

다하중 경우를 가지는 단순 지지된 깊은 보의 위상최적화에 대한 경험

An Experience on the Topology Optimization of Simply Supported Deep Beam Structure with Multi-Load Cases

이 상 진* 박 경 임**
Lee, Sang Jin Park, Gyeong Im

요 약

이 논문은 여러 개의 집중하중을 받는 깊은 보의 최적위상을 조사 분석하고 그 결과를 기술하였다. 본 연구에서는 최소화해야 하는 변형에너지를 목적함수로 가정하고 구조물의 초기부피를 제약함수로 사용하였다. 물질내부에 존재하는 구멍의 크기를 조절하기 위하여 최적정기준법을 바탕으로 한 크기조절알고리즘을 도입하였다. 수치해석을 통하여 깊은 보의 최적위상과 관련한 위상최적화 파라미터의 민감도를 조사하였고, 필터링과정이 최적위상에 끼치는 영향을 심도 있게 조사하였다. 수치해석결과로부터 깊은 보의 최적위상은 최적화 파라미터와 깊이 연관되어 있고 필터링과정이 최적위상을 찾는 데 매우 중요한 역할을 하는 것으로 나타났다.

Abstract

This paper provides the results of the investigation on the optimum topology of simply supported deep beam structures with multi-point load cases. In this study, the strain energy to be minimized is considered as the objective function and the initial volume of structures is used as the constraint function. The resizing algorithm based on the optimality criteria is adopted to update the hole size existing inside the material. In this study, the sensitivities of topology optimization parameters to the optimum topology of the deep beam structures is investigated and also the effect of filtering process on the optimum topology is thoroughly tested. From numerical tests, the optimum topology of the deep beam is closely related with the optimization parameters used in the iteration and the filtering process play important role in order to find the optimum topology of the deep beam.

키워드 : 깊은보, 위상최적화, 다하중경우, 여과절차, 크기조절 알고리즘

Keywords : Deep Beam, Topology Optimization, Multi-load Case, Filtering Process, Resizing Algorithm

1 서 론

최근 수치해석을 이용한 구조설계최적화기법이 급속히 발달하면서 구조물을 설계할 때 동반되는 반복적인 작업이 크게 감소하고 있다. 이러한 구조설계최적화기법은 구조설계에 요구되던 시간적 손실을 줄여줄 뿐만 아니라 축적된 경험을 충분히 이용할 수 있고 과학적인 방법으로 최고의 성능을

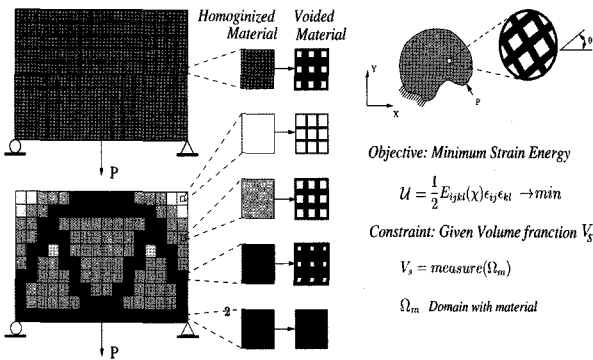
가지는 구조물을 도출하는데 매우 효과적이다. 구조물의 성능에 초점을 맞추던 설계최적화의 개념이 최근에는 미와 구조적인 안정성을 동시에 충족하는 보다 진보적인 시각에 큰 비중을 두게 되었다. 이러한 개념의 변화는 설계최적화에 이용되는 이론의 발달뿐만 아니라 그동안 구조물을 설계하면서 축적한 기술지식과 눈부신 컴퓨터 산업의 발달이 주요원인이라 할 수 있겠다.

전통적으로 설계최적화는 구조 부재의 크기를 조절하는 방법을 연구하는 것이었는데 점차 구조물의 형상을 조절하는 최적화기법으로 발전하기에 이르

* 정희원, 경상대학교 공과대학 건축학부 조교수,
Tel : 055-751-6541 FAX : 055-761-0165
E-mail : lee@gsnu.ac.kr

** 경상대학교 건축학부 구조공학전공 대학원석사과정

렸다. 그리고 최근에는 크기와 형상최적화로 양분된 기존의 설계최적화의 틀을 깨는 새로운 패러다임으로 구조물의 새로운 위상을 도출하는 위상최적화개념에 대한 연구가 활발히 전개되고 있다. 위상최적화는 구조물을 이루고 있는 재료가 임의의 하중에 효과적으로 저항할 수 있는 형태로 재배열 되어 주어진 동일한 재료로 외력에 저항할 수 있는 최선의 구조형태를 찾아내는 것이라고 할 수 있다. 위상최적화의 기본개념은 <그림 1>에 도시된 바와 같이 나타낼 수 있다. 이는 구조물을 이루고 있는 재료를 내부에 구멍을 가지는 물질로 가정하고 재료내부에 존재하는 구멍의 크기를 인위적으로 조절함으로써 주어진 외력에 적합한 재료의 분포를 찾아내는 것이라 할 수 있다.



<그림 1> 위상최적화의 기본개념

따라서 본 연구에서는 위상최적화를 수행하기 위해서 필요한 재료모델, 반응해석, 크기조절알고리즘의 세 가지 기본요소를 선택적으로 도입하고 이를 이용하여 여러 개의 하중을 동시에 받는 단순지지된 깊은 보의 최적위상을 조사하고 그 결과가 초기 구조물의 성능과 어떤 상관관계를 가지는지 정량적으로 제시하고자 한다. 또한 깊은 보의 최적화를 수행하는데 있어 나타나는 최적화 알고리즘 변수가 보의 최적위상에 미치는 민감도를 조사하였다.

2. 재료모델

위상최적화는 물질이 차 있는 부분과 비어있는 부분으로 이루어진 비 등질의 단위 셀이 구조물에 반복적으로 분포되어 있다는 가정을 전제로 한다.

유한요소법을 도입하게 되면 설계영역이 이산화 되고 하나의 유한요소가 하나의 셀로 표현되는 것으로 가정할 수 있다. 따라서 구조물의 전체 설계영역 Ω 는 셀이 반복되어진 것으로 간주 할 수 있다.

서론에서 전술한 바와 같이 위상최적화는 임의의 설계영역 Ω 내에서 변화하는 탄성텐서 E_{ijkl} 의 최적값을 찾아내는 문제로 정의되는데 이때 E_{ijkl} 는 다음과 같이 정의 할 수 있다.

$$E_{ijkl}^h = \chi(x) \overline{E}_{ijkl}(x) \tag{1}$$

여기서 $\overline{E}_{ijkl}(x)$ 는 물질을 구성하는 탄성계수이고, $\chi(x)$ 는 설계영역 Ω 내에서 변화하는 물질의 존재유무를 나타내는 지시변수(indicator factor)로 각 요소에 대하여 다음과 같이 정의 된다.

$$\begin{aligned} \chi(x) &= 1 : \text{물질유} \\ &= 0 : \text{물질무} \end{aligned} \tag{2}$$

그러나 물질의 존재유무를 식 (2)에서 정의한 바와 같이 영이나 일의 양극의 값으로 정의하면 최적값은 물질이 존재하거나 또는 존재하지 않는 부분이 불연속적으로 나타나게 된다. 따라서 설계영역 전체에 물질이 완만하게 분포되도록 하기 위해서 합성물질의 도입이 필요하게 된다. 즉 연속성을 가지는 밀도함수 $\xi(x)$ 를 도입하여 탄성텐서를 다음과 같이 수정해야 한다.

$$E_{ijkl}^h = \xi(x) \overline{E}_{ijkl}(x) \tag{3}$$

여기서 $0 \leq \xi(x) \leq 1$ 이고 $x \in \Omega$ 이다. 이때 물질의 부피는 다음과 같다.

$$V_s = \xi d\Omega \tag{4}$$

여기서 V_s 는 구조물을 이루는 물질의 초기부피이며 최적화과정을 통하여 일정한 값을 유지한다고 가정한다.

밀도함수 $\xi(x)$ 를 도입함으로써 최적값이 연속성을 가질 수 있게 되나 위상최적화의 결과는 뚜렷한 위

상을 나타내지 못하게 된다. 따라서 밀도함수를 적절한 형태로 조정할 필요가 있다. 아래와 같이 밀도 함수에 지수 γ 를 도입하여 밀도함수를 수정하게 되면 위상최적화의 결과를 뚜렷하게 한다.

$$E_{ijkl}^h = \xi^\gamma(x) \overline{E}_{ijkl}(x) \quad (5)$$

여기서 γ 는 일반적으로 $\gamma \geq 1$ 값으로 가정되며 주로 3에서 9사이의 값이 사용된다. 이때 γ 의 값이 커질수록 최적화로부터 구해진 위상이 뚜렷하게 나타난다.

임의의 밀도함수 $\xi(x)$ 는 재료내부의 미소구조체를 형성하는 기하학적 형태와 관계가 있다. <그림 2>에서와 같이 사각형 빈 공간을 포함하고 있는 단위 셀의 경우 밀도함수 $\xi(x)$ 는 $\xi(x) = 1 - a(x)b(x)$ 로 나타낼 수 있으며 빈공간의 크기는 $0 \leq a(x) \leq 1, 0 \leq b(x) \leq 1$ 의 범위를 가진다.

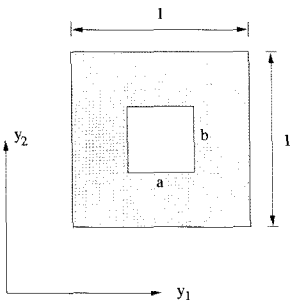
단위셀의 미소구조체를 채우고 있는 부분을 등방성 물질이라고 가정하면 구조물의 강성행렬 D 는 a 와 b 의 함수로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$D := D^h(a, b) \quad (6)$$

여기서 a, b 는 요소 내에 존재하는 빈 공간의 크기를 결정하는 변수이며, 물성행렬 $D^h(a, b)$ 는 식 (5)을 이용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$D^h(a, b) = (1 - ab)^\gamma D = \rho(a, b)^\gamma D \quad (7)$$

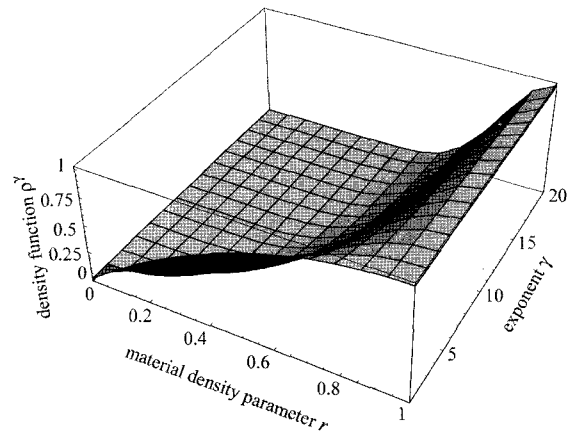
본 연구에서는 <그림 2>의 사각형 구조체의 모양을 정사각형으로 가정하여 평면응력상태에 있는 구조물의 물성행렬 D^h 를 다음과 같이 쓸 수 있다.



<그림 2> 미소좌표계내의 사각형구멍을 가지는 단위셀

$$D^h = \frac{\rho(r)^\gamma E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (8)$$

여기서 밀도함수는 $\rho(r) = 2r - r^2$ 이며 <그림 3>에 도시하였다. 그리고 재료밀도매개변수는 $r = 1 - a$ 로 정의 하였다.



<그림 3> 재료밀도함수의 분포

3. 크기조절 알고리즘

설계영역 Ω 내에 존재하는 다공성물질을 재분배하기 위하여 물질의 초기부피를 일정하게 유지하면서 변형에너지를 최소화하는 최적정기준을 도입하였다. 그리고 각 단위셀의 재료밀도매개변수를 설계변수로 이용하였다. 유한요소법을 사용한 이산화된 영역에서는 구조물이 재료밀도매개변수 r_e 을 가지는 요소 e 의 조합으로 표현되며 설계변수의 수는 유한요소의 수와 동일하게 된다.

구조물에 작용하는 하중 경우가 전부 n 개라고 가정하면 이들에 대한 구조물의 전체변형에너지는 다음과 같이 가중치를 도입하여 표현할 수 있다.

$$U = \sum_{i=1}^n w_i U^i \quad (9)$$

여기서 $U^i = \sum_{e=1}^{nel} \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} \sigma_e^T \sigma_e dV$ 는 i 번째 하중에 대한 구조물의 변형에너지를 나타내며 w_i 는 상응하는

가중치를 나타낸다. 식 (9)에 정의된 변형에너지를 이용하면 다하중의 경우를 가지는 구조물의 위상최적화문제는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } U \\ & \text{subject to } V_s = \sum_{e=1}^{nel} (2r_e - r_e^2) V_e \end{aligned} \quad (10)$$

설계영역이 nel 개의 유한요소로 이산화되면 설계변수 벡터는 다음과 같다.

$$r = [r_1, r_2, \dots, r_e, \dots, r_{nel}]^T \quad (11)$$

식 (10)에 정의된 최적화문제는 라그랑지 승수를 이용하여 구속조건을 목적함수에 첨가함으로써 다음과 같이 라그랑지함수 L 로 정의된다.

$$\begin{aligned} L(r_e) = & U - \lambda \left(\sum_{e=1}^{nel} (2r_e - r_e^2) - V_s \right) \\ & - \sum_{e=1}^{nel} \lambda_{r_e}^+ (r_e - 1) + \sum_{e=1}^{nel} \lambda_{r_e}^- r_e \end{aligned} \quad (12)$$

여기서 λ , $\lambda_{r_e}^+ = [\lambda_{r_1}^+, \lambda_{r_2}^+, \dots, \lambda_{r_{nel}}^+]$, $\lambda_{r_e}^- = [\lambda_{r_1}^-, \lambda_{r_2}^-, \dots, \lambda_{r_{nel}}^-]$ 는 라그랑지승수이며 r_e 는 설계변수를 나타낸다. 식 (12)에서 라그랑지승수 $\lambda_{r_e}^+$, $\lambda_{r_e}^-$ 는 항상 만족 되므로 식 (12)에 정의된 라그랑지함수 L 의 정상조건 (stationary condition)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{1}{2\lambda(1-r_e)} \frac{\partial}{\partial r_e} \left(\sum_{e=1}^n U_e^i \right) = 1 \text{ 또는 } B_{r_e} = 1 \quad (13)$$

식 (13)은 재료밀도매개변수와 변형에너지의 관계를 나타내는데 이를 이용하면 식 (14)와 같은 크기조절 알고리즘이 제시될 수 있다.

$$\begin{aligned} r_e^{k+1} = & \text{MAX} \quad \text{if } r_e^k (B_{r_e}^k)^\eta \leq \text{MAX} \\ = & r_e^k (B_{r_e}^k)^\eta \quad \text{if } \text{MAX} \leq r_e^k (B_{r_e}^k)^\eta \leq \text{MIN} \\ = & \text{MIN} \quad \text{if } \text{MIN} \leq r_e^k (B_{r_e}^k)^\eta \end{aligned} \quad (14)$$

여기서 $\text{MAX} = \max \{(1-\zeta)r_e, 0\}$ 이고 $\text{MIN} = \min \{(1+\zeta)r_e, 1\}$ 이며 η 는 조절변수, ζ 는 이동변수 그리고 r_e^k 는 k 번째 반복계산에서 r_e 값을 나타낸다.

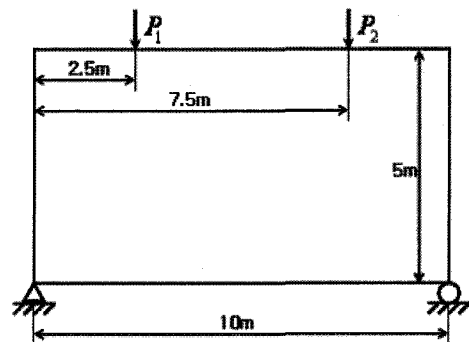
4. 최적화 알고리즘

최적정기준을 이용하여 다하중 경우에 대한 평면 구조물의 위상최적화 알고리즘을 형성하면 다음과 같다.

- ① 주어진 재료의 양을 이용하여 초기 설계변수 값을 계산한다. 설계변수값은 재료밀도벡터로 주어진다.
- ② 초기(또는 갱신된) 재료밀도벡터로 형성한 등질화된 물질을 사용하여 유한요소해석을 수행하고 구조물의 변위값을 구한다.
- ③ 계산된 변위값을 사용하여 목적함수 값 U_e 를 구하고 식 (13)에서 필요한 설계변수에 대한 목적함수의 민감도 $\sum_{i=1}^n \partial U_e / \partial r_e$ 를 계산한다.
- ④ 식(13)를 이용하여 라그랑지승수 λ 를 구한다.
- ⑤ 설계변수값을 갱신한다.
- ⑥ 갱신된 설계변수값을 여과한다.
- ⑦ 갱신된 설계변수값이 주어진 정지조건을 만족하면 최적화를 멈추고 그렇지 않으면 ②-⑥을 반복한다.

5. 깊은 보의 위상최적화

전절에서 기술한 위상최적화기법을 이용하여 깊은 보의 위상최적화를 수행하였다. 본 연구에서는 보 상부의 왼쪽 끝에서 1/4지점과 3/4지점에 집중하중이 가해졌을 때 나타나는 보의 최적위상을 계산하였다. 보의 기하학적 형상은 <그림 4>에 도시된 바와 같으며 위상최적화에 이용된 보의 재료 특



<그림 4> 단순 지지된 깊은 보

성치는 탄성계수가 $E=10 \times 10^6 \text{N/m}^2$ 이고 프와송비가 $\nu=0.3$ 이다.

보의 최적위상을 도출하기 위해 아래와 같은 세 가지 하중의 경우를 최적화에 고려하였다.

- ▷ 하중 경우 1 (L_1) : $1.0P_1 + 0.0P_2$
- ▷ 하중 경우 2 (L_2) : $0.0P_1 + 1.0P_2$
- ▷ 하중 경우 3 (L_3) : $1.0P_1 + 1.0P_2$

여기서 하중의 크기는 $P_1 = P_2 = 1000 \text{N}$ 이다.

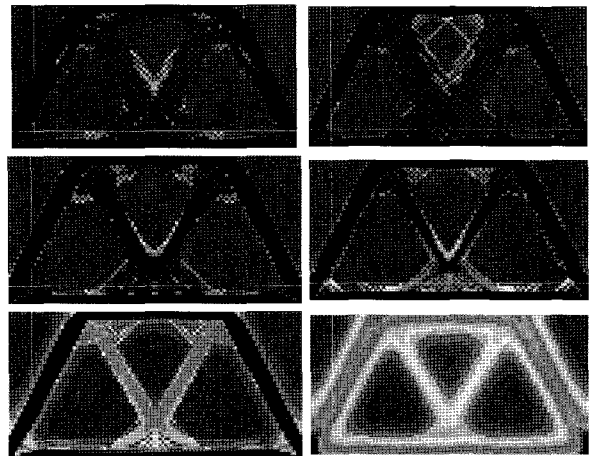
본 연구에서는 다하중 경우와 단하중 경우에 대한 최적위상을 각각 계산하였다. 다하중 경우는 기술한 세 가지 하중 경우 L_1, L_2, L_3 에 대한 변형에너지를 각각 계산한 뒤 동일한 값의 가중치 $w^1 = w^2 = w^3 = 1$ 을 사용하여 전체 변형에너지를 계산하였다.

위상최적화에 필요한 변형에너지를 계산하기 위해 단순보를 5051개의 절점과 5000개의 4절점 유한요소로 이산화 하였다. 이때 보의 재료는 가등질화된 물질로 표현하였고 지수값은 $\gamma=5$ 을 택하였다. 최적정기준을 바탕으로 유도한 크기조절 알고리즘의 조절변수와 이동변수값은 각각 $\eta=1.0, \zeta=0.015$ 를 사용하였다. 그리고 초기부피의 40%를 유지하는 부피구속조건을 사용하였다. 또한 저차요소를 사용함으로써 나타나는 체크무늬현상을 제거하기 위해 여과절차를 선택적으로 사용하였다. 최적화는 반복계산이 200번에 이르면 멈추게 하였다.

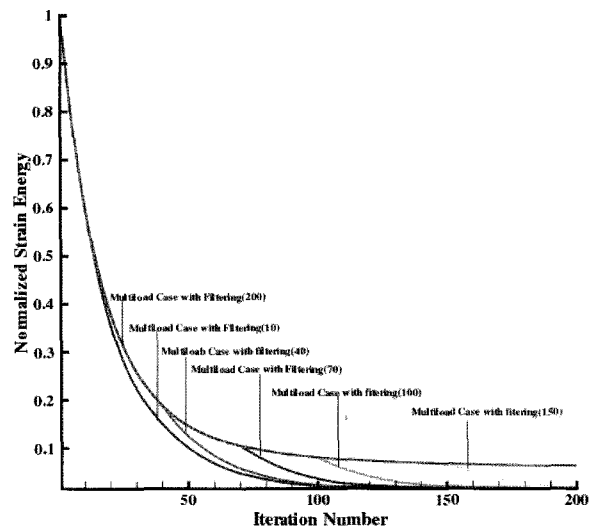
본 연구에서는 여과절차를 도입한 다하중 경우, 가중치의 변화, 그리고 초기부피의 변화 마지막으로 크기조절 알고리즘의 이동변수(ζ)와 조절변수(η) 변화에 대한 위상최적화를 수행하였다.

체크무늬현상은 초기반복계산부터 발생하여 그 현상이 계속 유지되는 것으로 나타났다. 따라서 본 연구에서는 체크무늬 현상을 제거하기 위하여 반복계산초기에 여과절차를 도입하는 방법을 택하였다. 이러한 의미에서 여과절차를 임의의 구간에 선택적으로 도입하였을 때 체크무늬현상이 개선되는 정도를 알아보았다. 본 연구에서는 여과절차를 반복계산종료 10, 40, 70, 100, 150, 200번째 이전까지 적용할 때

나타나는 최적위상을 조사하였다. <그림 5>에는 이렇게 여과절차를 선택적으로 적용한 뒤에 반복계산 200번째에 나타나는 위상을 도시하였다. 위상최적화 결과로부터 반복계산 150번째 이전까지 여과절차를 적용할 경우에도 체크무늬현상이 충분히 제거되지 않는 것으로 나타났다. 이때 변형에너지의 이력은 <그림 6>에 도시된 바와 같다. 여과절차를 임의의 초기 반복계산 구간에 사용할 경우 변형에너지 이력이 꾸준히 감소되나 여과절차를 멈추면 에너지의 감소율이 급격히 늘어났다. 이러한 현상은 여과절차가 주위요소의 재료밀도값을 고려하지 않음으로써 변형에너지의 감소가 가속된 것으로 판단된다.



<그림 5> 여과절차의 도입에 따른 위상최적화 결과: (좌상) 10번째이전, (좌중) 40번째이전, (좌하) 70번째이전, (우상) 100번째이전, (우중) 150번째이전, (우하) 200번째이전



<그림 6> 변형에너지의 이력

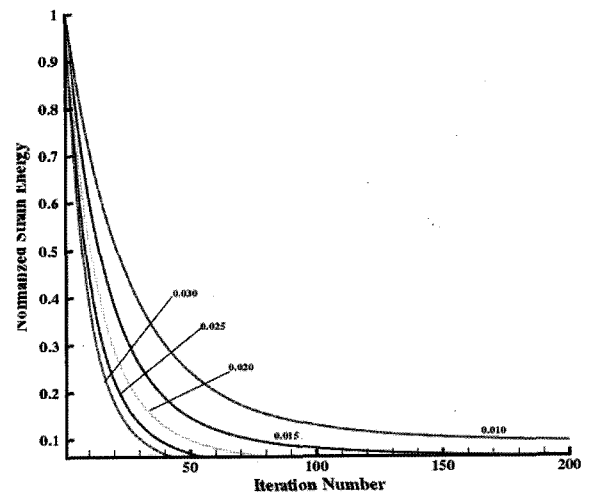
본 예제에서는 여과절차를 적정구간에 적용하여 도 체크무늬현상을 개선할 수 없었다. 다만 최적화 반복계산 200번째까지 계속해서 여과절차를 적용하여야만 체크무늬현상을 제거할 수 있었다. 그러나 200번째까지 계속 여과절차를 적용할 경우에는 변형에너지의 값이 여과절차가 없는 경우에 도출된 변형에너지의 값에 접근할 수 없다는 문제점을 가진다. 이 문제의 원인은 저차의 4절점요소를 사용했기 때문인 것으로 판단된다.

같은 조건하에서 단순보의 단면의 부피조건을 달리하였을 때 나타나는 최적위상에 대하여 조사하였다. 이때 20%, 40%, 60%의 초기부피를 구속조건으로 이용하여 그 결과를 <그림 7>에 도시하였다. 또한 가중치(w)의 변화에 따른 최적위상을 조사하여 그림 8에 도시하였다. 그림 8(상)의 가중치는 $w^1 = 1.0, w^2 = 0.1, w^3 = 1.0$, 그림 8(중)과 (하)는 각각 $w^1 = 0.1, w^2 = 1.0, w^3 = 1.0$, $w^1 = 0.5, w^2 = 0.5, w^3 = 1.0$ 이다. <그림 8> (상)과 (하)의 최적위상은 각각 y축을 기준으로 역대칭을 이루며 <그림 8> (하)의 위상은 하중 R_1 과 R_2 의 가중치의 비가 같기 때문에 위상이 좌우 대칭으로 나타나는 것을 알 수 있다.

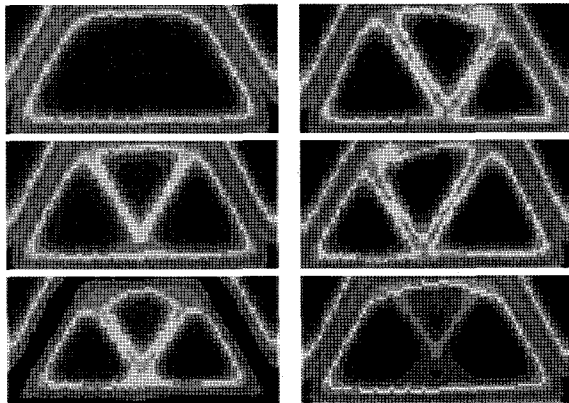
크기조절 알고리즘의 이동변수(ξ) 값이 변형에너지에 어떠한 영향을 주는지 알아보았다. 이때의 조절변수 값은 $\eta = 1.0$ 을 사용하였고 최적화는 반복계산이 200번째에 이르면 멈추게 하였다. <그림 9>에 변형에너지 이력을 도시하였다. 이동변수 $\xi = 0.030, 0.025, 0.020$ 의 세 가지 경우는 변형에너지가 96%의

감소를 보인다. 반면 $\xi = 0.015, 0.010$ 의 경우는 각각 변형에너지가 93%, 89%의 감소를 보이고 있다. 이 결과를 통해서 이동변수의 값이 클수록 위상최적화가 가속화된다는 것을 알 수 있다. 그리고 변형에너지의 감소 정도는 물질에 따라 달라질 수 있는 것으로 판단된다.

마지막으로 크기조절 알고리즘의 조절변수(η) 값의 변화가 변형에너지에 어떠한 영향을 주는지 알아보기로 하였다. 이때의 이동변수 값은 $\xi = 0.015$ 를 사용하였고 위에서와 같이 최적화는 반복계산이 200번째에 이르면 멈추게 하였다. <그림 10>에 변형에너지의 이력을 도시하였다. 조절변수 $\eta = 1.000, 0.020, 0.010, 0.006, 0.004, 0.002$ 에 따른 변형에너지

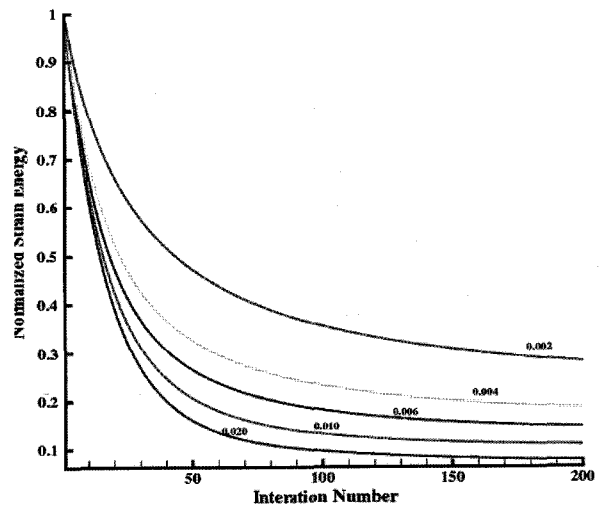


<그림 9> 이동 변수값에 따른 변형에너지의 이력



<그림 7> 최적위상
(상) 20% (중) 40%
(하) 60%

<그림 8> 가중치에 따른
최적위상



<그림 10> 조절 변수값에 따른 변형에너지의 이력

의 감소는 각각 93%, 91%, 87%, 84%, 78%, 68%를 나타내었다. 즉, 조절변수의 값이 클수록 변형에너지의 감소가 크다는 것을 나타내고 있다.

6. 결론

이 연구에서는 최적정기준을 바탕으로 한 위상최적화 기법을 도입하여 단순 지지된 깊은 보의 최적 위상을 도출하고 그 과정에서 경험한 연구결과를 기술하였다. 본 연구를 통하여 깊은 보의 체크무늬 현상을 제거하기 위해 여과절차를 선택적으로 적용하는 것이 가능하였으나 반복계산초기부터 여과절차를 이용할 때만 체크무늬현상이 대부분 제거되는 것으로 나타났다. 그러나 여과절차의 적용 시점에 따라 최적 설계된 보의 변형에너지가 영향을 받는 것으로 나타났다. 또한 최적화과정에서 크기조절 알고리즘의 이동변수(ξ)와 조절변수(η)의 변화에 따른 변형에너지의 변화가 뚜렷했으며 구조물에 따라 적절한 변수를 찾아 최적화를 수행하는 것이 바람직한 것으로 판단되었다. 본 연구를 통하여 깊은 보의 위상최적화를 위해서는 단일하중을 고려하는 위상최적화 알고리즘보다는 다하중을 고려하는 최적화 알고리즘을 개발하고 이를 이용하는 것이 필요한 것으로 나타났다.

참고문헌

1. Vanderplaats GN. "Numerical optimization techniques for engineering design", McGraw-Hill, Boston, 1984
2. Lee SJ. "Schematic concept of fully integrated design optimization for shells", in the Proceeding of the 6th Asian Pacific Conference on Shell and Spartial Structures, Seoul, 2000
3. Lee SJ and Hinton E. "Dangers inherited in shells optimized with linear assumptions," Computers and Structures, Vol. 78, 2000, pp. 478-486
4. 이상진, "스위프 기하학적 모델을 사용한 프리즘 쉘의 최적화", 한국전산구조공학회 논문집, 제13권 제2호, 2000, pp.221-230
5. Bends ϕ e MP and Kikuchi N. "Generating optimum topologies in structural design using a homogenization method", Comp. Meth. Appl. Mech. Engng. 71 (2), 1988, pp197-224
6. Lee SJ, Bae JE and Hinton E. "Shell topology optimization using layered artificial material model", Int. J. Num. Meth. Engng., 47, 2000. pp843-867