussen, J. "On CAD-integrated structural topology and design optimization", Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 89,1991, pp. 259-279
- Maute K. and Ramm E., "General shape optimization - an integrated model for topology and shape optimization", in Proc. of the 1st World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization, edited by Rozvany G.I.N., pp. 299-306, Goslar, Germany, 1995
- Hinton, E., Sienz, J. and Hassani, B., "Fully integrated design optimization for engineering structures", in Proc. of Third International Conference on Computational Structures Technology - Advances in Structural Engineering Optimization, Budapest, Hungary 1996
- Farin, G., Curves and surfaces for computer aided geometric design, Academic Press, San Diego, 1990
- Anand, V.B., Computer Graphics and Geometric Modelling for Engineers, John Wiley and Sons, New York, 1993
- Coons, S.A., Surfaces for Computer-Aided Design of Space Figures, Mech. Eng. Dept., MIT, 1964
- 이상진, "스위프 기하학적 모델을 사용한 프리즘 쉘의 최적화", 한국전산구조공학회논문집 제 12권 제4호, 1999, pp. 551-561
- Ahmad, S. B.M. Irons and Zienkiewicz, O.C., "Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 2, 1970, pp. 419-451
- Lee, S.J., Kanok-Nuchulchai, W, "A nine-node assumed strain finite element for large deformation analysis of laminated shells", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 42, 1998, pp. 777-798
- Haftka R.T. and Adelman, H.M., "Recent developments in sensitivity analysis", Structural Optimization, Vol. 1, 1989, pp. 137-151