

변위 및 내력기여도계수를 이용한 정량적 변위 제어

Direct Control of Displacement Using Displacement and Resistance Force Contribution Factor

김 영 민* 김 치 경**
Kim, Young-Min Kim, Chee-Kyeong

요 약

본 연구는 구조물의 정량적 강성설계 기법 개발, 즉 부재 단위의 강성 재설계를 통한 전역 자유도 변위의 정량적 조절 기법 개발을 궁극적 목적으로 한다. 이를 위하여 본 연구에서는 전역 자유도에 대한 부재의 변위기여도계수와 내력기여도계수를 유도하고, 이를 이용하여 특정 변위를 정량적으로 예측, 제어할 수 있도록 부재 강성과 특정 변위간의 상관식을 유도 제시하였다. 간단한 예제 구조물의 해석과 제안식 적용을 통한 변위 예측값 사이의 비교를 통하여 제안식을 검증하였다. 정정구조물의 경우 본 상관식은 정해로서, 이를 이용하여 특정 변위를 원하는 목표치로 정확하게 제어할 수 있으며, 부정정구조물의 경우에도 부재 내력 재분배에 의한 오차가 발생하기는 함에도 불구하고 각 부재 강성과 특정 변위간의 상관성과 경향을 제시함으로써 매우 유용하게 활용될 수 있다. 본 연구에서 제안하는 정량적 변위 제어 기법은 강성설계가 전체 설계 결과를 지배하게 되는 대공간구조물 또는 초고층건물의 설계 시 유용할 것으로 기대된다.

Abstract

The paper presents a direct method for the displacement control and stiffness redesign using displacement and response force contribution factors. At first, these two kinds of factors are derived and the relationship between them is examined. An equation to evaluate the change of displacement according to the change of each member stiffness is proposed. For the statically determinate structures, the proposed equation gives the exact solution with no approximation. But it has some error in case of statically indeterminate structures because the redistribution of response forces is neglected in the equation. However, the equation may be very useful even for statically indeterminate structures because it provides the relationship between the member stiffness and the global displacement. The proposed method is expected to be useful for the displacement control of large space or hi-rise building structures where the stiffness design governs the design result.

키워드 : 변위제어, 변위기여도계수, 내력기여도계수, 강성설계

Keywords : Displacement Control, Displacement Contribution Factor, Response Force Contribution Factor, Stiffness Design

1. 서 론

구조물은 자신에게 작용하는 외력을 지지점에 전달하는 기능을 한다. 이를 위하여 구조물은 나름의

힘 전달 메카니즘과 변형 특성을 갖는 한개 이상, 많은 경우 수 만개에 이르는 부재로 구성된다. 이때 각 부재는 내부에 발생하는 응력을 안전하게 전달할 수 있는 강도와, 구조물의 변형이 사용 한계를 초과하지 않는 강성을 보유하면서 가장 경제적으로 설계되어야 한다.

구조해석은 구조물 내 각 부재에 발생하는 응력과 구조물의 변형량을 계산해 주며, 이를 바탕으로 각 부재의 강도와 강성을 설계할 수 있다. 이때 각 부재의 크기와 재료의 강도를 재설계함으로써 구조

* 정회원, 마이다스아이티 과장, 공학박사

Tel : 031-789-2019

E-mail : ynmkim5@midasit.com

** 정회원, 선문대 건축학과 교수, 공학박사, 교신저자

Tel : 041-530-2321, Fax : 041-530-2839

E-mail : ckkim@sunmoon.ac.kr

이 연구는 2003년도 선문대학교 교내연구비 지원에 의한 결과임

해석 결과로 주어지는 각 부재의 소요강도는 한두 차례의 설계 및 재설계를 통하여 비교적 쉽게 만족시킬 수 있다. 반면 구조물의 변형 한계를 만족시키기 위한 강성 재설계는 반복 해석 및 재설계를 통한 시행착오적 접근에 의해 수행되곤 한다.

본 연구는 구조물의 정량적 강성설계 기법 개발, 즉 부재 단위의 강성 재설계를 통한 전역 자유도 변위의 정량적 조절 기법 개발을 궁극적 목적으로 한다. 특히 본 연구에서 제안하는 정량적 변위 조절 기법은 강성설계가 전체 설계 결과를 지배하게 되는 대공간구조물 또는 초고층건물의 설계 시 유용할 것으로 판단된다.

이를 위하여 본 연구에서는 “전역 자유도에 대한 부재의 변위기여도계수(Displacement Contribution Factor)와 내력기여도계수(Response Force contribution Factor)를 유도하고, 이를 이용하여 특정 변위를 정량적으로 제어할 수 있도록 부재 강성과 특정 변위 간의 상관식을 유도 제시한다.

2. 변위기여도계수와 내력기여도계수

2.1 변위기여도계수의 유도

강도법에 의한 구조물의 정적해석 시 사용되는 평형방정식은 (식 1)로 주어진다. 여기에서 K 는 강성행렬, D 는 변위벡터, R 은 하중벡터이다.

$$KD=R \tag{식 1}$$

이 식의 양변에 강성행렬 K 의 역행렬인 유연성행렬 F 를 곱한 후 정리하면 (식 2)와 같다.

$$FKD=FR=D \tag{식 2}$$

한편 전체 구조물에 대한 강성행렬 K 는 다음 식과 같이 각 부재 강성행렬의 합으로 구성된다.

$$K=\sum_{i=1}^m K^{(i)}=K^{(1)}+K^{(2)}+\dots+K^{(m)} \tag{식 3}$$

여기에서, $K^{(k)}$ 는 k 번째 부재의 전역자유도 변위에 대한 부재강성행렬이고, m 은 부재의 개수이다. (식 3)을 (식 2)에 대입한 후 배분법칙을 적용하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} FKD &= F(K^{(1)}+K^{(2)}+\dots+K^{(m)})D \\ &= FK^{(1)}D+FK^{(2)}D+\dots+FK^{(m)}D \\ &= D \end{aligned} \tag{식 4}$$

(식 4)에서 $K^{(k)}D$ 는 전역자유도 방향에서 계산된 각 부재의 부재력 벡터 $f^{(k)}$ 이다. 그러므로 (식 4)는 다시 다음 식과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} FKD &= Ff^{(1)}+Ff^{(2)}+\dots+Ff^{(m)} \\ &= D \end{aligned} \tag{식 5}$$

(식 5)에서 i 번째 방정식을 분리하여 풀어 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} D_i &= \sum_{j=1}^n F_{ij}f_j^{(1)}+\dots+\sum_{j=1}^n F_{ij}f_j^{(m)} \\ &= \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n F_{ij}f_j^{(k)} \end{aligned} \tag{식 6}$$

(식 6)에서 보면, 구조물의 i 번째 전역 변위는 구조물 유연성행렬의 i 번째 행과 전역 자유도에 대한 각 부재 부재력 벡터의 곱들로 이루어진다. 그러므로 (식 6)의 우변에서 k 번째 항은 i 번째 전역 변위에 대한 k 번째 부재의 변위기여도이며, 본 연구에서는 이상과 같이 계산되는 각 부재의 계수를 ‘전역 자유도에 대한 부재의 변위기여도계수 $S_i^{(k)}$ ’로 표기한다.

$$S_i^{(k)}=(Ff^{(k)})_i=(FK^{(k)}D)_i \tag{식 7}$$

2.2 정적응축을 이용한 내력기여도계수의 유도

전 절에서 특정 전역 자유도에 대한 각 부재의 기여도를 변위 관점에서 변위기여도계수로서 계산하

였다. 한편 각 부재에 발생하는 부재력을, 특정 전역 자유도 변위를 유발하는 외력에 저항하는 내력(resistance force)으로 변환함으로써, 특정 전역 자유도에 대한 각 부재의 기여도를 내력 관점에서 평가할 수 있다. 본 절에서는 가우스소거법에 의한 정적 응축 기법을 통하여 부재의 '내력기여도계수'를 유도한다.

평형방정식의 해를 얻기 위하여 사용되는 LU 분해는 가우스소거법의 한 형태이다. 즉 (식 9)에서 보는 바와 같이 (식 1)의 강성행렬 K 는 LU로 분해될 수 있다. 이 때 L 은 (식 10)의 형태로서, 가우스소거에서 K 의 대각하부계수를 0으로 소거하기 위한 행연산으로 구성되는 하부삼각행렬이다. 이 때 각 요소는 (식 11)에 의하여 구하며, (식 11)의 윗 첨자 (i)는 강성행렬 K 의 대각 하부 계수가 $i-1$ 행까지 소거된 후 계수임을 의미한다. 한편 U 는 L 에 의하여 소거된 후의 상부삼각행렬이다.

$$K = LU \tag{식 9}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ L_{21} & 1 & & & & \\ L_{31} & L_{32} & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ L_{n1} & \vdots & \vdots & \vdots & L_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix} \tag{식 10}$$

$$L_{i+j,i} = \frac{k_{i+j,i}^{(i)}}{k_{ii}^{(i)}} \tag{식 11}$$

(식 1)에 (식 9)의 LU 분해를 적용하면 (식 12)가 된다.

$$LUD = R \tag{식 12}$$

양변에 L^{-1} 를 곱하면,

$$L^{-1}LUD = L^{-1}R = V \tag{식 13}$$

여기에서,

$$V = \begin{bmatrix} R_1 \\ L_{21}^{-1}R_1 + R_2 \\ \vdots \\ L_{n1}^{-1}R_1 + \dots + L_{n,n-1}^{-1}R_{n-1} + R_n \end{bmatrix} \tag{식 14}$$

(식 13)의 마지막 방정식은 $U_{nn}D_n = V_n$ 으로 주어지는 1원 방정식이 되고, 이는 n 개 자유도를 갖는 구조물을 가우스소거를 통한 정적응축에 의하여 n 번째 자유도만을 갖는 단자유도 구조물로 변환시켰을 때의 평형방정식이다. 여기에서 V_n 은 (식 14)의 마지막 열에서 보듯, 정적응축 전 각 자유도에 작용하던 하중이, n 번째 자유도만으로 정적응축 후 해당 자유도에 대한 하중으로 변환된 결과로서 해당 자유도 변위를 유발하는 모든 외력의 합이다.

$U = L^{-1}K$ 와 (식 3)을 (식 13)에 대입한 후 (식 4)와 같은 방법으로 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} UD &= L^{-1}KD \\ &= L^{-1}(K^{(1)} + K^{(2)} + \dots + K^{(m)})D \\ &= L^{-1}K^{(1)}D + L^{-1}K^{(2)}D + \dots + L^{-1}K^{(m)}D \\ &= L^{-1}f^{(1)} + L^{-1}f^{(2)} + \dots + L^{-1}f^{(m)} \\ &= P^{(1)} + P^{(2)} + \dots + P^{(m)} \\ &= V \end{aligned} \tag{식 15}$$

여기에서 $f^{(k)} = K^{(k)}D$ 이고, $P^{(k)} = L^{-1}f^{(k)}$ 이다. (식 15)의 마지막 n 번째 방정식만을 정리하면 (식 16)과 같다.

$$\begin{aligned} U_{nn}D_n &= P_n^{(1)} + P_n^{(2)} + \dots + P_n^{(m)} \\ &= V_n \\ &= L_{n1}^{-1}R_1 + \dots + L_{n,n-1}^{-1}R_{n-1} + R_n \end{aligned} \tag{식 16}$$

$P_n^{(k)} = L^{-1}f_n^{(k)}$ 이므로 $P_n^{(k)}$ 을 풀어서 정리하면 (식 17)과 같으며, U_{nn} 은 (식 18)로 얻어진다.

$$P_n^{(k)} = L_{n1}^{-1}f_1^{(k)} + \dots + L_{n,n-1}^{-1}f_{n-1}^{(k)} + f_n^{(k)} \tag{식 17}$$

$$U_{nn} = L_{n1}^{-1}k_{1n} + \dots + L_{n,n-1}^{-1}k_{n-1,n} + k_{nn} \tag{식 18}$$

(식 16)에서 보면, n 번째 자유도만으로 정적응축된 단자유도 구조물에서, (식 17)로 계산되는 각 부재 $Pn^{(k)}$ 의 합은, 각 자유도에 작용하는 외력이 응축된 V_n 과 평형을 이룬다. 즉 $Pn^{(k)}$ 는 n 번째 자유도에 변위를 유발하는 외력에 대한 k 번째 부재의 내력이다. 이에 본 연구에서는 이상과 같이 계산되는 $Pn^{(k)}$ 를 n 번째 전역 자유도에 대한 k 번째 부재의 '내력 기여도계수'라 정의하였다.

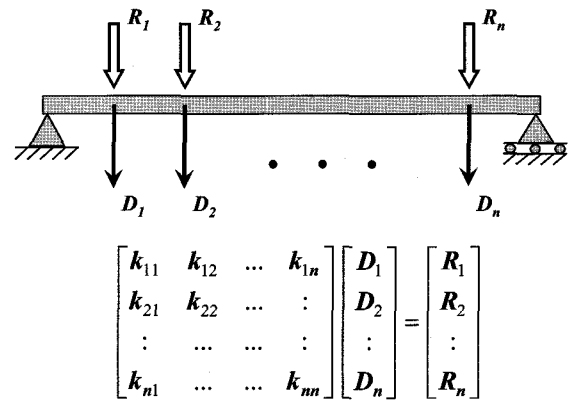
2.3 변위기여도계수와 내력기여도계수의 의미

변위기여도계수와 내력기여도계수는 각 부재의 강성과 전체 구조물의 변형과의 관계를 정량적으로 표현할 수 있는 부재 속성이며, 부재 단위의 강성재설계를 통해 전체 구조물의 변형을 정량적으로 제어하기 위해 사용될 수 있는 부재 속성이다. 즉 각 부재의 강성기여도계수를 알면, 해당 부재의 강성을 변경했을 때 전체 구조물에 대한 재해석 없이 부재 강성 변경 후 전체 구조물의 변형 결과를 산정할 수 있다. 마치 부재의 안전성 확보를 위한 강도설계 시 부재력이 필수적이듯, 부재의 강성기여도계수는 구조물 강성설계의 기초가 될 수 있는 개념이다.

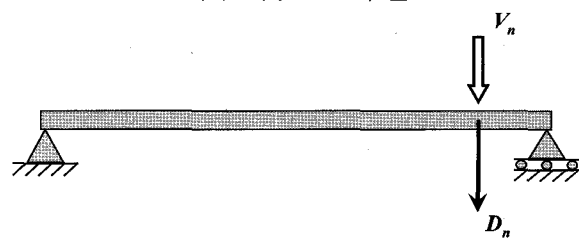
지금까지 변위 관점에서 전역 자유도에 대한 부재의 기여도로서 변위기여도계수를 정의하였고, 내력 관점에서 전역 자유도에 대한 부재의 기여도로서 내력기여도계수를 정의하였다. 본 절에서는 두 계수의 물리적 의미를 고찰하고, 두 계수 사이에 존재하는 비례관계를 정리한다.

우선 정적응축에 의한 내력기여도계수 유도 과정을 돌이켜 보면, <그림 1(a)>는 n 개의 자유도를 갖는 구조물이고, <그림 1(b)>는 가우스 소거에 의해 n 번째 자유도 D_n 변위만으로 정적응축된 결과이다. 소거 후 남은 D_n 변위에 대한 강성은 (식 18)의 U_{nn} 이고, 하중 V_n 은 (식 14)에 보는 바와 같다. 이 두식에서 L_m^{-1} 는, 소거된 D_i 자유도에 작용하는 힘을, D_n 자유도에 대한 등가의 힘으로 변환하는 역할을 한다. 즉, D_i 자유도에 단위 힘이 작용할 때 발생하는 D_n 변위와 동일한 변위를, D_n 자유도에 작용하는 힘으로 발생시키고자 할 때 필요한 힘이 L_m^{-1} 이다.

(식 15)에서 $K^{(i)}$ 는 전역 자유도 좌표계에서 계산된 i 번째 부재의 부재강성행렬이고, $K^{(i)}D$ 로 계산된



(a) 가우스 소거 전



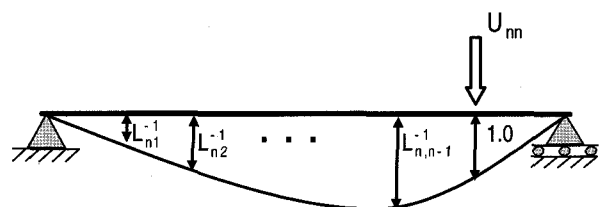
$$[U_{nn}][D_n] = [V_n]$$

$$U_{nn} = L_{n1}^{-1}k_{1n} + L_{n2}^{-1}k_{2n} + \dots + L_{n,n-1}^{-1}k_{n-1,n} + k_{nn}$$

$$V_n = L_{n1}^{-1}R_1 + L_{n2}^{-1}R_2 + \dots + L_{n,n-1}^{-1}R_{n-1} + R_n$$

b) 가우스 소거 후

<그림 1> 가우스소거에서 자유도 및 방정식 변화



<그림 2> D_n 단위변위 시 소거된 자유도에서의 변위

$f^{(i)}$ 는 전역 자유도 좌표계에서 구한 i 번째 부재의 내력이다. 그런데 전술한 대로 D_i 자유도에 작용하는 힘을 정적응축 후 D_n 자유도에 대한 등가의 힘으로 변환하기 위한 계수가 L_m^{-1} 이므로, i 번째 부재의 내력 $f^{(i)}$ 는 (식 17)에 의하여 D_n 자유도에 대한 등가내력으로 치환될 수 있다.

역으로 L_m^{-1} 를 변위 관점에서 보면, <그림 2>에서 보는 바와 같이 D_n 자유도에 단위변위가 발생할 때 소거된 D_i 자유도에 발생하는 변위가 L_m^{-1} 이다. 이를 이용하여 가상변위에 의한 가상일의 원리를 적용하면 다음과 같다.

- 하중 V_n 의 가상변위 $D_n=1$ 에 의한 가상외부일

$$\bar{W}_E = V_n \cdot \bar{1} \quad (\text{식 19})$$

- 부재응력 $f^{(i)}$ 의 가상변형 L_{ni}^{-1} 에 의한 가상내부일

$$\bar{W}_I = \sum_{i=1}^m \left(\bar{L}_{n1}^{-1} F_1^{(i)} + \dots + \bar{L}_{n,n-1}^{-1} F_{n-1}^{(i)} + \bar{1} \cdot F_n^{(i)} \right) \quad (\text{식 20})$$

- 가상일의 원리

$$\begin{aligned} \bar{W}_E &= \bar{W}_I \\ \bar{1} \cdot V_n &= \sum_{i=1}^m \left(\bar{L}_{n1}^{-1} F_1^{(i)} + \dots + \bar{L}_{n,n-1}^{-1} F_{n-1}^{(i)} + \bar{1} \cdot F_n^{(i)} \right) \\ &= \sum_{i=1}^m P_n^{(i)} \text{ where, } m : \text{number of members} \end{aligned} \quad (\text{식 21})$$

(식 21)은 (식 16)과 동일한 결과이다.

결론적으로 (식 16)을 분석해 보면, 각 자유도에 작용하는 하중의 D_n 자유도에 대한 등가하중($L_{ni}^n R_i$)의 합과 각 부재 단부에 발생하는 응력의 D_n 자유도에 대한 등가응력 $P_n^{(i)}$ 의 합은 평형을 이룬다. 이는 D_n 변위에 대한 저항력은 각 부재의 저항력 $P_n^{(i)}$ 의 합임을 의미하고, 그러므로 각 부재의 $P_n^{(i)}$ 는 n 번째 전역 자유도 변위 D_n 에 대한 i 번째 부재의 내력기여도계수로 정의될 수 있다.

한편 i 번째 부재의 n 번째 전역자유도변위에 대한 변위기여도계수 $S_n^{(i)}$ 와 내력기여도계수 $P_n^{(i)}$ 사이에는 U_{nm} 을 탄성계수로 하는 후크의 법칙이 성립한다.

$$P_n^{(i)} = U_{nm} S_n^{(i)} \quad (\text{식 22})$$

2.4 변위기여율 및 내력기여율

(식 6)과 (식 16)에서 보듯이, 각 부재의 변위기여도계수의 합은 해당 전역 자유도 변위가 되며, 각 부재의 내력기여도계수의 합은 해당 전역 자유도에 변위를 유발하는 외력과 같다. 각 부재의 변위기여도계수를 전체 변위기여도계수의 합, 즉 해당 전역 자유도 변위에 대한 비율을 변위기여율 $H_i^{(k)}$ 로 정의하며, 변위기여율의 합은 1.0이 된다. 또한 동일한 방법으로 각 부재의 내력기여율을 계산할 수 있으며, 그 값은 변위기여율과 동일하다.

$$H_i^{(k)} = \frac{S_i^{(k)}}{\sum_{k=1}^m S_i^{(k)}} = \frac{S_i^{(k)}}{D_i} \quad (\text{식 23})$$

3. 강성기여도계수와 전역 변위와의 관계

전 장에서 정의된 변위 또는 내력기여도계수와 구조물 내 전역 변위 사이에 수학적으로 표현 가능한 함수 관계가 존재한다면, 이는 이들 부재 계수만 알면 제어하고자 하는 전역 자유도에서의 변위량을 각 부재의 강성 재설계를 통하여 정량적으로 제어할 수 있음을 의미한다. 본 장에서는 변위기여도계수를 포함한 부재의 여러 속성과 전역 자유도 변위 사이의 관계를 분석, 기술한다.

그런데 대상구조물이 정정구조물인지 부정정구조물인지에 따라 제반 관계식에 근본적인 차이가 나타난다. 이러한 차이는, 정정구조물의 경우 각 부재의 부재강성이 부재강성에 무관하게 일정하여 부재강성과 변위사이 선형 관계가 성립하는 반면, 부정정구조물에서는 부재 강성에 따라 부재력이 변하여 부재강성과 변위사이 비선형성이 존재하는데 기인한다.

하지만 어느 비선형 문제와 마찬가지로, 본 연구에서 다루는 부재 강성 및 변위기여도계수와 전역 변위 사이의 비선형 문제도 본 논문에서 제시하는 선형 관계를 반복 적용함으로써 해결할 수 있을 것으로 기대된다.

이에 본 연구에서는 정정구조물을 대상으로 부재강성과 전역변위 사이의 해석적 관계를 제시하며, 부정정구조물에 대한 해석적 관계는 논외로 한다. 다만 제시된 관계식을 부정정구조물에 적용해 봄으로써 부정정구조물에 존재하는 부재강성과 전역변위 사이의 비선형성이 어느 정도의 오차를 유발하는 지에 대하여 다음 장에서 제시한다.

3.1 부재강성과 변위기여율

(식 15) 및 (식 17)에서 보듯 n 번째 자유도변위에 대한 i 번째 부재의 강성과 내력기여도계수 사이에는 다음의 관계가 존재한다.

$$P_n^{(i)} = L_n^{-1} f^{(i)} = L_n^{-1} K^{(i)} D \quad (\text{식 24})$$

정정구조물에서 부재력 $f^{(i)}$ 는 일정하고, <그림 2>

에서 표현된 바대로 D_n 변위가 1일 때 소거 전 각 자유도에서의 변위인 L_{n-1} 는 부재강성 $K^{(i)}$ 에 반비례하게 되므로, 결국 부재강성 $K^{(i)}$ 와 내력기여도계수 사이에는 반비례관계가 성립한다. 그러므로 부재강성의 변화량을 $\Delta K^{(i)}$ 라 하고, 이 때 (식 23)으로 계산되는 변위기여율 변화량을 $\Delta H^{(i)}$ 라 하면, $\Delta H^{(i)}$ 와 $\Delta K^{(i)}$ 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$H^{(i)} + \Delta H^{(i)} = \frac{K^{(i)}}{(K^{(i)} + \Delta K^{(i)}(1 - H^{(i)}))} H^{(i)} \quad (\text{식 25})$$

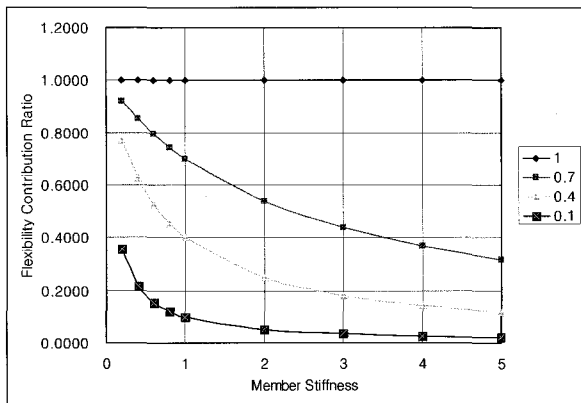
<그림 3>은 초기 변위기여율이 0.1, 0.3, 0.7, 1.0인 각 부재의 강성이 본래 강성 대비 1/5에서 5배까지 변할 때 변위기여율의 변화를 보여준다.

한편, 한 부재의 강성 및 변위기여율 변동은 여타 부재의 변위기여율로 이어지는데, i 번째 부재의 강성변화에 따른 k 부재의 변위기여율은 i 부재 변위기여율의 변동량을 각 부재의 변위기여율 비율에 따라 배분함으로써 구할 수 있는데, 이를 정리하면 $\Delta H^{(i)}$ 와 $\Delta K^{(i)}$ 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$H^{(k)} + \Delta H^{(k)} = \frac{K^{(i)} + \Delta K^{(i)}}{(K^{(i)} + \Delta K^{(i)}(1 - H^{(i)}))} H^{(k)} \quad (\text{식 26})$$

where, $k = 1$ to m , but not i

이상의 (식 25)와 (식 26)을 결합하여 정리하면, 여러 부재의 강성이 변할 때 i 번째 부재의 변위기여율은 (식 27)로 계산된다.



<그림 3>

$$H^{(i)} + \Delta H^{(i)} = \frac{K^{(i)} H^{(i)} + \sum_{k=1, k \neq i}^m (K^{(i)} + \Delta K^{(i)}) H^{(k)}}{(K^{(i)} + \Delta K^{(i)}(1 - H^{(i)}))} \quad (\text{식 27})$$

3.2 부재강성과 전역변위의 관계

(식 16)에서 $U_{mm} D_n = V_n$ 이므로 구조물의 강성 U_{mm} 이 ΔU_{mm} 증가하였을 때 D_n 자유도에서의 변위변동량은 다음 식으로 계산된다.

$$D_n + \Delta D_n = D_n \left(1 - \frac{\Delta U_{nn}}{U_{nn} + \Delta U_{nn}} \right)$$

$$\Delta D_n = -D_n \frac{\Delta U_{nn}}{U_{nn} + \Delta U_{nn}} \quad (\text{식 28})$$

이 때 변위변동에 대한 각 부재의 기여도는 변위기여율에 비례한다. 그러므로 i 번째 부재의 강성이 $\Delta K^{(i)}$ 만큼 변할 때 D_n 자유도에서의 변위변동량은 다음 식에 의해 재해석 없이 계산될 수 있다.

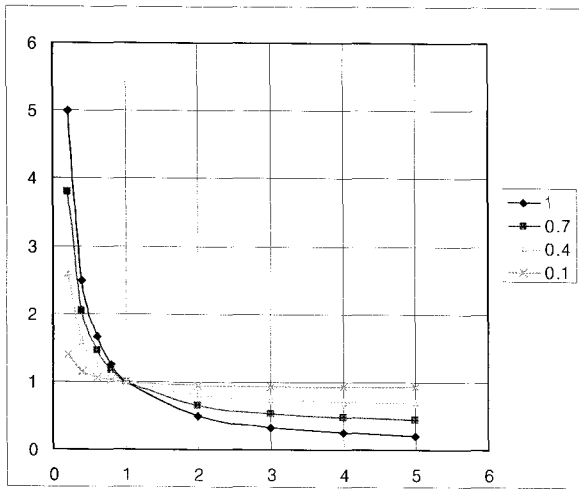
$$D_n + \Delta D_n^{(i)} = D_n \left(1 - H^{(i)} \frac{\Delta K^{(i)}}{K^{(i)} + \Delta K^{(i)}} \right)$$

$$\Delta D_n^{(i)} = -D_n H^{(i)} \frac{\Delta K^{(i)}}{K^{(i)} + \Delta K^{(i)}} \quad (\text{식 29})$$

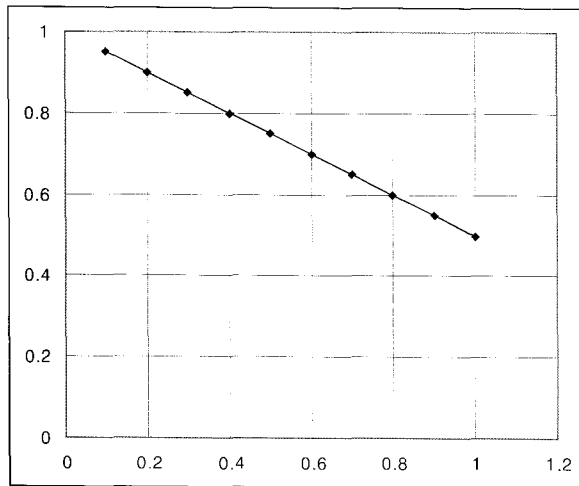
그러므로 여러 부재의 강성이 함께 변할 때 D_n 변위는 각 부재 강성 변화에 따른 변위변동량의 합으로 구할 수 있다.

$$D_n + \Delta D_n = D_n \left(1 - \sum_{k=1}^m \Delta D_n^{(k)} \right) \quad (\text{식 30})$$

<그림 4>는 변위기여율이 0.1, 0.4, 0.7, 1.0인 각 부재의 강성이 본래 강성 대비 1/5에서 5배까지 변할 때 한 전역 자유도 변위의 변동율을 보여준다. 그림에서 보듯 부재의 변위기여율이 클수록 전역 자유도 변위의 변동율이 크게 됨을 확인할 수 있다. 한편 그림 4는 변위기여율이 0.1, 0.4, 0.7, 1.0인 각



〈그림 4〉



〈그림 5〉

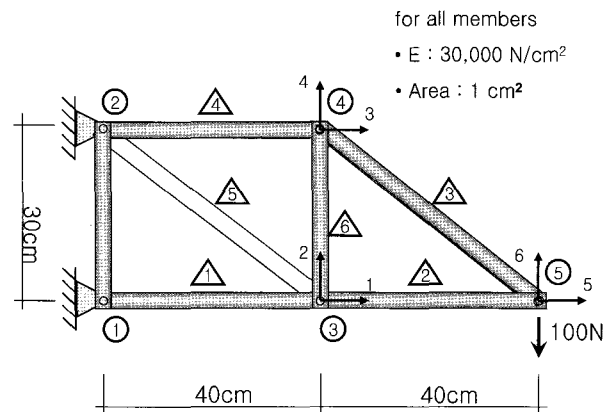
부재의 강성을 본래 강성 대비 2배로 증가시켰을 때 전역 자유도 변위의 감소율을 변위기여율과 대비하여 그린 것이며, 변위변동량이 변위기여율에 비례함을 확인할 수 있다.

4. 적용예

본 장에서는 단순한 정정 및 부정정 트러스 구조물을 대상으로 변위기여도계수를 구하고, 부재강성을 변경하였을 때 구조해석 결과와 본 논문에서 제시한 전역변위 및 변위기여도계수 예측식에 의한 계산값을 비교함으로써 본 연구 결과와 활용성을 검증하고자 한다.

4.1 정정트러스 예

〈그림 6〉은 6개의 부재와 6개의 전역변위를 갖는 정정트러스이다. 해석 결과로서 표 1은 각 자유도별 변위 D_n 과 각 전역변위만으로 응축 시 해당 자유도로 변환된 증가하중 V_n 및 증가강성 U_n 을 보여준다. 이 표에서 각 자유도별로 $U_n D_n = V_n$ 이 성립됨을 확인할 수 있다. 〈표 2〉는 (식 17) 등에서 사용된 L^{-1} 행렬로서 L^{-1}_{ij} 는 j 번째 자유도에 작용하는 단위하중을 i 번째 자유도에 대해 응축했을 때의 증가하중이다. 또한 변위 관점에서 L^{-1}_{ij} 는 〈표 1〉에 주어진 증가강성 크기의 하중이 행 번호 자유도에 작용하여 그 방향으로 1의 변위가 발생할 때 각 자유도



〈그림 6〉 예제 트러스

〈표 1〉 자유도별 변위 및 해당 자유도로 응축 시 증가하중과 증가강성

DOF	1	2	3	4	5	6
변위 D_n (cm)	-0.3556	-0.9370	0.1778	-1.0370	-0.5333	-2.4481
증가하중 V_n (N)	-266.67	-133.86	133.33	-129.63	-200.00	-100.00
증가강성 U_n (N)	750.00	142.86	750.00	125.00	375.00	40.85

〈표 2〉 L^{-1} 행렬

DOF \ DOF	1	2	3	4	5	6
1	1.0000	1.3333	0.0000	1.3333	1.0000	2.6667
2	0.2540	1.0000	0.0000	1.0000	0.2540	1.3386
3	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	-1.3333
4	0.2222	0.8750	0.0000	1.0000	0.2222	1.2963
5	0.5000	0.6667	0.0000	0.6667	1.0000	2.0000
6	0.1452	0.3828	-0.0726	0.4236	0.2179	1.0000

에 발생하는 변위를 나타낸다.

<표 3>은 (식 16)으로 계산되는 각 자유도에 대한 부재의 내력기여도계수와 (식 23)으로 계산되는 변위기여율이다. <표 3>에서 모든 부재의 각 전역변위에 대한 내력기여도계수의 합은 <표 1>에 제시된 해당 방향으로의 증가하중과 동일함을 확인할 수 있으며, 표 3에서 같은 방법으로 변위기여율의 합을 구하면 모두 1이다.

<표 3> 부재별 내력기여도계수와 변위기여율

Member	DF	1	2	3	4	5	6
		1	-266.67	-67.72	0.00	-59.26	-133.33
2	0.00	0.00	0.00	0.00	-66.67	-9.68	0.000
	0.000	0.000	0.000	0.000	0.333	0.097	0.000
3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-18.91	0.000
	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.189	0.000
4	0.00	0.00	133.33	0.00	0.00	-9.68	0.000
	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.097	0.000
5	0.00	-66.14	0.00	-57.87	0.00	-18.91	0.000
	0.000	0.494	0.000	0.446	0.000	0.189	0.000
6	0.00	0.00	0.00	-12.50	0.00	-4.08	0.000
	0.000	0.000	0.000	0.096	0.000	0.041	0.000
SUM	-266.67	-133.86	133.33	-129.63	-200.00	-100.00	1.000
	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

<표 4> 부재강성 및 내력기여도계수와 변위와의 관계

부재	내력 기여도 계수	부재 강성				
		0.1	0.5	1	2	10
1	38.7292	10.9815	3.3963	2.4481	1.9741	1.5948
2	9.6823	4.5815	2.6852	2.4481	2.3296	2.2348
3	18.9107	6.6148	2.9111	2.4481	2.2167	2.0315
4	9.6823	4.5815	2.6852	2.4481	2.3296	2.2348
5	18.9107	6.6148	2.9111	2.4481	2.2167	2.0315
6	4.0847	3.3481	2.5482	2.4481	2.3982	2.3582

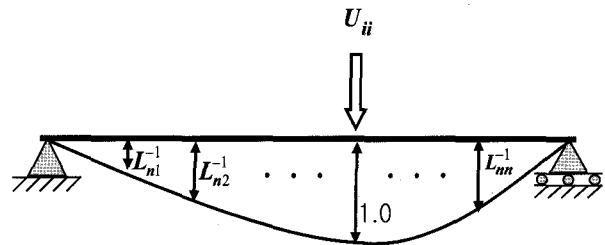
<표 5> 강성 2배 증가 시 내력기여도계수의 변화

부재 번호	초기 계수	단면적 2배로 증대시킨 부재 번호					
		1	2	3	4	5	6
1	38.73	24.02	40.70	42.77	40.70	42.77	39.54
2	9.68	12.01	5.09	10.69	10.17	10.69	9.88
3	18.91	23.45	19.87	10.44	19.87	20.89	19.31
4	9.68	12.01	10.17	10.69	5.09	10.69	9.88
5	18.91	23.45	19.87	20.89	19.87	10.44	19.31
6	4.08	5.07	4.29	4.51	4.29	4.51	2.08
SUM	99.99	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00

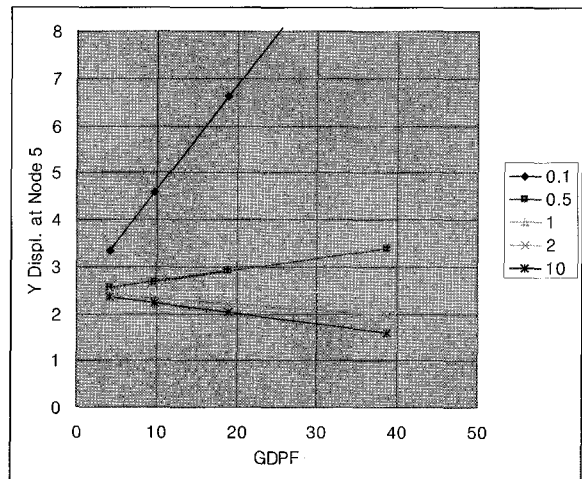
이상의 해석 결과를 이용하여, <표 4> 및 <그림 8>은 각 부재의 강성, 즉 단면적이 0.1, 0.5, 1.0, 2.0, 10.0배 되었을 때, 부재강성 및 내력기여도계수와 5번 절점의 수직방향 변위(6번 자유도) 사이의 관계를 정리한 것이다. 전역변위의 계산은 유한요소해석과 (식 30)에 의한 예측값을 비교하였으며, 두 결과가 완전히 일치함을 확인하였다. 또한 <그림 7>에서 부재 강성 변화율이 동일할 때 부재의 내력기여도계수와 전역변위 변화량은 선형비례 관계에 있음도 다시 확인하였다.

<표 5> 및 <그림 9>는 각 부재의 단면적을 2배로 하였을 때 각 부재 변위기여율의 변화를 보여준다. 이 또한 해석결과와 (식 27)에 의한 예측값을 비교하여 두 값이 일치함을 확인하였다.

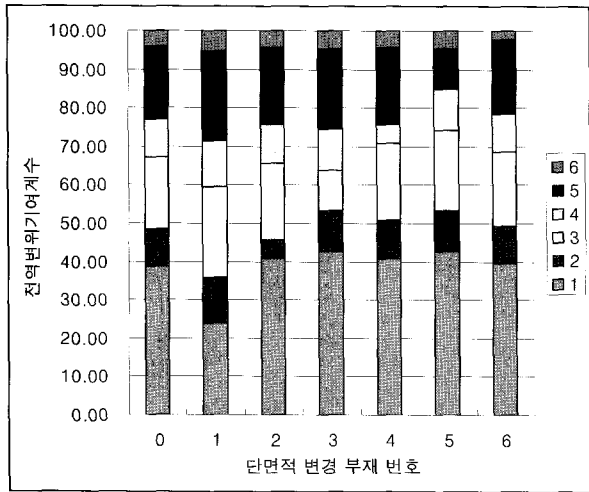
이상과 같이 정정구조물의 경우 본 연구에서 제시한 각종 관계식은 모두 정해이며, 정정구조물의 전역변위 제어를 위해 사용될 수 있고, 또한 다음 절의 부정정트러스 예에서 보듯 부정정구조물의 전역변위 제어를 위한 기본식으로 사용될 수 있다.



<그림 7> Dn 단위변위 시 소거된 자유도에서의 변위



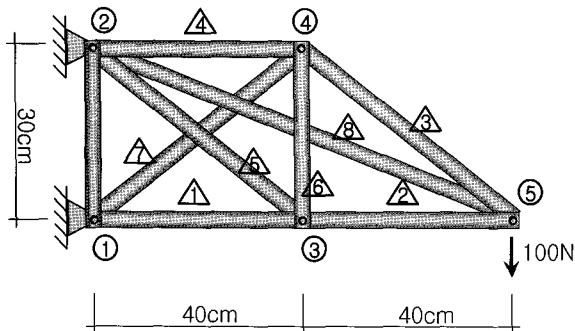
<그림 8> 부재강성 및 내력기여도계수와 변위와의 관계



<그림 9> 강성 2배 증가 시 내력기여도계수의 변화

4.2 부정정트러스 예

<그림 10>은 전 절의 정정트러스에 2개의 부재를 추가한 2차 부정정트러스이다. 해석 결과로서 <표 6>은 각 자유도 별 변위 D_n 과 각 전역변위만으로 응축 시 해당 자유도로 변환된 등가하중 V_n 및 등가강성 U_m 을 보여준다. <표 7>은 <표 2>와 마찬가지로 L^{-1} 행렬이고, <표 8>은 각 부재의 강성, 즉 단면적이 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 5.0배 되었을 때, 부재강성 및 내력기여도계수와 5번 절점의 수직방향 변위(6번 자유도) 사이의 관계를 정리한 것이다. 이 표에서 특정 부재의 특정 강성에 대하여 3개의 값이 주어 지는데, 첫번째 값은 강성변경 후 해석 결과로 주어진 변위, 두번째 값은 (식 30)으로 계산, 예측된 변위, 그리고 세번째 값은 해석 결과 대비 예측값의 비율이다. 부정정트러스의 경우 (식 30)에 의한 예측값은 실제 해석 결과보다 크며, 이러한 오차는 부



<그림 10> 부정정트러스 예

<표 21> 자유도별 변위 및 해당 자유도로 응축 시 등가하중과 등가강성

DOF	1	2	3	4	5	6
변위 D_n (cm)	-0.2695	-0.4929	0.2233	-0.5217	-0.4878	-1.8273
등가하중 V_n (N)	-240.96	-141.84	223.86	-156.74	-209.30	-100.00
등가강성 U_m (N)	893.9	287.8	1002.6	300.4	429.1	54.7

<표 8> L^{-1} 행렬

DOF \ DOF	1	2	3	4	5	6
1	1.0000	0.8763	-0.2083	0.7776	0.9836	2.4096
2	0.2821	1.0000	-0.1870	0.8470	0.3246	1.4184
3	-0.2337	-0.6514	1.0000	-0.7248	-0.3368	-2.2386
4	0.2613	0.8843	-0.2172	1.0000	0.3169	1.5674
5	0.4721	0.4840	-0.1441	0.4526	1.0000	2.0931
6	0.1475	0.2697	-0.1222	0.2855	0.2670	1.0000

<표 9> 부재강성 및 내력기여도계수와 변위와의 관계

부재	내력 기여도 계수	구분	부재 강성				
			0.5	1	1.5	2	5
1	-29.82	해석	2.2966	1.8273	1.6354	1.5310	1.3269
		예측	2.3722	1.8273	1.6457	1.5548	1.3914
		비율	1.0329	1.0000	1.0063	1.0156	1.0486
2	-19.56	해석	2.1634	1.8273	1.7056	1.6428	1.5261
		예측	2.1847	1.8273	1.7082	1.6486	1.5414
		비율	1.0099	1.0000	1.0015	1.0035	1.0100
3	-15.1	해석	2.0729	1.8273	1.7313	1.6802	1.5822
		예측	2.1032	1.8273	1.7353	1.6893	1.6066
		비율	1.0146	1.0000	1.0023	1.0054	1.0154
4	-20.46	해석	2.1260	1.8273	1.6912	1.6134	1.4527
		예측	2.2012	1.8273	1.7027	1.6404	1.5282
		비율	1.0354	1.0000	1.0068	1.0167	1.0520
5	-2.11	해석	1.8551	1.8273	1.8126	1.8035	1.7828
		예측	1.8659	1.8273	1.8144	1.8080	1.7965
		비율	1.0058	1.0000	1.0010	1.0025	1.0077
6	-0.45	해석	1.8350	1.8273	1.8245	1.8230	1.8202
		예측	1.8355	1.8273	1.8246	1.8232	1.8207
		비율	1.0003	1.0000	1.0000	1.0001	1.0003
7	-6.56	해석	1.9015	1.8273	1.7769	1.7405	1.6376
		예측	1.9472	1.8273	1.7873	1.7674	1.7314
		비율	1.0240	1.0000	1.0059	1.0154	1.0573
8	-5.93	해석	1.9097	1.8273	1.7870	1.7630	1.7115
		예측	1.9357	1.8273	1.7912	1.7731	1.7406
		비율	1.0136	1.0000	1.0023	1.0057	1.0170

정정구조물의 특성 상 부재 강성 변화에 따라 구조물 전체에 내력재분배가 발생하며 부재력이 변함에 기인한다. 이와 같이 부정정구조물의 경우 정해는 아닐지라도 변위기여도계수, 변위기여율, 강성변경 후 변위기여율 및 변위예측식 등은 부정정구조물의 정량적 변위 제어를 위해 의미있는 지표가 될 것으로 기대된다.

5. 결론

본 연구에서는 구조물의 강성설계, 특히 특정 변위를 목표치 이하로 제어하고자 할 경우 활용할 수 있는 정량적 횡변위기법을 제안하였다. 이를 위하여 특정 전역 자유도에 대한 부재의 변위기여도계수와 내력기여도계수를 유도하여 특정 변위에 대한 각 부재의 기여도를 정량화하도록 하였다. 또한 이들 계수를 이용하여 단일 부재 강성과 특정 변위간의 상관성을 정식화함으로써 부재 재설계를 통한 변위의 정량적 제어가 가능하도록 하였다.

본 연구에서 제안한 기법은 정정구조물의 경우 정해로서 정정구조물로 구축되는 대공간 지붕 구조물등의 강성설계 또는 변위제어에 매우 유용하게 사용될 수 있을 것으로 기대된다. 또한 부정정구조물의 경우에도 부재 내력 재분배에 의한 오차가 발생하기는 하나, 각 부재 강성과 특정 변위간의 상관

성과 경향을 제시해준다는 면에서 활용성이 매우 높을 것으로 기대된다.

참고문헌

1. 김치경. "부분적 강성 변화에 따른 효율적 부분재해석 알고리즘," 한국전산구조공학회 논문집, 제17권 제4호, 2004. 12., pp.459~467
2. 박효선, 서지현. "부재력 특성을 고려한 설계변수를 사용한 고층건물 변위조절설계법 개발," 한국전산구조공학회 논문집, 제17권 제2호, 2004, pp.215~222
3. Bathe KJ, Finite Element Procedures, Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1996, pp. 717~718
4. Charney FA, "The Use of Displacement Participation Factors in the Optimization of Drift Controlled Buildings," Proceedings of 2nd Conference on Tall Buildings in Seismic Regions, 55th Regional Conference, Los Angeles, 1991
5. Miller, GR. "Localized Tensor-Based Solvers for Interactive Finite Element Applications Using C++ and Java", Computers & Structures, Vol.81, 2003, pp.423~437